

ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ'

1ο φύλλο ασκήσεων 2011 ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Διδάσκων : Χ. Κουντζάκης

13 Ιουνίου 2011

Άσκηση 1 Έστω ότι το σύνολο των καταστάσεων του κόσμου είναι το $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και οι ενέργειές μας εξελίσσονται σε τρεις χρονικές περιόδους $\{0, 1, 2\}$. Έστω ότι η πληροφορία μας για τις καταστάσεις του κόσμου περιγράφεται από τις διαμερίσεις του Ω $F_0 = \{\Omega\}$, $F_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$, $F_2 = \{\{\omega\}, \omega \in \Omega\}$. Να προσδιοριστεί το δένδρο πληροφόρησης \mathbb{D} και να παρασταθεί γραφικά, να προσδιοριστούν τα σύνολα κόμβων \mathbb{D}^+ , \mathbb{D}^- , \mathbb{D}_T καθώς και το υποδένδρο $\mathbb{D}(\xi)$, όπου $\xi = (1, \{1, 2, 3\})$.

Λύση

Είναι

$$\mathbb{D} = \{(0, \Omega), (1, \{1, 2, 3\}), (1, \{4, 5, 6\}), (2, \{1\}), (2, \{2\}), \dots, (2, \{6\})\}.$$

Επίσης

$$\mathbb{D}^+ = \{(1, \{1, 2, 3\}), (1, \{4, 5, 6\}), \dots, (2, \{6\})\}.$$

Ακόμη είναι

$$\mathbb{D}^- = \{(0, \Omega), (1, \{1, 2, 3\}), (1, \{4, 5, 6\})\}.$$

Επιπλέον

$$\mathbb{D}_T = \{(2, \{1\}0), (2, \{2\}), (2, \{3\}), (2, \{4\}), (2, \{5\}), (2, \{6\})\}.$$

Τέλος, $\mathbb{D}(\xi) = \{(1, \{1, 2, 3\}), (2, \{1\}), (2, \{2\}), (2, \{3\})\}$.

Άσκηση 2 Στο παραπάνω στοχαστικό μοντέλο, έστω τα χρηματοοικονομικά συμβόλαια με διανύσματα απόδοσης

$$V^1 = (0, 1, 2, 3, 1, 0, 1, 2, 0), V^2 = (0, 2, 1, 3, 1, 1, 4, 1, 0).$$

Προσδιορίστε διανύσματα τιμών q^1, q^2 ώστε η αγορά αυτών των χρηματοοικονομικών συμβολαίων να μην παρέχει ευκαιρίες arbitrage. Για τις τιμές q^1, q^2 που θα προσδιορίσετε, να βρείτε τον πίνακα αποδόσεων $W(q, V)$ των συμβολαίων.

Λύση

Έστω $\pi \in \mathbb{R}^{\mathbb{D}}$ με $\pi(\xi) = 1$ για κάθε $\xi \in \mathbb{D}$. Τότε $q^1 = (10, 4, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $q^2 = (13, 5, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Ο πίνακας αποδόσεων είναι

$$W(q, V) = \begin{bmatrix} -10 & -13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & -4 & -5 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3 Είναι η παραπάνω αγορά χρηματοοικονομικών συμβολαίων πλήρης; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση

Η προηγούμενη αγορά δεν είναι πλήρης, διότι $\rho(\xi_0) = 2 = b(\xi_0)$, αλλά $\rho(\xi_1) = 2 < b(\xi_1) = 3$, $\rho(\xi_2) = 2 < b(\xi_2) = 3$. $\rho(\xi_0) = \text{rank} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = 2$, $\rho(\xi_1) = \text{rank} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$, $\rho(\xi_2) = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$.

Άσκηση 4 Αν ένας επενδυτής έχει αρχικό διαθέσιμο πλούτο που δίνεται από το διάνυσμα

$$\omega = (1, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{D}}$$

και επενδύει στα συμβόλαια της παραπάνω αγοράς, προσδιορίστε χαρτοφυλάκιο αυτών των συμβολαίων τέτοιο ώστε να επάγει ένα διάνυσμα κατανάλωσης $x \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{D}}$ εισπράττοντας την απόδοση του χαρτοφυλακίου αυτού.

Λύση Έστω το χαρτοφυλάκιο $z = (-\frac{1}{5}, 0, 0, 0, 0, 0)^T$. Η απόδοση του χαρτοφυλακίου αυτού είναι $W(q, V) \cdot z = (2, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$. Άρα το αντίστοιχο διάνυσμα κατανάλωσης είναι $x = \omega + W(q, V) \cdot z = (3, 1, 0, 1, 2, 3, 1, 1, 1)^T$.

Άσκηση 5 Για το διάνυσμα κατανάλωσης που βρήκατε στην προηγούμενη άσκηση, προσδιορίστε την βαθμολόγησή του μέσω της ακόλουθης συνάρτησης ωφελιμότητας:

$$u(x) = \ln[x(\xi_0) + 1] + 0.1 * \ln[x(\xi_1) + 1] + 0.1 * \ln[x(\xi_2) + 1] + 0.01 * \sum_{i=3}^8 \ln[x(\xi_i) + 1],$$

όπου $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_8$ η συνήθης αρίθμηση των κόμβων του \mathbb{D} .

Λύση Η βαθμολόγηση του προηγούμενου διανύσματος κατανάλωσης είναι $u(x) = \ln 4 + \frac{1}{10} \ln 2 + \frac{1}{100} \ln 6$.