ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΧΡΗΜΑΤΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Α′ ΕΞΑΜΗΝΟ
5η ενότητα
ΕΠΕΝΔΥΣΕΙΣ

Διδάσκων: Χ. Κουντζάκης

1. Μια **επένδυση** είναι γενικά μια χρηματοροή $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ τέτοια ώστε η πληρωμή $X_{t_j} \in \mathbb{R}$ πραγματοποιείται τη χρονική στιγμή $t_j, j = 1, 2, ..., n$.

2. Η χρηματοροή αυτή στην περίπτωση που αποτελεί τμήμα του οικονομικού προγράμματος ενός ατόμου, ενός νοικοκυριού ή μιας επιχείρησης έχει διαφορετικό νόημα και ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Γι′ αυτό και οι χρηματοροές αυτού του είδους μελετώνται ιδιαίτερα.

3. Η χρηματοροή μιας επένδυσης αποτελεί το άμεσο χαρακτηριστκό της, διότι δείχνει την χρονική εξέλιξη της αξιοποίησης του κεφαλαίου -των διαθέσιμων ποσών χρήματος που διατίθενται για έναν συγκεκριμένο σκοπό. Οι επενδύσεις διακρίνονται σε **παραγωγικές** όταν το οικονομικό πρόγραμμα αποσκοπεί στην παραγωγή αγαθών και υπηρεσιών και σε **μη παραγωγικές** όταν δε μεσολαβεί κάποια παραγωγή αγαθού ή υπηρεσίας και απλά υπάρχει αξιοποίηση των χρημάτων για αύξηση του ατομικού ή του συλλογικού εισοδήματος.

4. Ένα γενικό κριτήριο σύγκρισης επενδύσεων είναι η παρούσα αξία. Αν μας δοθεί ένας τραπεζικός λογαριασμός -δηλαδή ένα μέτρο σύγκρισης της χρονικής αξίας του χρήματος, τότε μπορούμε απευθείας να αποφανθούμε σε κάθε περίπτωση αν έχουμε δύο επενδύσεις $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ και $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_m)$ τέτοια ώστε η πληρωμή $Y_{t_k} \in \mathbb{R}$ πραγματοποιείται τη χρονική στιγμή $t_k, k = 1, 2, ..., m$, σχετικά με τη σχέση $PV(X), PV(Y)$, ανεξάρτητα από τα m, n.

5. Η παρούσα αξία είναι ολικό κριτήριο σύγκρισης επενδύσεων-χρηματοροών. Δηλαδή αν μας δώσουν δύο επενδύσεις πάντοτε μπορούμε να αποφανθούμε ποια από τις δύο είναι προτιμότερη από την άλλη.

6. Ένα άλλο κριτήριο αν $m = n$ είναι η **μερική διάταξη**. Δηλαδή $X \succeq Y \iff X \geq Y$ όπου $X \geq Y$ σημαίνει ότι $X(t_i) \geq Y(t_i), i = 1, 2, ..., n$.

7. Η μερική διάταξη -όπως το λέει και η ίδια η λέξη- δεν συγκρίνει όλες τις χρηματοροές -επενδύσεις μεταξύ τους. Δηλαδή υπάρχουν επενδύσεις για τις οποίες δεν μπορούμε βάσει αυτού του κριτηρίου να αποφανθούμε ποια από τις δύο είναι προτιμότερη από την άλλη.

8. Στην ίδια περίπτωση άλλο κριτήριο σύγκρισης επενδύσεων είναι η **απόδοση** (return). Δηλαδή $X \succeq Y \iff X' \geq Y'$ σημαίνει ότι $X'(t_i) = \frac{X(t_{i+1})-X(t_i)}{X(t_i)} \geq Y'(t_i) = \frac{Y(t_{i+1})-Y(t_i)}{Y(t_i)}, i = 1, 2, ..., n-1$.

9. Παραδείγματα σύγκρισης επενδύσεων βάσει των χρηματοροών τους. Έστω $X = (2, 3, 4, 5), Y = (1, 1, 1, 4)$. Είναι $X \geq Y$ βάσει της μερικής διάταξης, δηλαδή σε κάθε χρονική στιγμή πληρωμής η X έχει μεγαλύτερη απόδοση από την U.

10. Για τις ίδιες επενδύσεις αν πάρουμε τα διανύσματα απόδοσης X', Y' αυτά θα είναι $X' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4})$, $Y' = (0, 0, 3)$. Τα δύο αυτά διανύσματα δεν συγκρίνονται μεταξύ τους, δηλαδή δεν ισχύει ότι κάθε συντεταγμένη του ενός είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη συντεταγμένη του άλλου.

11. Και πάλι το κριτήριο της απόδοσης δεν συγκρίνει όλες τις επενδύσεις γιατί εμπλέκεται η μερική διάταξη. Η σύγκριση των αποδόσεων μπορεί να σταματά σε κάποια χρονική περίοδο. Για παράδειγμα μπορεί να συγκρίνουμε τις επενδύσεις βάσει των αποδόσεών τους βάσει και της περιόδου $i = 2$ και να μη μας ενδιαφέρει η απόδοση επί της πληρωμής της περιόδου που αναφέρεται στην περίοδο $i = 3$ στο προηγούμενο παράδειγμα. Έτσι η πρώτη και η δεύτερη συντεταγμένη των διανυσμάτων X', Y' που μας ενδιαφέρουν συγκρίνονται με τον ίδιο τρόπο ($\frac{1}{2} > 0, \frac{1}{3} > 0$) αλλά η τρίτη συντεταγμένη δε μας ενδιαφέρει, οπότε μπορούμε να πούμε ότι η X προτιμάται σε σχέση με την Y βάσει του κριτηρίου της απόδοσης μέχρι και τη χρονική στιγμή $i = 2$.

12. Για να καταλάβουμε την έννοια της απόδοσης ας πάρουμε την $X=(2,3,4,5)$ και το διάνυσμα αποδόσεων $X'=(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4})$. Το 2 για να μεταβληθεί σε 3 τη δεύτερη περίοδο απαιτεί μεταβολή ίση με το $\frac{1}{2}$ του 2 δηλαδή 1, το 3 για να γίνει 4 τη χρονική περίοδο 3 απαιτεί μεταβολή ίση με το $\frac{1}{3}$ του 3 δηλαδή πάλι 1 και τέλος το 4 για να γίνει 5 πάλι απαιτεί μεταβολή ίση με το $\frac{1}{4}$ του 4 δηλαδή 1.

13. Αν θεωρήσουμε το σύνολο των επενδύσεων που είναι απλής μορφής, δηλαδή ένα σύνολο θετικών πληρωμών ακολουθείται από ένα σύνολο αρνητικών πληρωμών, τότε έχουμε την εξής.

14. **Πρόταση.** Για κάθε χρηματοροή απλής μορφής, υπάρχει μοναδικό επιτόκιο i τέτοιο ώστε η συνολική παρούσα αξία της να είναι ίση με μηδέν.

15. Απόδειξη. Αν υποθέσουμε ότι $X_0,X_1,X_2,...,X_k<0,X_{k+1},...,X_n>0$ χωρίς βλάβη της γενικότητας (αν υπάρχουν μηδενικές πληρωμές παραλείπονται). Υπολογίζουμε τη συνολική παρούσα αξία και έχουμε

$$npv(i)=\frac{1}{(1+i)^n}[\sum_{m=0}^{k}X_m(1+i)^{n-m}+\sum_{m=k+1}^{n}X_m(1+i)^{n-m}].$$

Γράφω την παρούσα αξία στη μορφή

$$npv(v)=v^n[\sum_{m=0}^{k}X_m\frac{1}{v^{n-m}}+\sum_{m=k+1}^{n}X_m\frac{1}{v^{n-m}}],$$

όπου $v=\frac{1}{1+i}$. Το επιτόκιο εμφανίζεται εδώ με τη γενικευμένη έννοια, ενός 'ποσοστού απόδοσης' της επένδυσης κατά μήκος των χρονικών περιόδων, γιαύτό επιτρέπεται προς στιγμήν να πάρει και αρνητικές τιμές, αφού όταν $i\to -1^+$, αυτό είναι ισοδύναμο με $\frac{1}{1+i}=v\to +\infty$ και αν $i\to +\infty$ τότε $\frac{1}{1+i}=v\to 0^+$. Εφ' όσον

$$\lim_{v\to 0^+}npv(v)=X_0<0,$$

και επιπλέον

$$\lim_{v\to +\infty}npv(v)=\lim_{v\to +\infty}X_nv^n=+\infty,$$

άρα από θεώρημα Bolzano έπεται το συμπέρασμα για την ύπαρξη μίας τουλάχιστον ρίζας $v_0\in(0,+\infty)$. Για τη μοναδικότητα της ρίζας, αν υπήρχαν δύο ρίζες θα υπήρχαν δύο v_1,v_2 με $npv(v_1)=npv(v_2)=0$. Άρα κάθε για τέτοιου τύπου επένδυση ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle. Επομένως για κάθε τέτοιο πολυώνυμο

$$npv(v)=v^n[\sum_{m=0}^{k}X_m\frac{1}{v^{n-m}}+\sum_{m=k+1}^{n}X_m\frac{1}{v^{n-m}}]=\sum_{m=0}^{k}X_mv^m,$$

πρέπει να ισχύει ότι η παράγωγός του έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,+\infty)$.

16. Αυτό όμως δεν ισχύει για κάθε τέτοια χρηματοροή. Για παράδειγμα πάρτε τη χρηματοροή $(-1,4,0,\frac{2}{3},0,\frac{1}{5})$ που ικανοποιεί τις προϋποθέσεις της Πρότασης. Αν υποθέσουμε ότι έχει δύο ρίζες στο $(0,\infty)$ ως προς v, τότε η παράγωγος του πολυωνύμου $-1+4v+\frac{2}{3}v^3+\frac{1}{5}v^5$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,\infty)$. Η παράγωγος είναι $(v^2+1)(v^2+4)$. Η συνάρτηση αυτή δε μηδενίζεται στο διάστημα αυτό. Άρα δεν ισχύει ότι υπάρχουν περισσότερες από δύο ρίζες για κάθε τέτοια χρηματοροή. Υπάρχει επομένως ακριβώς μία.

17. Το επιτόκιο μηδενισμού (και εδώ μας ενδιαφέρουν οι λύσεις -αν υπάρχουν- στο διάστημα $(0,1)$ για το i που να αντιστοιχούν στη ρίζα της $npv(X,v)$) ονομάζεται Internal Rate of Return (Εσωτερική Απόδοση της Επένδυσης).

18. Το IRR σχετίζεται με την αποπληρωμή -απόσβεση μιας αρχικής δαπάνης από τις μελλοντικές πληρωμές της επένδυσης. Είναι το ονομαστικό επιτόκιο που επιτρέπει την απόσβεση της αρχικής δαπάνης της επένδυσης μέσω των μελλοντικών της εισπράξεων.

19. Δηλαδή, αν ο επενδυτής δαπανά σήμερα ένα κεφάλαιο M και εισπράττει τις πληρωμές $X_1,X_2,...,X_n$ από την επένδυση του αρχικού του κεφαλαίου M, η εξίσωση απόσβεσης του αρχικού κεφαλαίου είναι

$$M=\sum_{k=1}^{n}X_k\frac{1}{(1+IRR)^k}.$$

20. Διαφορετικά αν οι πληρωμές είναι ισόποσες, η αντίστοιχη εξίσωση απόσβεσης είναι

$$M = Ca(n, IRR),$$

όπου C η ετήσια πληρωμή της επένδυσης.

21. Ο ορισμός του IRR σχετίζεται με την απόσβεση της αρχικής δαπάνης, ή αν έχουμε μια απλή επένδυση στην οποία μια σειρά δαπανών ακολουθείται από μια σειρά καθαρών πληρωμών, το IRR εκφράζει το επιτόκιο που καθιστά ισοδύναμες οικονομικά τις δαπάνες και τις εισπράξεις.

22. Γενικότερα προκύπτει η εξίσωση $\frac{M}{C}IRR = 1-(\frac{1}{(1+IRR)^n})$. Η συνάρτηση $g(x) = \frac{M}{C}x$ είναι γνησίως αύξουσα και η $1-(\frac{1}{(1+x)^n})$ είναι γνησίως αύξουσα επίσης για θετικές τιμές του x. Άρα μπορούμε να δείξουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους τέμνονται σε μοναδικό σημείο. Αυτό θα είναι και το IRR.

23. Παραδείγματα υπολογισμού του IRR. Αν σε μια επένδυση δαπανώνται 1000 ευρώ και οι πληρωμές της είναι 100 ευρώ και έχουν διάρκεια 5 έτη ποιο είναι το IRR ; Απάντηση. Είναι $100 = 30a(5, IRR)$. Δηλαδή $\frac{10}{3} = a(5, IRR)$. Από την εξίσωση αυτή προκύπτει ότι

$$\frac{10}{3}IRR = 1 - \frac{1}{(1+IRR)^5}.$$

Για να βρούμε τη μοναδική λύση, είτε ακολουθούμε τη μέθοδο της διχοτόμησης ή χρησιμοποιούμε ένα μαθηματικό πακέτο πχ MATHEMATICA.

24. Για να μην αναλωνόμαστε σε πράξεις που σχετίζονται με τη μελέτη συναρτήσεων, μπορούμε επίσης να χρησιμοποιούμε τους πίνακες που έχουν τα βιβλία για τις ράντες. Π.χ. στην περίπτωση του προηγούμενου παραδείγματος, πηγαίνουμε στη στήλη διάρκειας $n = 5$ του πίνακα $a(n, i)$ και ψάχνουμε ποιο νούμερο της στήλης είναι πιο κοντά στο $\frac{10}{3}$. Έπειτα παρατηρούμε στο αριστερό μέρος σε πιο επιτόκιο αντιστοιχεί. Παρατηρούμε ότι $IRR \cong 0.15$. (Πρόκειται για τους πίνακες στις σελίδες 128-131 του βιβλίου του Ε.Μαγείρου. Ανάλογοι πίνακες υπάρχουν για διευκόλυνση σε όλα τα βιβλία χρηματοοικονομικής).