Αντασφάλιση

Διδάσκων: Χρήστος Κουντζάκης

28 Απριλίου 2015

1 Εκτίμηση του ES_a και το πρόβλημα του αντασφαλιστή.

Έστω ένα δείγμα παρατηρήσεων από κάποια κατανομή :

$$8, 10, 12, 14, 22, 8, 19, 25, 9, 11, 28, 30, 32.$$

1) Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις:

$$8, 9, 10, 11, 12, 14, 19, 22, 25, 28, 30, 32.$$

2) Προσδιορίζουμε ποιες παρατηρήσεις βρίσκονται στο 'χειρότερο' 5 τοις εκατό, δηλαδή για την ε.ς.κ του δείγματος ισχύει $F_n(X_{(i)}) \leq 0.01$. Δηλαδή στη θέση των $ES_a(X_{i)})$ στην αντικειμενική συνάρτηση των προηγούμενων προβλημάτων ελαχιστοποίησης, βάζουμε το μέσο των ιστορικών παρατηρήσεων κάποιου δείγματος που δεν ξεπερνά το $1-a$. Υπενθυμίζουμε ότι υπό το stop-loss σχήμα αντασφάλισης, η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος του αντασφαλιστή είναι

$$\sum_{i=1}^{n}(1-b_i)ES_a(X_i),$$

και η εκτίμησή της είναι

$$\sum_{i=1}^{n}(1-b_i)\hat{ES}_a(X_i),$$

όπως την περιγράψαμε παραπάνω. Οι περιορισμοί -διακεκριμένες περιπτώσεις αυτού του προβλήματος είναι

1. $\sum_{i=1}^{n}(1-b_i)(1+m_i)P_i = A,$
2. $\sum_{i=1}^{n}(1-b_i)P_i + (1-b_i-\theta_i)m_iP_i = A,$
3. $\sum_{i=1}^{n}(1-b_i)P_i^A + \sum_{i=1}^{n}(1-b_i)m_iP_i^E = A.$

και επιπλέον $b_i \in (0,1)$. Το κεφάλαιο A το βρίσκει η αντασφαλιστική αγορά μέσω επένδυσης σε χρηματοοικονομικά συμβόλαια. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το A είναι για την ακρίβεια το $\mathbb{E}(A)$ ενός *ρεπλιςατεδ ςοντινγεντ ςλαιμ*. Τέλος, όπως είναι αναμενόμενο, μία κατανομή που χρησιμοποιείται πολύ συχνά στην αντασφαλιστική μοντελοποίηση, είναι η Pareto. Η κατανομή αυτή ως γνωστόν έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας :

$$f(x) = \frac{a \cdot x_m^{a+1}}{x^{a+1}}, x \geq x_m.$$

Θα δείξουμε ότι ανήκει και στην κλάση $\mathcal{D}$ και στην κλάση $\mathcal{R}_0$. Ισχύει κατάρχήν $\overline{F}(x) = 1 - \frac{x_m^{a+1}}{x^a}$, δηλαδή

$$\frac{\overline{F}(tx)}{\overline{F}(x)} =$$

2 Surplus αντασφαλιστική σύμβαση

Όπως ένα διάνυσμα $b = (b_1, b_2, ..., b_n, b_i \in (0,1), i = 1, 2, ..., n$ μοντελοποιεί τη δάσπαση του κινδύνου ενός ασφαλιστηρίου συμβολαίου X_i στο τμήμα του $X_i^E = b_i X_i$ που αναλαμβάνει ο πρωτασφαλιστής και στο τμήμα του $X_i^A = (1 - b_i) X_i$ που αναλαμβάνει ο αντασφαλιστής, στην surplus αντασφαλιστική σύμβαση, για κάθε έναν από τους τύπους ασφαλιστηρίων συμβολαίων ενός χαρτοφυλακίου $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$, καθορίζεται ένα μέγιστο επίπεδο αποζημίωσης $x_{i,max}$ που μπορεί να αναλάβει η αντασφαλίστρια εταιρία, καθώς και ένα ύψος αποζημίωσης $x_i < x_{i,max}$ το οποίο καταβάλλει ούτως ή άλλως η πρωτασφαλίστρια εταιρία. Έτσι διαμορφώνεται πάλι ένας λόγος ΄τύπου΄

$$b_i = \frac{x_i}{x_{i,max}},$$

όπως και στο αναλογικό μοντέλο, δηλαδή

$$X^E = \frac{x_i}{x_{i,max}} X_i, X^A = (1 - \frac{x_i}{x_{i,max}}) X_i, i = 1, 2, ..., n.$$

Αν αποδεχτούμε ότι και στην περίπτωση αυτή $X_i \sim Pareto(x_m, a)$, τότε αποεικνύεται ότι $\lambda \cdot X \sim Pareto($

3 Εξςεσσ-Λοσς αντασφαλιστική σύμβαση

Η αντασφαλιστική διαθέτει κεφάλαιο -ή μέσο κεφάλαιο (deductible capital) για να ασφαλίσει- σε ένα πρώτο επίπεδο αντασφάλισης το χαρτοφυλάκιο

$$X = (X_1, X_2, ..., X_n).$$

Εδώ τα b_i υπολογίζονται βάσει του deductible και είναι

$$b_i = \min\{1, \frac{X_i}{A}\}.$$

Έτσι το μερίδιο του πρωτασφαλιστή από το συμβόλαιο i μετά τη σύναψη της σύμβασης είναι $X_i^E = b_i X_i = X_i, X_i \leq A$, και $A, X_i \geq A$.