Μάθημα: Εφαρμοσμένη Ανάλυση

15-10-13.

Βιβλία: Πολυχρόνης - Πραγματική Ανάλυση
Απειροστικός Λογ. Ι - Νεγρεπόντης
Αφελής Συνολοθεωρία (Naive Set Theory)
Actional Analysis for Stohastic
Principils for real Analysis - Belgusau
Alibrandi

www.liebgeu.net

Σύνολο: Μια συλλογή αντικειμένων που έχουν μια κοινή ιδιότητα.

Αξίωμα 1: A=B (Δύο σύνολα είναι ίσα όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία).

(* Για τις συλλογές αντικειμένων που δεν έχουν κοινή ιδιότητα ονομάζονται κατηγορίες)

(** Το σύνολο όλων των συνόλων είναι σύνολο, τότε δεν αποφεύγουμε το παράδοξο του Russel δηλ. $A=\{x/x\notin X\}$, $A\in A$, $A\notin A$).

$A=\{x/x\notin x\}=B$, οποιοδήποτε και αν είναι το A το B δεν περιέχεται στο A, έστω

$c\in A \Rightarrow c\notin C$
$c\notin A \Rightarrow c\in C$

Αξίωμα 2: Για κάθε προτασιακό τύπο $S(x)$ που αναφέρεται στα στοιχεία ενός συνόλου A, υπάρχει ένα σύνολο B τω $A=\{x\in A/S(x)\}=B$

$(\{x\in A/S(x)\}=B$

$B\in B \Leftrightarrow B\in A$ και $B\notin B$

$B\notin B \Leftrightarrow B\in A$ και $B\in B$, οποιοδήποτε και αν είναι το A μέσω του οποίου ορίζεται το B βρήκαμε ένα σύνολο A που δεν περιέχει το B, άρα υπάρχει σύνολο που δεν περιέχει κάποια άλλο σύνολο.

Αξίωμα 3: Υπάρχει τουλάχιστον ένα σύνολο, το $\phi (=0)$

Αξίωμα 4: Τα ζεύγη συνόλων είναι σύνολα, $\{a, b\} \{b, a\}$
$\{\phi\} (=1)$

Αξίωμα 5: Η ένωση μιας γενικότερης συλλογής συνόλων είναι σύνολο $\bigcup_{i \in I} C_i$

Αξίωμα 6: Για κάθε σύνολο υπάρχει μια συλλογή συνόλων που περιέχει όλα τα υποσύνολα του δοθέντος συνόλου (Δυναμοσύνολο) $\underline{P(A)}$ A

Αξίωμα 7: Ορίζονται τα ζεύγη, αλλά και τα διατεταγμένα ζεύγος το οποίο είναι σύνολο.
$\{\{a\}, \{a, b\}\} = (a, b)$

Αξίωμα 8: Το καρτεσιανό γινόμενο δύο ή πεπερασμένου πλήθους συνόλων είναι σύνολο., $\prod_{i=1}^{n} a_i$, $n \in \mathbb{N}$

** Αξίωμα 9: (Αξίωμα της Επιλογής): Αν έχουμε μια οποιαδήποτε οικογένεια μη-κενών συνόλων $(A_i)_{i \in I}$, $A_i \neq \phi$
$\Rightarrow \prod_{i \in I} A_i \neq \phi$ ($\prod_{i \in I} A_i$ = καρτεσιανό γινόμενο).

Ισοδύναμο με το Αξίωμα της Επιλογής είναι το Λήμμα του Zorn

Λήμμα του Zorn: Έστω $(X, \leq)$ μη-κενό μερικά διατεταγμένο σύνολο. Αν κάθε αλυσίδα στο X έχει άνω φράγμα, τότε το X έχει μεγιστικό στοιχείο (ως προς $\leq$)

- Μερική διάταξη σ'ένα σύνολο είναι μια διμελής σχέση ανακλαστική και μεταβατική.
$(x \leq x$, $x \in X$, $x \leq y$, $y \leq z \Rightarrow x \leq z$, $x, y, z)$

• Αλυσίδα ονομάζουμε κάθε ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του X, δηλ. αν έχουμε $(a_i)_{i\in I}\subseteq X$, ονομάζεται αλυσίδα αν μπορούμε να διατάξουμε ολικά τα στοιχεία του με βάση τη σχέση διάταξης "$\leq$".

Μεγιστικό στοιχείο $m\in X$, τω αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x\in X$ το οποίο είναι μεγαλύτερο απ' το m,

$$m\leq x \Rightarrow x=m.$$

Έννοια Ισοδύναμων Συνόλων

Δύο σύνολα A, B ονομάζονται ισοδύναμα και το συμβολίζουμε μ' αυτό τον τρόπο, $A\approx B$ ανν υπάρχει απεικόνιση $f: A\to B$, η οποία είναι "1-1" και επί.

θ.δ.ο. $\approx$: σχέση ισοδυναμίας, δηλ. ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

(i) $A\approx A$, $f: A\to A$ "1-1" κ' επί
$f=id_A$

(ii) $A\approx B$, $B\approx A$, $f: A\to B$ 1-1 κ' επί
$f^{-1}: B\to A$ "1-1" κ' επί.

(iii) $A\approx B$, $B\approx C$, $f: A\to B$ 1-1 κ' επί, $g: B\to C$ "1-1" κ' επί
Άρα, $g\circ f$ υλοποιεί την ισοδυναμία.
$g\circ f: A\to C$, "1-1" κ' επί

Διαμερίζει την πρώτη θεμελιώδη κλάση σε κλάσεις ισοδυναμίας.

Οι κλάσεις ισοδυναμίας με τη σχέση ισοδυναμίας $\approx$ λέγονται πληθάριθμοι.

i) $\mathbb{N}$: ο μηχανισμός δημιουργίας του συνόλου των φυσικών αριθμών είναι ο εξής: $\forall n\in\mathbb{N}$, δηλ. $\exists x$ τω να προσθέτουμε τον αριθμό 1.

$x = x\cup\{x\}$

$\phi\cup\{\phi\}=\{\phi\}$. $2=1=\{\phi\}\cup\{\{\phi\}\}=\{\phi,\{\phi\}\}$

Ένα σύνολο αριθμών είναι σύνολο, συνόλου, συνόλου, δηλ. δεύτερη θεμελιώδη κλάση. (Συμφωνία: $\mathbb{N}$: "ένα απλό σύνολο")

$n \in \mathbb{N}: T_n = \{1, 2, \ldots, n\}$

<u>Ορισμός</u>: Ένα σύνολο A ονομάζεται πεπερασμένο αν είναι ισοδύναμο μ' ένα τμήμα των φυσικών αριθμών

$$A \approx T_n,\ n \in \mathbb{N}$$

<u>Ορισμός</u>: Αν για κάποιο σύνολο A δεν υπάρχει ή του οποίου το αντίστοιχο τμήμα των φυσικών αριθμών δεν είναι ισοδύναμο με το A, τότε το A είναι άπειρο.

<u>Ορισμός</u>: Αν για ένα σύνολο $A \simeq \mathbb{N}$ τότε ονομάζεται αριθμήσιμο.

<u>Ορισμός</u>: Αν για κάποιο άπειρο σύνολο A ισχύει ότι το A δεν είναι ισοδύναμο με το $\mathbb{N}$ ($A \not\approx \mathbb{N}$) τότε το A ονομάζεται υπεραριθμήσιμο.

<u>Παραδείγματα</u>: αριθμήσιμων συνόλων

i) $\mathbb{Z}$

ii) $\mathbb{Q}$

iii) $\mathbb{N}^n$, $n \in \mathbb{N}$

iv) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ αριθμήσιμα

$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ αριθμήσιμο.

22-10-13

Σύγκριση αριθμών, δηλ. σύγκριση κλάσεων ισοδυναμίας στις οποίες διαμερίζει την $2^{\underline{\eta}}$ θεμελιώδης κλάση $\Omega_1/\approx$.

(Επειδή ένας αριθμός είναι σύνολο, συνόλου, συνόλου)

Όταν έχουμε δύο αριθμούς α, β και θέλουμε να τους συγκρίνουμε δηλ. (συγκρίνουμε δύο οποιαδήποτε σύνολα).

$$\alpha \lesssim \beta \Longleftrightarrow \underline{A \lesssim B}, \text{ τ.ω}$$

$$\alpha = C_A, \quad \beta = C_B.$$

C_A: κλάση ισοδυναμίας του συνόλου A

C_B: κλάση ισοδυναμίας του συνόλου B.

$A \lesssim B$ (Το A είναι τουλ. ισοδύναμο με το B ανν $\exists f: A \to B$ "1-1" $\Longleftrightarrow$ (δηλ υπάρχει $D \subseteq B$ τ.ω $A \simeq D$).

$$\downarrow$$

$$\left(f_1 : A \to D \text{ "1-1" εξ' επί} \right).$$

Η διμελής σχέση τουλάχιστον ισοδύναμο μεταξύ των συνόλων ικανοποιεί κάποιες ιδιότητες

<u>Ιδιότητες της $\lesssim$</u> (: σχέση τουλ. ισοδύναμο)

i) $A \lesssim A$ (ανακλαστική)

ii) $A \lesssim B$ και $B \lesssim C$ τότε $A \lesssim C$ (μεταβατική)

iii) $A \lesssim B$, $B \lesssim A$ τότε $A \simeq A$ (αντισυμμετρική)

Κατασκευάσαμε μια μερική διάταξη στους πληθάριθμους. Οι κλάσεις ισοδυναμίας C_A, $\underline{\mathcal{O}_1 / \simeq}$, δηλ. ένας αριθμός $\alpha \lesssim \beta$ ανν, το σύνολο που δημιουργεί την κλάση του συγκεκριμένου αριθμού - πληθάριθμο,

$$A \lesssim B.$$

<u>Ερώτημα</u>: Αν έχουμε έναν αριθμό α πώς μπορούμε να δημιουργήσουμε έναν αριθμό μεγαλύτερο απ' το α, έστω β, αλλά να ισχύει, $\alpha \not\simeq \beta$;

$(x^+ = x \cup \{x\}$, ο επόμενος του x$)$.

Για να κατασκευάσουμε το $0^+ = 1 = 0 \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$

$\omega = \mathbb{N}$ (πληθάριθμος των φυσικών αριθμών).

$\omega+1$, 2ω, $n\omega$, ω^2, ω^n, ω^ω.
επόμενος
του ω

$\omega^\omega = \mathbb{R}$ (πληθάριθμος του συνεχούς)

Σχόλιο:
Ο ω^ω είναι ο πρώτος υπεραριθμήσιμος αριθμός.
Ένας άλλος μηχανισμός για να "μεγαλώνουμε" τους αριθμούς είναι για κάθε σύνολο να παίρνουμε το δυναμοσύνολό του.

Θεώρημα Cantor: Αν A σύνολο τότε $A \lesssim P(A)$, (το πολύ ίσο ισοδύναμο με το δυναμοσύνολό του) αλλά $A \not\approx P(A)$ (δεν είναι ισοδύναμο με το δυναμοσύνολό του).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:
Αν $A=\emptyset$, τότε $\emptyset \lesssim \{\emptyset\}$ και $\emptyset \not\approx \{\emptyset\}$.
Αν $A\neq\emptyset$, τότε $A \lesssim P(A)$
διότι αν πάρουμε:
$f: x \longmapsto \{x\}$ (1-1)
$x\in A$
Έστω $A \approx P(A)$ τότε $g: A \to P(A)$ "1-1" και επί και θεωρώ
$B=\{x\in A \mid x\notin g(x)\}$ ($B\subseteq A$)
$a\in B$ ανν $a\notin B$ άτοπο (από παράδοξο του Russel)
Άρα, $A \not\approx P(A)$

- Αν $a\lesssim\beta$ και $a\not\approx\beta \iff a<\beta$
$\forall a < 2^{\alpha}=\beta$ (όπου είναι ο πληθάριθμος του δυναμοσυνόλου)
($n\in\mathbb{N}$, το πλήθος των υποσυνόλων του είναι το 2^n)

#2. Αν θεωρήσουμε ότι το $0=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ είναι μεγαλύτερο από κάθε όρο της $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$; Ποιος ο αριθμός του $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}\cup\{0\}$-?

#3. Αν X,Y σύνολα, νδο $P(X)\cup P(Y)\subseteq P(X\cup Y)$

#4. $P(X\cap Y)=P(X)\cap P(Y)$

#5. Αν $f: X\to\mathbb{R}$, νδο η σχέση

$$x_1 \underset{f}{\sim} x_2 \iff f(x_1)=f(x_2)$$

είναι σχέση ισοδυναμίας.

#6. Ποιες οι κλάσεις ισοδυναμίας της $\underset{f}{\sim}$?

#7. Αν ληφθεί ως υπόθεση η Α.Μ.Ε ν.δειχθεί η Α.Κ.Δ για το $\mathbb{N}$.

29-10-13.

Δύο τρόποι για να συγκρίνουμε δύο σύνολα είναι: οι πληθάριθμοι και οι διατακτικοί αριθμοί.

Ο πιο συνήθες τρόπος για να "μεγαλώσουμε" ένα σύνολο είναι να πάρουμε το δυναμοσύνολό του ($\alpha<2^{\alpha}$)

Όσον αφορά τους διατακτικούς αριθμούς:

$$\beta<\beta+1$$

(Διαφορετικοί τρόποι σύγκρισης).

Αν πάρουμε ως $\beta<\beta+1$ για μια επαρκώς μεγάλη κλάση διατακτικών.

Έστω $\beta=\omega$ (ω: πληθάριθμος των φυσικών)

Αν προσθέσουμε ένα στοιχείο που είναι μετά απ'όλα τα στοιχεία των φυσικών (π.χ $\sqrt{2}$) και φτιάχνου-

©NEXT Co GREECE

με του διατακτικό $\omega+1$.
Δηλ. $\omega <_\ell \omega+1$ (λεξικογραφική διάταξη)
Όμως, απ' την πλευρά των πληθαρίθμων του είναι ίσο με το $\omega+1$.
Λεξικογραφική διάταξη (στο καρτεσιανό γινόμενο $A\times A$).
$(A, \precsim)$ $\quad (\alpha,\beta) \precsim_\ell (\gamma,\delta) \iff$

$$\alpha <_\ell \gamma \text{ ή } \alpha \approx_\ell \gamma \text{ και}$$

$$\beta <_\ell \delta$$

$\nexists\, \beta : \omega < \beta < 2^\omega$ (Υπόθεση του συνεχούς)

Για κάθε άπειρο πληθ. $\nexists\, \gamma : \alpha < \gamma < 2^\alpha$ (Γεν. Υπόθεση του συνεχούς)

(Το 2^ω είναι το συνεχές).

<u>Θεώρημα</u>: $2^\omega \approx \mathbb{R}$

<u>Λήμμα 1</u>: Κάθε $x\in(0,1)$ έχει μοναδικό δυαδικό ανάπτυγμα (*)

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n},\ x_n\in\{0,1\},\ n\in\mathbb{N}$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> (Θεωρήματος):
<u>ΒΗΜΑ 1</u>: (Λήμμα 1).
<u>ΒΗΜΑ 2</u>: Έστω $f:(0,1)\to\{0,1\}$ με $f(x)=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ "1-1"
<u>ΒΗΜΑ 3</u>: Έστω $g: 2^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ "επί και 1-1"

$A\subseteq\mathbb{N}$, $\quad x_n(A) = \begin{cases} 0, & n\notin A \\ 1, & n\in A \end{cases}$

$$g(A)(n) = \begin{cases} 0, & n \notin A \\ 1, & n \in A, \end{cases}$$ "επί"

ΒΗΜΑ 4: $f^{-1} \circ g : 2^{\mathbb{N}} \to (0,1)$ επί

$(0,1) \lesssim 2^{\mathbb{N}}$

ΒΗΜΑ 5: $(0,1) \simeq \mathbb{R} \Rightarrow (0,1) \simeq (-1,1) \simeq \mathbb{R}$

$f : (0,1) \to (-1,1)$, "1-1 & επί"

$f(x) = -2x+1$

$g : (-1,1) \to \mathbb{R}$, "1-1" & επί

$g(x) = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{2} x$

$g \circ f : (0,1) \to \mathbb{R}$

ΒΗΜΑ 6: $|f(x)| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x}{x+1}\right| < 1$

$\mathbb{R} \lesssim 2^{\mathbb{N}}$

$f : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{N}}$

$f(x) = \{a_n \in \mathbb{N} \,/\, x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} + \sum_{n=1}^{k_n} a_n 10^n\}$

(Ο 2^{ω}: δεν είναι αριθμήσιμος αλλά είναι υπεραριθμήσιμος).

Θεώρημα: Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}_0$ $\qquad \mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$f(m,n) = \frac{m}{n}$

Το $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$ το $\mathbb{R}$ είναι ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο:

2^{ω}: είναι ο πληθικός αριθμός του $\mathbb{R}$

είναι ο πρώτος υπεραριθμήσιμος αριθμός.

Αν αφαιρέσουμε από έναν υπεραριθμήσιμο σύνολο ένα αριθμήσιμο παραμένει υπεραριθμήσιμο.

Σύμφωνα με τη λεξικογραφική διάταξη από το 2^{ω} δημιουργείται το ω^{ω}.

<u>Ακολουθίες Πραγματικών Αριθμών</u>

Έστω $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ορίζουν το εξής σύνολο

$$\Sigma(a)=\{\beta\in\mathbb{R} \mid \forall\varepsilon>0 \quad (\beta-\varepsilon,\beta+\varepsilon)\cap\{a_n\}\}$$

να'ναι άπειρο και τα $\{a_n\}\cap[\beta+\varepsilon,+\infty)$

$\{a_n\}\cap(-\infty,\beta-\varepsilon]$ πεπερασμένα.

5-11-13

$\Sigma(a)$, $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

<u>Θεώρημα:</u> $\Sigma(A)=\{a\}$ αν $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ:</u> $(\Leftarrow)$ Αν $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, τότε έστω $\varepsilon>0$. Γι'αυτό το $\varepsilon>0$ $\exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τ.ω $|a_n-a|<\varepsilon$, $n\geq n_0(\varepsilon)$.

δηλ. σημαίνει ότι επειδή $T_{n_0}(\varepsilon)$: άπειρο σύνολο το σύνολο $\{n\in\mathbb{N} : -\varepsilon+a, a+\varepsilon)\cap\{a_n\}\}$ είναι άπειρο και τα σύνολα που βρίσκονται έξω από τη περιοχή $a-\varepsilon, a+\varepsilon$ είναι πεπερασμένα άρα $a\in\Sigma(A)$

$$I_m=\{n\in\mathbb{N} \mid n\geq m\},\quad m\in\mathbb{N}$$

$(\Longrightarrow)$ Θδο αν $\Sigma(A)=\{a_n\}$. Τότε $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$

Εφόσον η ακολουθία συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό από τη $(\Leftarrow)$: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\beta\in\Sigma(a)$

Άρα, $\beta=a$.

Ορισμός: Ακολουθία Cauchy ή Βασική ακολουθία ονομάζεται μία ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0(\varepsilon) : \forall m, n \geq n_0^{(\varepsilon)}$$

ισχύει:

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Πρόταση: Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$\left.\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \ |a_n - a| < \varepsilon/2, \ \forall n \geq n_0^{(\varepsilon)} \\ &|a_m - a| < \varepsilon/2, \ \forall n \geq n_0^{(\varepsilon)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon, \ \forall m, n \geq n_0^{(\varepsilon)}.$$

Πρόταση: Κάθε Cauchy ακολουθία είναι φραγμένη

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0^{(\varepsilon)}$$

$$n = 1, \ldots, n_0^{(\varepsilon)} - 1$$

$$|a_n| \leq M_1 = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0^{(\varepsilon)}-1}|\}.$$

$$|a_m| < |a_{n_0}| + \varepsilon$$

Η υπακολουθία $\{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ μιας ακολουθίας $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ ονομάζεται κάθε ακολουθία $\{\beta_n\}$ της οποίας οι όροι ορίζονται ως εξής:

$$\beta_n = \alpha_{f(n)} \ \text{με}$$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, συνάρτηση επί και γν. αύξουσα.

Ορισμός: Σημείο Κορυφής μιας ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται ένας όρος a_k αυτής τ.ω $a_k \geq a_m$ $\forall m \geq k$.

Θεώρημα: Μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει μονότονη υπακολουθία.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: (i) Τα σημεία κορυφής της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι άπειρα. Τότε έστω a_{k_1} ένα τέτοιο σημείο. Για τους δείκτες $m > k_1$, ο a_m δεν είναι σ.κ (σε σχέση με το k_1). Άρα, μπορώ να υποθέσω ότι για το επόμενο σ.κ.

$$a_{k_1} > a_{k_2} > \dots > a_{k_3} > \dots$$

δηλ. μια φθίνουσα ακολουθία.

(ii) Τα σημεία κορυφής της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι πεπερασμένα.

Έστω $\{k_1, k_2, \dots, k_\ell\}$ οι δείκτες των σημείων κορυφής σε αύξουσα σειρά. Ο $a_{k_{\ell+1}}$ δεν είναι σ.κ της ακολουθίας υπάρχει επομένως a_{k_2} με

$k_2 > k_{\ell+1}$ τ.ω $a_{k_2} > a_{k_{\ell+1}}$, τότε:

$k_3 > k_2 > k_{\ell+1}$ τ.ω

$$a_{k_3} > a_{k_2} > a_{k_{\ell+1}}.$$

δηλ. μια αύξουσα ακολουθία.

Θεώρημα: ~~(Bolzano-Weierstrass)~~

~~Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.~~

~~ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει μονότονη υπακολουθία. Ακριβώς, αυτή η ακολουθία συγκλίνει ως φραγμένη.~~

Θεώρημα: Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: i) Αν είναι αύξουσα $|a_n - a| = a - a_n \leq a - a_{n_0} < \varepsilon$.

$a = \sup a_n$

$a - \varepsilon < a_{n_0} \quad , n \geq n_0^{(\varepsilon)}$

ii) Παρόμοια και για φθίνουσα

Θεώρημα: (Bolzano-Weierstrass):

Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υπακολουθία.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει μονότονη υπακολουθία. Ακριβώς αυτή η ακολουθία συγκλίνει ως φραγμένη.

Θεώρημα: Κάθε βασική ακολουθία συγκλίνει

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Βασ $\Rightarrow$ Φραγμ $\Rightarrow$ Μονότονη υπακολ.

$(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow$ Συγκλίνουσα.

$a_{k_n} \to a$

$|a_n - a_m| < \varepsilon/2, \quad n \geq n_1^{(\varepsilon)}$

$|a_{k_n} - a| < \varepsilon/2, \quad n \geq n_2^{(\varepsilon)}$

$n_0^{(\varepsilon)} = \max\{n_1^{(\varepsilon)}, n_2^{(\varepsilon)}\}$.

$k_n = n_0$

$$\left.\begin{array}{l} |a - a_{n_0}| < \varepsilon/2 \\ |a_n - a_{n_0}| < \varepsilon/2 \end{array}\right\} \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0^{(\varepsilon)}.$$

$f : I \to \mathbb{N}$

Άσκ: Έστω $\Sigma(A) \neq \emptyset$ $\forall a \in \Sigma(A)$, $A = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τότε υπάρχει $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ τ.ω $a_{k_n} \to a$.

(Υπόδ: Χρησιμοποιείστε κατάλληλα εκ

σύγκλιση της $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.

12-11-13

<u>Διευκρίνιση</u>: <u>Θεώρημα</u>: Μια (a_n) έχει μονότονη υπακολουθία στο $\mathbb{R}$ η $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ έχει άπειρα σημεία κορυφής.

Απ'τη στιγμή που είναι άπειρα τα σ.κ θεωρούμε το σύνολο $K=\{k\in\mathbb{N}: a_k$ είναι σ.κ της $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\}$

Αφού το $K\subseteq\mathbb{N}$ και K άπειρα (εξ' υποθέσεως) τότε $K\approx\mathbb{N}$, Επομένως, υπάρχει

$k: K\to\mathbb{N}$ "1-1" και επί

Γι'αυτό μπορώ να γράψω τους δείκτες των (σ.κ) ως εξής:

$k_1<k_2<\ldots<k_n<k_{n+1}$ όπου $k_i=k(i)$

(όπου k_i η τιμή του k στο i)

Μπορούμε να πάρουμε την αντίστροφη αφού είναι 1-1 κ' επί: $k:\mathbb{N}\to K$

Αφού k_1 είναι σ.κ τότε $a_k\leq a_{k_1}$, $\forall k\geq k_1$

Υπάρχει τουλάχιστον ένα $k_2'>k_1=k_1'$

τ.ω (ως ένα αρχ. δείκτη της ακολ. που θέλουμε να φτιάξ.)

$a_{k_2'}<a_{k_1}=a_{k_1'}$

(αυτό γιατί αν υποθέσω την ύπαρξη του k_2 εξασφαλίζεται απ'την ύπαρξη απείρων σ.κ)

Το k_2' εξασφαλίζεται απ'την ύπαρξη απείρων σ.κ γιατί διαφορετικά αν απ'από το δείκτη και μετά δεν ίσχυε για κάποιο δείκτη το "<" θα ίσχυε το "=" (δηλ. $a_k=a_{k+1}$) και άρα η ακολουθία σταθερή και άρα δεν υπάρχουν άπειρα, σ.κ, άτοπο.

Συνέχεια:

Συνέχεια μονότονων συναρτήσεων μας ενδιαφέρει κυρίως γιατί οι συναρτήσεις αθροιστικής κατανομής είναι ↗ και επομένως η μελέτη της παρουσιάζει ένα ενδιαφέρον. Συγκεκριμένα, μια μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ αριθμήσιμο σύνολο σημείων ασυνέχειας (δηλ. ή πεπερασμένο ή αν είναι άπειρο θα'ναι αριθμήσιμο)

Η μέση τιμή μιας τμ. είναι κάπως έτσι:
$\int \phi(x)\, dF(x)$ όπου F α.σ.κ. σ' ένα Lebesgue-Stieltjes ολοκλήρωμα

Μια κλάση συναρτήσεων που διευκολύνει τον υπολογισμό τέτοιου είδους ολοκληρωμάτων είναι οι συναρτήσεις των οποίων το σύνολο των σημείων των ασυνεχειών έχουν μέτρο 0 (δηλ. μον. συνάρτηση). Στη συγκεκριμένη περίπτωση τα σημεία ασυνέχειας είναι αριθμήσιμα στο πλήθος.

Ορισμός: Αν $A \subseteq B$. Λέμε ότι το A έχει μέτρο Lebesgue μηδέν ανν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists (a_n, \beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ τ.ω

$$A \subseteq \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, \beta_n)}_{\text{κάλυψη του } A} \quad \text{και} \quad \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n - a_n)}_{\text{Συνολικό μήκος των διαστημάτων}} < \varepsilon$$

Παράδειγμα είναι η ακολουθία $\frac{1}{n}$ που'χει μέτρο 0.

Θεώρημα: Κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει μέτρο 0.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αφού είναι αριθμήσιμο μπορούμε να το γράψουμε ως ακολουθία.

Έστω $A=(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Θέτω $a_n=\gamma_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$

$\beta_n=\gamma_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$

Σαφώς, $A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,\beta_n)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n-a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\frac{\varepsilon/2}{1-\frac{1}{2}}=\varepsilon$$

Δηλ, τα $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{N}$ έχουν μέτρο 0.

Θεώρημα: Πεπερασμένη ένωση συνόλων με μέτρο 0 έχει μέτρο 0.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $A_k\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n^{(k)},\beta_n^{(k)})$ με

$$\sum(\beta_n^{(k)}-a_n^{(k)})<\frac{\varepsilon}{2^k}$$

οπότε $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\subseteq\bigcup_{k=1}^{m}\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n^{(k)},\beta_n^{(k)})=$

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{m}(\beta_n^{(k)}-a_n^{(k)})=$$

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\max\beta_n^{(k)}-\min a_n^{(k)})=$$

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\beta_n^{(k_n^1)}-a_n^{(k_n^2)})$$

Έστω $k_n=\max\{k_n^1,k_n^2\}$, οπότε το συνολικό μήκος:

$\sum \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} < \varepsilon.$

Το k_n^o δεν πειράζει γιατί πηγαίνουμε λίγο παραπάνω και δεν επηρεάζονται τα τελικά τμήματα των φυσικών

(Λύση της vii:) Ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο δεν έχει μέτρο 0, γιατί ο πληθάριθμος του συνεχούς δηλ. το 0,1 έχει διάστημα $(0,\varepsilon)$ και άρα το μήκος του διαστήματός του δεν είναι μικρότερο του ε.

<u>Θεώρημα</u>: Το σύνολο $A(f) = \{x \in [a,\beta] / \text{η } f \text{ όχι}$ συνεχής στο $x\}$ μιας μονότονης $f: [a,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.

<u>Απόδειξη</u>: Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω f αύξουσα (σε περίπτωση που η $f \downarrow$ (φθίνουσα) η απόδειξη είναι ίδια για την $-f$)

<u>Ισχυρισμός</u>: Η f συνεχής στο $x \in (a,\beta)$ ανν
$\sup\{f(t) : a < t < x\} = \inf\{f(t) : x < t < \beta\}$

Παρατηρείστε ότι αν $a < t < x$ τότε
$f(t) \leq f(x)$

δηλ. το $\{f(t) : a < t < x\}$ είναι μη-κενό και άνω φραγμένο το $f(x)$

Επομένως, υπάρχει το $\sup\{f(t) : a < t < x\} = \underline{f}(x)\}$
ομοίως, $\inf\{f(t) : x < t < \beta\} = \bar{f}(x)$
ισχύει $-\infty < \underline{f}(x) \leq f(x) \leq \bar{f}(x) < \infty$

($\Rightarrow$) Αν f συνεχής στο $x \in (a,\beta)$ τότε $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ τ.ω

$\forall y$ με $|x-y| < \delta$

με $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Αφού η $f \nearrow$

αν $x-\delta < y < x < z < x+\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \le \overline{f}(x) - \underline{f}(x) \le f(z) - f(y)$

$= f(z) - f(x) + f(x) - f(y) < 2\varepsilon$

Από Θ. "σαντουιτς"

($\Leftarrow$) Αν $\overline{f}(x) = \underline{f}(x)$, $x \in (a,\beta)$, τότε η f συνεχής στο x. Αυτό ισχύει και απ' τον ορισμό των $\overline{f}$, $\underline{f}$ κ' ότι $\overline{f} = \underline{f}$.

Έχω: $\underline{f}(x) - \varepsilon \le f(y) \le f(x) \le f(z) \le \underline{f}(x) + \varepsilon$

Θέτω $\delta = \min\{x-y, z-x\}$ και έχω ότι f συνεχής στο x και παίρνει τιμή $\underline{f}(x)$ άρα (a,b) η f δεν είναι συνεχής αν ισχύει $\overline{f} - \underline{f} > 0$.

$A(f) - \{a,\beta\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ όπου

$$A_n = \{x \in (a,\beta) : \overline{f}(x) - \underline{f}(x) \geq \tfrac{1}{n}\}$$

Κάθε συνάρτηση A_n έχει το πολύ $n(f(\beta) - f(a))$ στοιχεία.

$x_i \in A_n$ τότε θα ισχύει:

$f(a) \le \underline{f}(x_1) < \overline{f}(x_1) < \underline{f}(x_k) < \overline{f}(x_k) \le f(\beta)$

Το μήκος των αλμάτων σε κάθε είναι το πολύ όλο το συνολικό άλμα. Επομένως, πόσα στοιχεία υπάρχουν το πολύ που συμβαίνει το άλμα συνεχών διαμερίσεων σε κ-σημείας

Το κάθε άλμα είναι το πολύ ύψους

π.χ. $A_1 = a$ - στοιχεία

$A_2 = 2a$

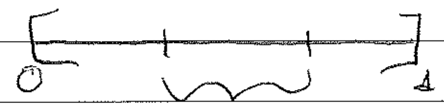
$A_3 = 3a$

Τι σύνολο είναι η ένωση αριθμ. υπάρχει μια συνάρτηση $a = a(x)$

τ.ω. σημ. περίπτωση

άλματος είναι το $f(\beta)-f(\alpha)$.

Σύνολο του Cantor (παράδειγμα μη-αριθμήσιμου συνόλου που'χει μέτρο μηδέν)



αφαιρούμε
αυτό το διάστημα [1ο βήμα]

Ξανατριχοτομούμε το διάστημα και αφαιρούμε πάλι το "μεσαίο" διάστημα...

Αποδεικνύει την ισχύ του συνεχούς και επομένως είναι υπεραριθμήσιμο. Έχει μέτρο 0 γιατί το μέτρο του είναι μικρότερο απ' το όριο (αναλυτικά στο επόμενο μάθημα).

(*) Πότε ένα υποσύνολο $A\subseteq\mathbb{R}$ δεν έχει μέτρο μηδέν?

Έστω $\varepsilon=\frac{1}{2}$ υπάρχει μια ακολουθία διαστημάτων που καλύπτει το $(0,1)$.

Έστω $(0,1)\subseteq(0,1)$.

$$\left(\text{μέτρο του } (0,1)\right) = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Οποιοδήποτε ανοιχτό διάστημα (α,β) δεν έχει μέτρο 0.

Αν $f: A\to B$

$A\simeq B$ $\quad \forall \varepsilon>0 \ \exists (a_n,\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τ.ω

$$A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,\beta_n) \text{ με } \sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n-a_n)<\varepsilon$$

$A = f^{-1}(B) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, \beta_n) \Longleftrightarrow$

$$B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} f(a_n, \beta_n)$$

Ισχύει μόνο αν η f είναι συνεχής.

Έστω $X \neq \phi$ και έχουμε μια οικογένεια υποσυνόλων $(A_i)_{i \in I} = \mathcal{A}$ που ορίζει μια τοπολογία στο X αν:
ϕ, X ανήκουν στην οικογένεια αυτή οι τυχαίες ενώσεις συνόλων της οικογένειας. Περιέχονται στην οικογένεια $\bigcup_{i \in I_1} A_i \in \mathcal{A}$, $I_1 \subseteq I$ και οι πεπερασμένες τομές ανήκουν στην $\mathcal{A}$, τα στοιχεία της οποίας ονομάζονται ανοιχτά σύνολα και τα συμπληρώματά τους ονομάζονται κλειστά σύνολα.

Αν πάρουμε ένα ζεύγος $(X, \mathcal{A})$ (χώρο με την οικογ. $\mathcal{A}$) ονομάζεται τοπολογικός χώρος παράδειγμα τοπολογικού χώρου αποτελεί $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_6)$

$$\mathcal{A}_6 = \left\{ A \subseteq \mathbb{R} \,/\, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, \beta_n),\ a_n < \beta_n,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

στηρίζεται στο Θεώρημα Heine-Borel που αναφέρει ότι κάθε ανοιχτό σύνολο στο $\mathbb{R}$ αναπαρίσταται αριθμήσιμη ένωση ανοιχτών διαστημάτων.
Μας ενδιαφέρουν οι τοπολογικοί χώροι ως αντικείμενα γιατί όταν έχουμε το δ.χ $(\Omega, \mathcal{A})$ που ψάχνουμε για το αν είναι κατάλληλος ώστε να απεικονίζει τα αποτελέσματα ενός τυχαίου πειράματος ή για το τι μπορεί να συμβεί στον πραγματικό κόσμο, όπου το $(\Omega, \mathcal{A})$ είναι

υπεραριθμήσιμο σύνολο (π.χ στα χρηματοοικονομικά)

Έννοια της διαμέτρου ενός συνόλου

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, φραγμένο τότε η διάμετρος του A δηλ. $\delta(A) = \sup\{x-y,\ x,y \in A\} = \sup A - \inf A$

Μέσω αυτής της έννοιας ορίζουμε την έννοια της ταλάντωσης σ' ένα ορισμένο σημείο του π.ο της.

Έστω $f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ φραγμένη και $x \in [\alpha,\beta]$, τότε ορίζω την ταλάντωση της f στο x, $\tau_f(x) =$

$$= \inf\{\delta(f((x-\delta,x+\delta)\cap[\alpha,\beta])),\ \delta>0\}$$

$$= \sup\{f((x-\delta,x+\delta)\cap[\alpha,\beta]),\ \delta>0\} - \inf\{f((x-\delta,x+\delta)\cap[\alpha,\beta]),\ \delta>0\}$$

<u>πχ</u> $[\alpha,\beta]$, $\varepsilon = \frac{\beta-\alpha}{2}$

$$[\alpha,\beta] \subseteq (\alpha-\varepsilon, \beta+\varepsilon)$$

και $(\beta+\varepsilon)-(\alpha-\varepsilon) = \beta-\alpha+2\varepsilon = 2(\beta-\alpha)$

άρα δεν έχει μέτρο 0.

<u>Dirichlet</u>: Η χαρακτηριστική συνάρτηση των ρητών στο $(0,1)$ έχει ταλάντωση 1

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ άρρητος} \\ 1, & x \text{ ρητός} \end{cases}$$

$$\tau_f(x) = \sup\{f((x-\delta,x+\delta)\cap[0,1]),\ \delta>0\} - \inf\{f((x-\delta,x+\delta)\cap[0,1]),\ \delta>0\} =$$

$$= 1-0 = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$\tau_f(0) = ;$ $\tau f(0) \leq 2.$

$$x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, \quad y_n = \frac{1}{2\pi n - \frac{\pi}{2}}$$

<u>Πρόταση</u>: Αν η f συνεχής στο $[\alpha, \beta] \Leftrightarrow \tau_f(x) = 0$, $x \in [\alpha, \beta]$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>:

Η f συνεχής στο $x \in [\alpha, \beta] \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ ; \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ τ.ω

$|x - y| < \delta \Rightarrow$

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon, x) > 0$ τ.ω

$f((x-\delta, x+\delta)) \subseteq (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon))$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ και για το συγκεκριμένο κάθε φορά $x \in [\alpha, \beta]$

$\delta(f((x-\delta, x+\delta) \cap [\alpha, \beta]))$ για κάθε $\delta > 0$

$\leq \delta(f((x-\delta, x+\delta) \cap [\alpha, \beta]))$, $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$

$\leq 2\varepsilon$

Άρα, $\tau_{f(x)} = 0$ $\square$

19-11-13

<u>Συμπαγή σύνολα</u>: $(\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}, A_i \subseteq X)$.

Έστω $(X, \mathcal{A})$ τοπολογικός χώρος και $K \subseteq X$, $K \neq \emptyset$. Το K θα ονομάζεται $\mathcal{A}$-συμπαγές αν για κάθε υπο-οικογένεια $(A_i)_{i \in I}$,

$J \subseteq I$ για τα οποία $K \subseteq \bigcup_{i\in J} A_i$, υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $J_1 \subseteq J$ για το οποίο $K \subseteq \bigcup_{i\in J_1} A_i$

Ιδιότητα των πεπερασμένων τομών:

$$K \subseteq \bigcup_{i\in J} A_i \Rightarrow K \subseteq \bigcup_{i\in J_1} A_i$$

Αν πάρουμε, τώρα, τα συμπληρώματα, τότε έχουμε

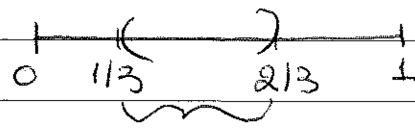
$$(X\setminus K) \supseteq \bigcap_{i\in J} (X\setminus A_i) \Leftarrow (X\setminus K) \supseteq \bigcap_{i\in J_1} (X\setminus A_i)$$

Κάθε ανοιχτή κάλυψη του A έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Αυτό μας λέει ισοδύναμα ότι υπάρχει έστω, τουλάχιστον μια οικογένεια κλειστών συνόλων που δημιουργούνται απ' τα ανοιχτά σύνολα.

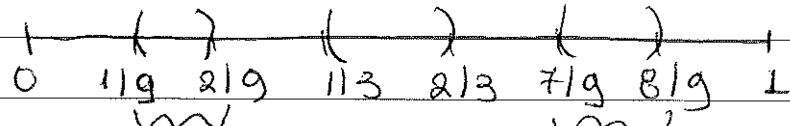
Αν κάθε πεπερασμένη οικογένεια αυτής της οικογένειας κλειστών συνόλων έχει μη-κενή τομή τότε όλη η οικογένεια έχει μη-κενή τομή.

Άμεση συνέπεια του ορισμού συμπάγειας.

Το σύνολο Cantor είναι:



Αφαιρούμε αυτό το σύνολο



αφαιρούμε αυτό

αφαιρούμε αυτό.

$C_0 = [0,1]$

$C_1 = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$

$C_2=[0,\frac{1}{9}]\cup[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]\cup[\frac{8}{9},1]$

Μ' αυτό τον τρόπο "προχωράμε" και το σύνολο του Cantor.

$$C=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n.$$

Παρατηρούμε ότι το $[0,1]$ είναι συμπαγές. (Θ. Heine-Borel)

Τα C_n είναι κλειστά σύνολα του συμπαγούς, C_0, δηλ. C_n: "κλειστό" $\forall n\in\mathbb{N}$ και $C_n\subseteq C_0$.

Επίσης, αν πάρω την οικογένεια των υποσυνόλων $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ παρατηρούμε ότι λόγω της κατασκευής της έχει την οικογένεια των πεπερασμένων τομών, δηλ. η τομή του C_0 με το C_1 είναι το C_1, η τομή του C_1, C_2 είναι το C_2, κλπ είναι φθίνουσα η ακολουθία αυτών των συνόλων.

Πιο γενικά, $C_{n+1}\subseteq C_n$, επομένως οποιαδήποτε οικογένεια πεπερασμένη η τομή τους θα 'ναι αυτή με το μεγαλύτερο δείκτη, άρα η τομή τους είναι μη-κενή.

Αφού είναι μη-κενή τομή αυτής της φθίνουσας ακολουθίας, είναι το σύνολο του Cantor.

Και C_n είναι η ένωση κάθε κλειστών διαστημάτων επαγωγικά αυτά τα διαστήματα είναι πλήθος 2^n και το μέτρο κάθε συνόλου έχει $(\frac{2}{3})^n$ και φθίνει έχοντας όριο 0. Το μέλος, κάθε διαστήματος είναι μέτρο μηδέν.

Παρατηρούμε ότι αφού τα διαστήματα είναι ξένα μεταξύ τους άρα και το μέτρο Lebesgue κάθε συνόλου είναι $\frac{2^n}{3^n}=\lambda(C_n)$

Και αφού το C είναι η τομή όλων των C_n, για να βρούμε το μήκος του C, θα πρέπει να βρούμε το όριο, το οποίο ισούται με μηδέν.

Το σύνολο του Cantor είναι υπεραριθμήσιμο και μάλιστα $C \approx \mathbb{R} \approx [0,1]$ γιατί το $C \approx [0,1]$ υπάρχει $f: [0,1] \to C$, "1-1" κ' επί.

Κάθε αριθμός στο $[0,1]$ έχει τριαδικό ανάπτυγμα.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}, \quad x_n = \{0,1,2\}, \text{ όπου } x \in [0,1]$$

$$f(x_n) = \begin{cases} 0, & x_n = 0,1 \\ 2, & x_n = 2. \end{cases}$$

Τότε $[0,1] \preceq C$ (τουλάχιστον ισοπληθές με το Cantor)

Δηλ. στο C_1 το ανάπτυγμα φτάνει μέχρι το 1/3. και επειδή είναι τουλάχιστον ισοπληθές με το C τότε σίγουρα είναι υπεραριθμήσιμο.

<u>Μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$</u> (ορισμός του εξωτερικού μέτρου Lebesgue).

<u>Μέτρο</u>: $\mu: \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ (ο θετικός κώνος του χώρου των προσημασμένων μέτρων.

$\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ $\quad ca(\Omega, \mathcal{F})$

i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$ $\quad$ αριθμησίμως αθροίσιμα

ii) $A \in \mathcal{F}, A' \in \mathcal{F}$ $\quad$ μέτρα επί του μετρήσιμου

iii) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ $\quad$ χώρου $(\Omega, \mathcal{F})$, $\mathcal{F}$: σ-άλγεβρα

<u>Ορισμός</u>: Μέτρο ονομάζεται μια απεικόνιση της εξής ιδιότητας:

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) αν έχουμε μια ακολουθία ξένων μεταξύ των ενδεχομένων ισχύει ότι το μέτρο της ένωσης είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων των όρων της ακολουθίας

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Τα διαστήματα στους πραγματικούς αριθμούς ανήκουν σε μια σ-άλγεβρα ~~Borel~~ που ονομάζεται σ-άλγεβρα του Borel. (Το μέτρο του Lebesgue μπορεί να οριστεί στην σ-άλγεβρα του Borel) Κάθε σύνολο Borel είναι μετρήσιμο Lebesgue.

Όταν ένα σύνολο μπορεί να γραφτεί ως ένωση διαστημάτων μπορούμε να δείξουμε ότι, επειδή

$$C_{n+1} \subseteq C_n \Rightarrow \lambda(C_{n+1}) \leq \lambda(C_n) \text{ και}$$

$$\lambda(C) \leq \underset{a_{n+1}}{\lambda(C_{n+1})} \leq \underset{a_n}{\lambda(C_n)}$$

Επομένως, έχουμε μια φθίνουσα ακολουθία (a_n) και κάτω φραγμένη και άρα συγκλίνει στο infimum που είναι το $\lambda(C) = \lim \lambda(C_n)$

Όταν λέμε εξωτερικό μέτρο Lebesgue το οποίο μπορεί να οριστεί για κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n - a_n),\ (a_n,\beta_n)_{n\in\mathbb{N}},\ A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n,\beta_n) \right\}.$$

άρα $\lambda^*(a,\beta) \leq \beta - a$, αλλά επειδή η ακολουθία με μοναδικό όρο το a,β, άρα

$$\lambda(a,\beta) = \beta - a$$

Για να το ξεχωρίσουμε απ' το $\lambda|_{B(\mathbb{R})}$ (πάνω στη σ-άλγεβρα Borel) $= \lambda$, βάζουμε λ^*.

Θεώρημα: (Heine-Borel)

Αν $[\alpha,\beta] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n,\beta_n)$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$[\alpha,\beta] \subseteq \bigcup_{n=1}^{n_0} (a_n,\beta_n).$$

Απόδειξη: Έστω ότι τέτοιο n_0 δεν υπάρχει, τότε για κάθε n, υπάρχει $x_n \in [\alpha,\beta]$ αλλά δεν ανήκει στην $\bigcup_{n=1}^{m} (a_n,\beta_n)$. Άρα, από το Θ. Bolzano-Weierstrass η x_n έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, x_{k_n} η οποία συγκλίνει στο $x \in [\alpha,\beta]$.

Τελικά, υπάρχει n_1: $\forall n \geq n_1$ $x_{k_n} \in (a_{n_2},\beta_{n_2})$ $n \geq n_1$ και θεωρώ $m_n \geq n_1, n_2$. Τότε καταλήγω σε άτοπο.

Θεώρημα: Ολοκληρωσιμότητας του Lebesgue.

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη τότε είναι ολοκληρώσιμη $\iff$ Το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f $(\lambda^*(A(f))=0)$ έχει μέτρο 0.

Σημείωση:

$$\overline{\int_\alpha^\beta} f = \underline{\int_\beta^\alpha} f \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists P: \ U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon.$$

Λήμμα: Αν η ταλάντωση της f, $\tau_f(x)<\varepsilon$, $x\in[\alpha,\beta]$ τότε έχουμε ότι υπάρχει διαμέριση για την οποία ισχύει το κριτήριο του Riemann, δηλ. $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon(\beta-\alpha)$.

Σχόλιο: Η κλάση των ολοκληρώσιμων, κατά Lebesgue, συναρτήσεων στο $[\alpha,\beta]$ είναι γνησίως μεγαλύτερη από την κλάση στο Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο διάστημα από (που καλύπτει μέχρι πεπερασμένου πλήθους ασυνεχειών).

πχ f: Dirichlet στο $[\alpha,\beta]$

$$\int_\alpha^\beta f\, d\lambda = 0$$ ένα ασυνέχεια στους ρητούς.

26-11-13.

Πρόταση: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, φραγμένη και $\varepsilon>0$. Τότε αν $(\forall x\in[\alpha,\beta]), (\tau_f(x)<\varepsilon) \Rightarrow (\forall P\subseteq[\alpha,\beta])$

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon(\beta-\alpha).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $\varepsilon_0>0$ τ.ω $U(f,P)-L(f,P)\geq \varepsilon_0(\beta-\alpha)$ (1) για κάθε διαμέριση P του $[\alpha,\beta]$. Τότε ισχύει η (1) και για τις διαμερίσεις:

$$P_n=\{t_0^{(n)}=\alpha<\ldots<t_i^{(n)}=\alpha+i\frac{\beta-\alpha}{n}<t_n^{(n)}=\beta\}$$

Από την (1), υπάρχει δείκτης i_n τ.ω

$$\delta(f([t_{i_n}^{(n)}, t_{i_n+1}^{(n)}]))\geq \varepsilon_0 \quad (2)$$

γιατί, διαφορετικά, αν δεν υπήρχε τέτοιο i_n, τότε θα είχαμε $M_i^{(n)}-m_i^{(n)}<\varepsilon_0 \Rightarrow$ η (1) δεν ισχύει.

$M_i^{(n)}$: supremum του $f([t_{i_n}^{(n)}, t_{i_n+1}^{(n)}])$

$m_i^{(n)}$: infimum του $f([t_{i_n}^{(n)}, t_{i_n+1}^{(n)}])$.

Λόγω του ότι $t_{i_n+1}^{(n)}-t_{i_n}^{(n)}=\frac{\beta-\alpha}{n}\to 0$

οι υπακολουθίες $\{t_{i_n+1}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{t_{i_n}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$

συγκλίνουν από το Θ. Bolzano-Weierstrass και μάλιστα έχουν το ίδιο όριο, έστω t.

Άρα, $\forall\delta>0\ \exists n_0(\delta)\ \forall n\geq n_0(\delta)$

$$[t_{i_n}^{(n)}, t_{i_n+1}^{(n)}]\subseteq(t-\delta,t+\delta).$$

Θεώρημα: (ολοκληρωσιμότητας του Lebesgue)

Αν η $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ φραγμένη και το $A(f)$ έχει μέτρο μηδέν $\Longleftrightarrow f\in L^1[\alpha,\beta]$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $(\Rightarrow)$ $A(f)=\bigcup_{n=1}^{\infty}k_n$, $k_n=\{x\in[\alpha,\beta]/\tau_f(x)\geq\frac{1}{n}\}$

Αφού το $A(f)$ έχει μηδενικό μέτρο, τότε κάθε k_n έχει μηδενικό μέτρο.

Άρα, π.χ και το k_{n_0}, άρα $\forall\varepsilon>0$, $\exists(a_i,\beta_i)_{i=1}^{m}$

τ.ω $k_{n_0}\cup([a,\beta]\setminus k_{n_0})\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}(a_i,\beta_i)$

λόγω του Θ.Heine-Borel ($[a,\beta]\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,\beta_n)$).

$\varepsilon>0$, $\{a_i,\beta_i\}_{i=1}^{m}\cup\{a,\beta\}=P$, $\|f\|=\sup\{|f(x)|,x\in[\alpha,\beta]\}$.

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{\substack{i\in I:\\ t_i\in P}}M_i(t_i-t_{i-1})-\sum_{\substack{i\in I:\\ t_i\in I}}m_i(t_i-t_{i-1})<$$

$$<2\|f\|\,\varepsilon+\varepsilon(\beta-a)\Rightarrow$$

$$f\in L^1[\alpha,\beta]$$

$(\Leftarrow)$ Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη $f\in L^1[a,\beta]$ και έστω ότι $A(f)$ δεν έχει μέτρο μηδέν. $A(f)=\bigcup_{n=1}^{\infty}k_n$ τότε $\exists n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω k_{n_0} δεν έχει μέτρο μηδέν. Αφού το k_{n_0} δεν έχει μέτρο μηδέν, δεν έχει περιεχόμενο μηδέν λόγω Heine-Borel, δηλ. αν $\varepsilon>0$ $\exists(a_i,\beta_i)_{i=1}^{m}$ $k_{n_0}\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}(a_i,\beta_i)$

$\sum_{i=1}^{m}(\beta_i-a_i)\geq\varepsilon$, $U(f,P)-L(f,P)\geq\frac{1}{n_0}\cdot\varepsilon$

Άρα, άτοπο. □

Ομοιόμορφη Συνέχεια

Θεώρημα: Η $L^1[\alpha,\beta]$ είναι γραμμικός χώρος (η κλάση των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι γραμμικός χώρος) και γραμμικός σύνδεσμος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $A(f+g) \subseteq A(f) \cup A(g)$

$(k \in \mathbb{R})$

$$A(kf) \subseteq A(f)$$

$$A(f^+) \qquad f^+ = \sup\{f, 0\}$$

$$f \geq g \Leftrightarrow f(t) \geq g(t)$$

σ.β.

$$f^- = \sup\{-f, 0\}, \quad f = f^+ - f^-$$

$$|f| = f^+ + f^- \qquad f \vee g + f \wedge g = f + g \ (*)$$

$$A(f^+) \subseteq A(f) \ (**) \qquad \text{Από } (*) \text{ κ' } (**) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Άρα, γραμμικός σύνδεσμος

$$\|f\|_1 = \int_\alpha^\beta |f(t)|\,dt.$$ Αν ισχύει ότι $|f| \leq |g|$ τότε ισχύει ότι $\|f\|_1 \leq \|g\|_1$

Σε όποιο γραμμικό σύνδεσμο σε χώρο Banach ισχύει αυτή η συνεπαγωγή τότε αυτός ο σύνδεσμος λέγεται σύνδεσμος Banach.

Χώρος Banach

Ένας γραμμικός χώρος $(X, \|\cdot\|)$ αν αυτή η συνάρτηση, $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}_+$ έχει τις εξής ιδιότητες:

α) $||0|| = 0$

β) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

γ) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Όπως είπαμε ότι στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση που είναι νόρμα είναι η απόλυτη τιμή.

(Αποτέλεσμα: Κάθε βασική ακολουθία συγκλίνει).

Ερώτημα: Σ' ένα χώρο με νόρμα κάθε βασική ακολουθία συγκλίνει;

Απάντηση: Όχι, πάντα. Έστω $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\forall \varepsilon > 0$.

$\exists\, n_0(\varepsilon): \forall\, m, n \geq n_0(\varepsilon)$

$||x_n - x_m|| < \varepsilon$ δεν γνωρίζουμε αν συγκλίνει. Αν κάθε βασική ακολουθία σε χώρο με νόρμα συγκλίνει τότε ο χώρος αυτός καλείται Banach.

Παράδειγμα τέτοιων χώρων είναι $L^1[\alpha, \beta]$.

Γενικά, οι χώροι $L^p[\alpha, \beta]$.

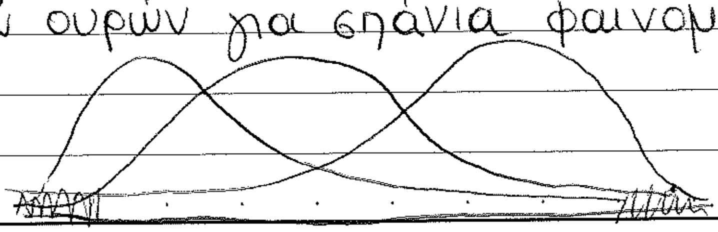
$$\int_\alpha^\beta |f(t)|^p dt < \infty, \text{ όπου } p > 1.$$

Αυτοί οι χώροι $L^1(\mathbb{R})$ ή $L^p(\mathbb{R})$

Έστω $f_X(t)$ μια σ.π. μιας τ.μ. το ότι η τ.μ. ανήκει στο χώρο L^p σημαίνει ότι υπάρχει το

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^p f_X(t) dt < \infty$$, δηλ. η p-τάξης ροπή μιας τ.μ.

Στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά ή στα αναλογιστικά μελετάμε τις βασικές κατανομές βαριών ουρών για σπάνια φαινόμενα.



βαριά ουρά στα αριστερά.

δηλ. η πιθανότητα να πάρει μεγάλες αρνητικές τιμές.
Αυτές τις αναγνωρίζουν μέσω των λεγόμενων αθετικών ροπών.
δηλ. $\forall \epsilon > 0 \int_0^{\infty} e^{\epsilon t} f_X(t)\,dt = +\infty$

Αν πάρουμε το supremum δηλ.
$$I(X) = \sup\{P>0 \mid \int_{-\infty}^{\infty} |t|^P \cdot f_X(t)\,dt < \infty\} < \infty$$

Αυτό το supremum το ονομάζουμε δείκτη ροπών.
Ο χώρος των ελαφριών ουρών είναι $L^{\infty}(\mathbb{R})$
$L^{I(X)}(\mathbb{R})$: ο ελαχιστικός χώρος στον οποίο ανήκει η X.
Δηλ. όταν έχουμε μεταβλητές κινδύνου, μεταβλητές που έχουν αποδόσεις μετοχών κινούνται στο $L^p(\mathbb{R})$, με $1 \le p < \infty$ και μάλιστα αν έχει μέτρο πιθανότητας ο μεγαλύτερος χώρος που μπορείς να κινηθείς είναι το $L^1(\Omega)$.
Όταν λέμε για χώρους c.μ μιλάμε για χώρους L^p με $1 \le p < \infty$ δηλ. για βαριές ουρές.

9-12-13

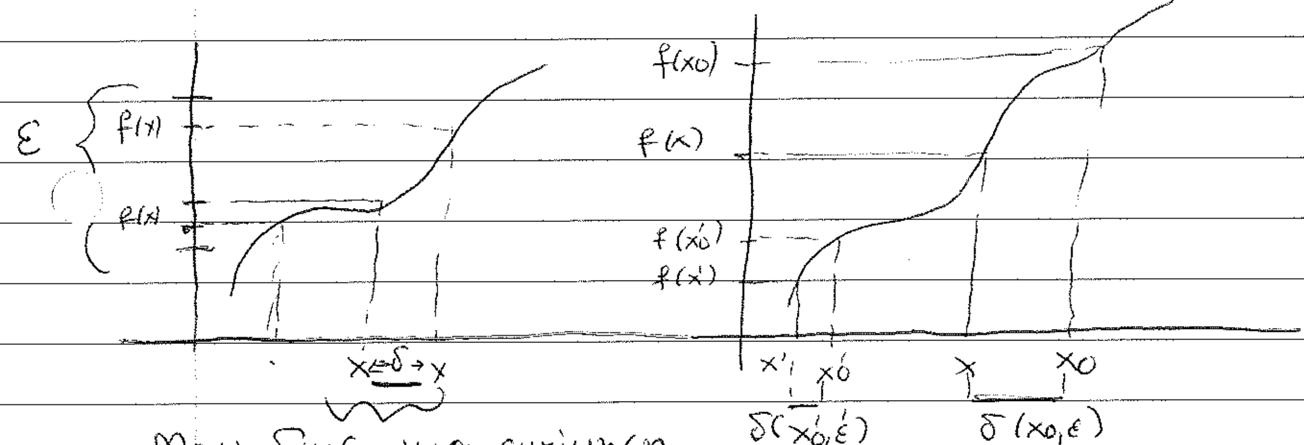
Ομοιόμορφη Συνέχεια

Έχουμε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}$.
Η f ονομάζεται ομοιόμορφα συνεχής, αν
$\forall \varepsilon > 0$, $\forall x, y \in A$, $\exists \delta > 0$.
$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
Διαφορά μεταξύ των εννοιών συνέχειας της f στο $x_0 \in A$ και ομοιόμορφης συνέχειας.
Συνέχεια: $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Όμως το $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)$.

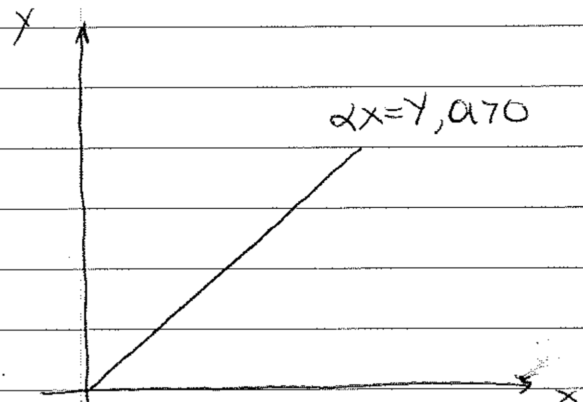
Ενώ στη ομοιόμορφη συνέχεια το $\delta=\delta(\varepsilon)$

Στην ομοιόμορφη συνέχεια το δ τ.ω η απόσταση των αντίστοιχων εικόνων η μικρότερη απόσταση, δηλ. η δ-απόσταση δεν εξαρτάται απ'το συγκεκριμένο σημείο στο οποίο την μεταφέρει αυτή την απόσταση.



Που δίνει μια εκτίμηση για το ποιο είναι το δ.

Αυτά τα δ δεν είναι τα ίδια στη συγκεκριμένη συνάρτηση δηλ. αν κάνουμε μια κατάλληλη επιλογή σημείων δεν είναι τα ίδια εν γένει ακόμα και αν $\varepsilon'=\varepsilon$



Ομοιόμορφα συνεχής.

Άρα, μπορεί η συνάρτηση να'ναι συνεχής αλλά όχι ομοιομ. συνεχής.

$\forall\ \varepsilon>0\ |\alpha x-\alpha y|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \alpha|x-y|<\varepsilon \Leftrightarrow$

$|x-y|<\frac{\varepsilon}{\alpha}$ Άρα, αρκεί να διαλέξω $\delta=\varepsilon/\alpha$.

Γενικότερα:

Αν διαλέξω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz στο A με σταθερά $M > 0$, αυτή είναι ομοιόμορφα συνεχής (δηλ. αν ισχύει $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$ $\forall\, x, y \in A$).

Κάθε τέτοια συνάρτηση, είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A, διότι, έστω $\varepsilon > 0$, με $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y| < \varepsilon$.

Αν επιλέξω $|x-y| < \frac{\varepsilon}{M} = \delta(\varepsilon)$.

Ερώτημα: Μπορούμε να βρούμε τέτοιες συναρτήσεις;

Οι γραμμικές συναρτήσεις είναι ομοιόμορφες.

Η $f(x) = \eta\mu x$, $x \in [0, 2\pi]$, ομοιόμορφα συνεχής

όχι "1-1".

$$|\eta\mu x - \eta\mu y| = \left|2\sigma\upsilon\nu \frac{x+y}{2}\, \eta\mu \frac{x-y}{2}\right| \leq$$

$$|\eta\mu(x-y)| \leq |x-y|$$

Άρα, Lipschitz άρα ομοιόμορφα συνεχής.

Κριτήριο για μη-ομοιόμορφη συνέχεια

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, αν υπάρχουν ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ με $x_n - y_n \to 0$ και $f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αφού η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής και $x_n - y_n \to 0$, δηλ. για $\delta > 0$ $\exists\, n_0(\delta)$ τ.ω $|x_n - y_n| < \delta$, $n \geq n_0(\delta)$ τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τ.ω $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$, αφού $f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$

Άρα, για $n = n_0(\delta)$ έχω: $|x_{n_0}(\delta) - y_{n_0}(\delta)| < \delta$ με $|f(x_{n_0}(\delta)) - f(y_{n_0}(\delta))| \geq \varepsilon$. Επομένως, f όχι ομοιόμορφα συνεχής. □

Παραδείγματα:

1) $f(x)=\frac{1}{x}, \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},$

διότι αν $x_n=\frac{1}{n+1}, \quad y_n=\frac{1}{n}$

τότε $x_n-y_n\to 0$

$f(x_n)=n+1, \quad f(y_n)=n$

$f(x_n)-f(y_n)=1 \not\to 0$

2) $f(x)=\eta\mu\frac{1}{x}, \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$x_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}} \qquad y_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{4}}$$

τότε $x_n-y_n\to 0$

Όμως, $f(x_n)=1\to 1$

$f(y_n)=\frac{\sqrt{2}}{2}\to\frac{\sqrt{2}}{2}$

Χώροι συναρτήσεων (Συνεχών συναρτήσεων)

Ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων που μελετάμε είναι $C[0,1]$. Αυτός ο χώρος του οποίου η νόρμα

$$\|f\|_\infty=\sup\{|f(t)|,\ t\in[0,1]\}$$

και λόγω του θεωρήματος μέγιστης και ελάχιστης τιμής το $\sup\{|f(t)|,\ t\in[0,1]\}=\max\{|f(t)|,\ t\in[0,1]\}$

Υπάρχουν δύο ειδών σύγκλισης.

1) Κατά σημείο σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων στο $C[0,1]$.

2) Ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων στο $C[0,1]$.

1) <u>Ορισμός</u>: Θα λέμε ότι η ακολουθία $f_n \xrightarrow{κ.σ} f$ αν
$\forall \epsilon > 0$, $\forall t \in [0,1]$ $\exists n_0(\varepsilon, t)$ στο $\mathbb{N}$ τ.ω
$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon, \quad n \geq n_0(\varepsilon, t)$$

2) <u>Ορισμός</u>: Θα λέμε ότι η ακολουθία $f_n \xrightarrow{ομ.} f \iff$
$\forall \epsilon > 0$, $\forall t \in [0,1]$, $\exists n_0(\varepsilon)$ στο $\mathbb{N}$ τ.ω
$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon, \quad n \geq n_0(\varepsilon)$$

<u>ΛΗΜΜΑ</u>: $f_n \xrightarrow{ομ.} f \iff f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>: ($\Longrightarrow$) Απ' το συμπέρασμα του ορισμού 2 θα έχουμε ότι αν $\varepsilon = \varepsilon/2$ τότε θα πάρω κάποιο $n_1(\varepsilon)$, δηλ. έχω:
$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon/2, \quad \forall t \in [0,1], \quad n \geq n_1(\varepsilon)$$
Άρα, $\underbrace{\sup\{|f_n(t) - f(t)|\}}_{=\|f_n - f\|_\infty} \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$, $\forall t \in [0,1]$, $n \geq n_1(\varepsilon)$

($\Longleftarrow$): $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0(\varepsilon)$: $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$, $n \geq n_0(\varepsilon)$ τότε $\forall t \in [0,1]$, ισχύει ότι:
$$|f_n(t) - f(t)| \leq \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$$
Άρα, έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση.

<u>Πρόταση</u>: Αν $f_n \xrightarrow{ομ.} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow{κ.σ} f$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>: Από τον ορισμό

<u>Παρατήρηση</u>: Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλ. αν
$$f_n \xrightarrow{κ.σ} f \not\Longrightarrow f_n \xrightarrow{ομ.} f$$

Π.χ. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(t) = \begin{cases} nt, & 0 \le t < \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$f_n(t) \xrightarrow{\kappa.\sigma} 1$$

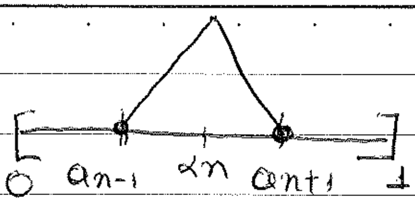
$|f_n(t) - 1| = |nt - 1| < \varepsilon$. Άρα, από ορισμό δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

Σχολια: Στο 2ο κλάδο έχουμε $|1-1| = 0 < \varepsilon$ $n_0(\varepsilon)$.

Στο 1ο κλάδο έχουμε $|nt-1| < \varepsilon$, $n_0(\varepsilon, t)$.

Ερώτημα: Έχουμε το $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ (με την τοπολογία της νόρμα) και το $(C[0,1], \kappa.\sigma)$ (με την τοπολογία κατά σημείο σύγκλισης και ασθενέστερη από την τοπολογία της νόρμα).
Πώς είναι αυτά τα σύνολα; Πώς μοιάζει ένα ανοιχτό σύνολο ξεχωριστά στις δύο τοπολογίες;

Απάντηση: Ξέρουμε τους χώρους πεπερασμένης διάστασης, ο $C[0,1]$ είναι χώρος άπειρης διάστασης. Αυτό γιατί περιέχει ένα τουλάχιστον αριθμήσιμο υποσύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων. Αυτό το υποσύνολο κατασκευάζεται ως εξής:
Έστω μια ακολουθία διαφορετικών ανά δύο σημείων $(a_n) \subseteq [0,1]$ και $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ η εξής συνάρτηση:



$f_n = 0$ εκτός από το $[a_{n-1}, a_{n+1}]$ και $f_n(a_n) = 1$.

<u>Πρόταση</u>: Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο της f_n είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>: Έστω $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_{n_i} = 0$ τότε για

$t = a_{n_1} \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$t = a_{n_2} \Rightarrow \lambda_2 = 0$.

$\vdots$

$\Rightarrow \lambda_k = 0$.

Άρα, γραμμικά ανεξάρτητα, άρα ο γραμμικός χώρος είναι άπειρης διάστασης.
Άρα και ο χώρος $C[0,1] \to \mathbb{R}$ είναι άπειρης διάστασης των γραμμικών συναρτησιωδών. □

~~Απ'ό~~

Απ' όλα τα συναρτησιωδή μας ενδιαφέρει ένας αλγεβρικός υπόχωρος του $C^*[0,1]$ που ονομάζεται τοπολογικός δυϊκός του $C[0,1]$ που περιέχει όλα τα συνεχή γραμμικά συναρτησιωδή ως προς την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης. Δηλ. όταν στην περίπτωση που έχουμε ότι $f_n \xrightarrow{ομ} f \Longrightarrow$
$x^*(f_n) \longrightarrow x^*(f)$, $x^* \in C^*[0,1]$.
Δηλ. συνεχές συναρτησιακό επί του χώρου $C[0,1]$
Ο χώρος αυτός είναι δηλ. ο $C^*[0,1]$ είναι ο χώρος $ca[0,1]$ προσαρμοσμένα αριθμήσιμων προσθετικών μέτρων που ορίζονται πάνω στην σ-άλγεβρα Borel του $[0,1]$.

Οπότε αν πάρουμε το θετικό κώνο αυτό $C_2[0,1] = \{$όλα τα $\mu \in C_2[0,1]$ τ.ω $\mu(A) \geq 0, A \in B[0,1]\}$.
(δηλ. το σύνολο όλων των μέτρων).

Αν πάρουμε τα μέτρα εκείνα που στη συνάρτηση $\mathbb{1}$ (ως γραμ. συναρτησιακά) $\mu(\mathbb{1}) = 1$, τότε έχουμε τα μέτρα πιθανότητας. Τότε το $\underline{\Omega}$ μπορεί να'ναι οποιοσδήποτε συμπαγής τοπολογικός χώρος. Δηλ. φτιάχνοντας την δυικότητα των συνεχών συναρτήσεων και των μέτρων Borel $\langle C(\underline{\Omega}), C_2(\underline{\Omega}) \rangle$, που αυτός ο συμπαγής τοπολογικός χώρος μπορεί να αναπαριστά το δειγματικό χώρο.

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ:</u>

Τα $\underline{\Omega}$ στα χρηματοοικονομικά είναι οι τροχιές των τιμών. Δηλ. για να φτιάξει κανείς ένα χρηματοοικονομικό μοντέλο τα ω θα'ναι οι τροχιές μιας στοχαστικής διαδικασίας των αποδόσεων των μετοχών, στην αναλογιστική των αποζημιώσεων ενός χαρτοφυλακίου συμβολαίων, οπότε αν θέλουμε να φτιάξουμε ένα μοντέλο σ'αυτή τη δυικότητα θα πρέπει να κατασκευάσουμε τον χώρο συμπαγή. (δηλ. συμπαγοποίηση σ'ένα σημείο).

Υπάρχουν, λοιπόν 3 ειδών, ουσιαστικά τοπολογίες που μπορούν να οριστούν πάνω στο χώρο των συνεχών συναρτήσεων.

- Υπάρχει η τοπολογία που ορίζει η νόρμα.
- Υπάρχει η τοπολογία που ορίζουν τα μέτρα.
- Υπάρχει η τοπολογία που ορίζουν τα κατά επιλογή σημεία σύγκλισης

$\langle X, X^* \rangle$

X = χώρος με νόρμα

X^* = δυικός χώρος των γραμ. συναρτησιωδών του χώρου αυτού.

Η τοπολογία που ορίζεται πάνω στο X απ' τα στοιχεία του X^* ονομάζεται ασθενής τοπολογία στο X.

<u>Ερώτημα</u>: Ποιο το δομικό υλικό για να χτίσουμε ανοιχτά σύνολα σε μία απ' αυτές τις τοπολογίες και τι σχέση έχει η καθε μία σε σχέση με τις άλλες δύο;

<u>Απάντηση</u>: Για την τοπολογία με $\|\cdot\|_\infty$ δηλ. την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης χρησιμοποιούμε ως δομικό υλικό για να φτιάξουμε ανοιχτά σύνολα τις ανοιχτές σφαίρες δηλ.

$\|\cdot\|_\infty$ $\quad B_{\|\cdot\|_\infty}(f,\varepsilon)$

Ανοιχτή σφαίρα με κέντρο την f και ακτίνα ε ως προς τη νόρμα του χώρου των συνεχών συναρτήσεων είναι το σύνολο

$B_{\|\cdot\|_\infty}(\overset{g}{0},\varepsilon)=\{g\in C[0,1] \,/\, \|f\|_\infty<\varepsilon\}$ $\quad \|f-g\|_\infty<\varepsilon$

Παίρνοντας την ένωση οποιωνδήποτε ανοιχτών σφαιρών έχουμε ανοιχτό σύνολο.

Για την ασθενή τοπολογία που συμβολίζουμε με $\underbrace{\sigma(C[0,1],\ ca[0,1])}_{\text{δυικότητα των χώρων}}$.

Τα σύνολα αυτά δηλ. οι ανοιχτές σφαίρες επειδή αποτελούν τη βάση για τη δημιουργία άλλων ~~συν~~ ανοιχτών συνόλων ονομάζονται και βασικά ανοιχτά σύνολα.

Για την ασθενή τοπολογία τα αντίστοιχα βασικά σύνολα στο 0 είναι πεπερασμένες τομές συνόλων της μορφής $\{f \in C[0,1] / |\mu(f)| < \varepsilon\} = B(\mu, 0, \varepsilon)$

$$\mu \in C_a[0,1] \qquad \mu(f) = \int_{[0,1]} f\,d\mu.$$

Αν μεταφέρουμε τις περιοχές σ' ένα άλλο σημείο η του χώρου θα έχουμε:

$$|\mu(f) - \mu(g)| -$$

Για την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης.

Τα ανοιχτά σύνολα στο 0 είναι της μορφής:

$$\{f \in C[0,1] / |f(t)| < \varepsilon\}, \quad \forall t \in [0,1].$$

Παίρνοντας πεπερασμένες τομές αυτών των συνόλων

Οι ανοιχτές βασικές περιοχές είναι αυτές κατά τις οποίες παίρνουμε.

$\{f \in C[0,1] / |f(t) - g(t)| < \varepsilon\}$, $t \in [0,1]$ για πεπερασμένο πλήθος σημείων t στο $[0,1]$.

10-12-13.

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω ότι f όχι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε από κριτήριο μη-ομοιόμορφης συνέχειας $\forall \varepsilon > 0$. $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [\alpha, \beta]$ με $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$.

$|f(x_n)-f(y_n)| \geq \varepsilon$. Επειδή (x_n), (y_n) φραγμένες, από Bolzano-Weierstrass, έχουν συγκλίνουσες υπακολουθίες (x_{k_n}), (y_{k_n}) με $x_{k_n} \to x_0$ και $y_{k_n} \to y_0$.
όπου από $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, λαμβάνουμε

$$|x_{k_n} - y_{k_n}| < \frac{1}{k_n}.$$

και άρα $x_0 = y_0$. Επομένως $|f(x_0) - f(y_0)| = 0$, από <u>συνέχεια</u> της f και άρα $0 \geq \varepsilon > 0$. Άτοπο.

<u>Λήμμα</u>: Αν μια συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι τ.ω $f(\alpha) < 0$ και $f(\beta) > 0$ $\exists\, \xi \in (\alpha,\beta)$ τ.ω $f(\xi) = 0$.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>: Αν $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$, τότε ok.

Έστω $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > 0$, τότε $\beta_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

$\alpha_1 = \alpha$. ή $\alpha_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $\beta_1 = \beta$.

(έχοντας ακολουθία διαστημάτων $[\alpha_0, \beta_0] = [\alpha, \beta]$).

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_n \to \alpha_0 \\ \quad\quad\quad \shortparallel \\ \beta_n \to \beta_0 \end{array}\right\} = \xi \quad \text{άρα } f(\xi) = 0 \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n] \ni \xi(x)$$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $\theta \in f([\alpha,\beta])$ και
$g(t) = f(t) - \theta$.
Υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$, $f(\xi) = \theta$.

<u>Θεώρημα</u>: Η ομοιόμορφη σύγκλιση στο $C[0,1]$ συνεπάγεται την ασθενή σύγκλιση (για ακολουθίες).

<u>Ορισμός</u>: $f_n \xrightarrow{\sigma(X,X^*)} f \iff \forall \varepsilon>0, \exists n_0(\varepsilon, f, x^*) \in \mathbb{N}$.

$\forall x^* \in X^*, \quad |x^*(f_n) - x^*(f)| < \varepsilon, \quad n \geq n_0$

$\langle X, X^* \rangle$

χώρος με νόρμα — τοπολογικός δυικός του.

<u>Απόδειξη (Θεωρήματος 2)</u>: $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f \iff \forall \varepsilon>0, \exists n_0(\varepsilon, f)$

$\|f_n - f\| < \varepsilon \iff \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \leq 1}} |x^*(f_n) - x^*(f)| < \varepsilon$.

Αν το $x^*=0$ ισχύει,

αν $x^* \neq 0$ τότε χρησιμοποιώ το στοιχείο $\frac{x^*}{\|x^*\|=1}$ και πολλαπλασιάζω και διαιρώ στη $n_0(\varepsilon, f)$ με $\|x^*\|$.

και έχουμε: $n_0(\varepsilon, f, x^*)$. □

Ο χώρος του x^* είναι γραμμικός, ο οποίος $(x^*, \|\cdot\|)$ έχει μία νόρμα $\|\cdot\|$ που ορίζεται εξής:

Η νόρμα κάθε συναρτησιακού στο x^* $\|x^*\|$ ορίζεται να'ναι το sup των απολύτων τιμών των συναρτησιακών X πάνω στα σημεία της κλειστής μοναδιαίας σφαίρας, δηλ.

$$\|x^*\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |x^*(x)|.$$

Το σύνολο $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in X / \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$.

είναι το σύνολο που ορίζει τη κλειστή μοναδιαία σφαίρα

Άρα, το $\|x^*\| = \sup_{\|x\| \le 1} |x^*(x)|$ είναι η κλειστή μοναδιάστατη σφαίρα $\overline{B}(0,1)$
κέντρο ακτίνα.

$$\|x\| = \sup_{\|x^*\|=1} |x^*(x)| \quad (1).$$

$$\|x^*\| = \sup_{\|x^*\|=1} |x^*(x)| \quad (2).$$

<u>Ερώτημα</u>: Τι σχέση έχουν τα (1) κ' (2);

<u>Απάντηση</u>: Γνωρίζουμε τους χώρους $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$

και $(L^p)^* = L^q$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ο δυϊκός του $(L^1)^* = L^\infty$,

$$\|x\|_p = \mathbb{E}(|x|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|x\|_\infty = \inf\{M > 0 \,/\, x \le M, \ \mathbb{P}\text{-σ.β.}\}$$

χώρος στοχαστικών διαδικασιών.

$$L^p([0,T] \times \Omega, \mathcal{B}_{[0,1]} \otimes \mathcal{F})$$

$A \times B$, $B \in \mathcal{F}$.

$A \in \mathcal{B}_{[0,T]}$

και το μέτρο που υπάρχει είναι το $\lambda \otimes \mathbb{P}$.

Το $\lambda \otimes \mathbb{P}(A \times B) = \lambda(A)\mathbb{P}(B)$

όπου $\lambda(A)$ μπορεί να'ναι το μέτρο Lebesgue πάνω στο $[0,T]$.

Αν έχουμε μια στοχαστική διαδικασία
f: Θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\int_{[0,T]} \int_{\Omega} |f_t(\omega)|^p \, d\mathbb{P}(\omega) \, d\lambda(\tau) < \infty$$

και αν πάρουμε την δύναμη 1/P του παραπάνω ολοκληρώματος παίρνουμε τη νόρμα της στοχαστικής διαδικασίας.

Ιδιότητες Νόρμας

i) $\|x^*\| = 0 \iff x^* = 0$.

($\Leftarrow$ οκ)

($\Rightarrow$) Αν $x=0$, ισχύει, αν $x \neq 0$ τότε παίρνω το $\frac{x}{\|x\|}$ το οποίο έχει νόρμα 1, δηλ.

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1.$$

Όταν το $\sup_{x \in X} \left| x^*\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right| = 0$ τότε το $x^* = 0$.

$\forall x \quad |x^*(x)| = 0$ τότε το συναρτησιακό $x^* = 0$.

iii) Θετικά ομογενής συνάρτηση,

$$\|\lambda x^*\| = |\lambda| \, \|x^*\|$$

$$\|\lambda x^*\| = \sup_{\|x\|=1} |\lambda x^*(x)| =$$

$$= |\lambda| \sup_{\|x\|=1} |x^*(x)|$$

ii) $\|x^* + y^*\| \leq \|x^*\| + \|y^*\|$

$$\sup_{\|x\|=1} |(x^* + y^*)(x)| \leq$$

$\sup_{\|x\|=1} \{ |x^*(x)| + |y^*(x)| \} \leq \|x^*\| + \|y^*\|.$

$(X^*, \|\cdot\|)$, $\|x\| = \sup_{\|x^*\|=1} |x^*(x)|$ X: υπόχωρος του X^{**}.

$X^{**} = (X^*)^*$ ο δυικός του δυικού.

$i: X^{**} \to X$. Αν η απεικόνιση i είναι επί, τότε ο X ονομάζεται αυτοπαθής (reflexive). Τα στοιχεία αυτού του χώρου μέσω της απεικόνισης i ταυτίζονται με τα στοιχεία του χώρου X. Δηλ. $i(x^{**}) = \hat{x}$

Επομένως έχουμε τη νόρμα του χώρου X. δεύτερος δυικός, επειδή ο δεύτερος δυικός συμπίπτει με τον X, δεν θα παίρνουμε $\|x^{**}\| = \sup_{\|x^*\|=1} |x^{**}(x^*)|$,

επειδή όμως ο χώρος είναι αυτοπαθής ~~καθορίζεται~~ ταυτίζεται η απεικόνιση i μ'ένα στοιχείο του χώρου X του αρχικού. Δηλαδή,

$$\|\hat{x}\| = \sup_{\|x^*\|=1} |\hat{x}(x^*)|.$$

Η απεικόνιση αυτή i^{-1} (αντίστροφης της i) ονομάζεται φυσιολογική εμ. του X στον X^{**}.

Αν ο χώρος δεν είναι αυτοπαθής, που είναι η περίπτωση, συναντάται σε χώρους που έχουν άπειρη διάσταση. Πεπερασμένη διάσταση, οι ευκλείδιοι χώροι είναι όλοι αυτοπαθείς δηλ. $X = \mathbb{R}^n$, τότε $X^* \underset{\text{ισομορ}}{\cong} \mathbb{R}^n$ και

ο $X^{**} \cong \mathbb{R}^n$, όμως αν πάρουμε για π.χ στη περίπτωση απείρων διαστάσεων το χώρο συνεχών συναρτήσεων, ο δυικός είναι προσαρμοσμένα μέτρα που ορίζονται στην σ-άλγεβρα του Borel πάνω δηλ. στην Borel σ-άλγεβρα [0,1]. Δηλ.

$$X = C[0,1]$$

$$X^* = C_2[0,1]$$

ο $C[0,1]$ περιέχεται γενικά στο $\underset{\neq}{\subset}$ στο δεύτερο

δυικό X^{**} δηλ. $C[0,1] \underset{\neq}{\subset} X^{**}$.

Τα προσαρτημένα μέτρα θα έχουν συνάρτηση πυκνότητας η οποία θα είναι $L^1[0,1]$ + Lebesgue. ολοκληρώματα, οπότε παίρνοντας το δυικό αυτού του χώρου, αλλά αυτός ο χώρος είναι μεγαλύτερος ως προς το $C[0,1]$ και η νόρμα του $L^1[0,1]$ είναι και πυκνός υπόχωρος. Υπάρχει μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων της οποίας το όριο είναι ως προς τη νόρμα του $L^1[0,1]$ είναι η συγκεκριμένη συνάρτηση που επιλέγουμε απ' τις ολοκληρώσιμες.

Αν πάρω το δυναμοσύνολο του L που είναι ο C και ο δεύτερος X^{**} άρα X^{**} θα περιέχει το $C[0,1]$

Αφού λοιπόν ο $C[0,1]$ περιέχει του $L^1[0,1]$ ο $X^* = C_2[0,1]$ είναι ισόμορφος με του $L^1[0,1]$ διότι μπορεί να αναπαραστεί κι τη διαφορά δύο συναρτήσεων πυκνότητας. Επομένως, υπάρχει περίπτωση ∞-διάστασης που δεν είναι αυτοπαθής στους χώρους αυτούς.

Για τα στοιχεία του δεύτερου δυικού που ανήκουν.

στον X ισχύει η σχέση:

$$\|x\| = \sup_{\|x^*\|=1} |x^*(x)|.$$

$x^{**} \in X^{**} \setminus X$, $x_0^*(x) = 0$.

$$x_0^*(x_0^{**}) = 1.$$

Ερώτημα: Μπορώ να βρω ένα $x_0^* \in X^*$, $x_0^* \neq 0$ τ.ω να μηδενίζεται στον υπόχωρο X το X^{**} και στο συγκεκριμένο στοιχείο που ανήκει $x_0^{**} \in X^{**} \setminus X$ και να μην ανήκει στο X^*. και $x_0^*(x_0^{**}) = 1$;

Απάντηση: Αυτό έπεται είτε απ' το Θεώρημα H-Banach, είτε απ' το θεώρημα διαχωρισμού κυρτού συνόλου.

Αν το $\|x_0^*\| = 1$

$$|x_0^*(x)| \leq \sup_{\|x^*\|=1} |x^*(x)|$$

Επιλέγω στο $x \neq 0$ επομένως το $\|x\| > 0$

τότε $x_0^*(x_0^{**}) = \|x\|$.

Επομένως $\|x\| = |x_0^*(x_0^{**})| \leq \sup_{\|x^*\|=1} |x^*(x^*)| \leq$

$$\sup_{\|x^*\|=1} |x_0^*(x)| \leq \|x\|.$$

δηλ. ότι ισχύει $\|x\| = \sup_{\|x^*\|} |x^*(x)|$

σε κάθε χώρο με νόρμα είτε είναι αυτοπαθής είτε όχι, ισχύει αυτό.

(παίρνεις τα στοιχεία μόνο του X άρα ίσα)

17-12-13

Εισαγωγή στη Στοχαστική Ολοκλήρωση

Έστω Ω μη-κενό σύνολο και T: τοπολογικός χώρος. Επίσης, έστω E: χώρος Banach (πλήρης ως προς τη νόρμα, δηλ. κάθε βασική ακολουθία συγκλίνει) και επιπλέον ο E είναι μερικά διατεταγμένος γραμμικός χώρος. Ως προς τη μερική διάταξη ο E είναι γραμμικός σύνδεσμος Banach (δηλ. η δομή της νόρμα με τη δομή της διάταξης συνδέεται με το γεγονός ότι ο E είναι σύνδεσμος Banach), δηλ. $|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$, $(x, y \in E)$

Ο T έχει μια κατεύθυνση, δηλ. είναι εφοδιασμένος με μία διμελή σχέση, $\gtrsim$, αυτοπαθή και μεταβατική τω αν $\forall\, a, \beta \in T$, $\exists\, c \in T$ με $c \gtrsim a, \beta$.

Επιπλέον, θεωρούμε και ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ορισμένο στο Ω.

Κάθε απεικόνιση $X: T \times \Omega \to E$ ονομάζεται <u>τυχαίο πεδίο</u> με τιμές στον E. (Τα τυχαία πεδία αποτελούν την γενίκευση των στοχαστικών διαδικασιών και των συναρτήσεων, δηλ. ενωποιούν σε μία κλάση αντικειμένων τις στοχαστικές διαδικασίες και τις συναρτήσεις και συμπεριλαμβάνουν ακόμα και τα τυχαία μέτρα.

<u>π.χ.</u> $X: [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$, το $\mathbb{R}$ με τη συνήθη διάταξη είναι σύνδεσμος Banach και το $[0, T]$ ικανοποιεί τις συνθήκες της κατεύθυνσης όπου c είναι το supremum των a, β, δηλ. $c = a \vee \beta$

Όμως, μπορεί οι τιμές των στοχαστικών μεταβλητών να'ναι οι ίδιες τυχαίες μεταβλητές.

Π.χ $E = L^p_{[0,T]}$ ή $\tau = 2$

Η τοπολογία π.χ μπορεί να'ναι η Hausdorff μετρική

δηλ. $d(A,B) = \inf_{\substack{t \in A \\ s \in B}} |t - s|$

ή

μπορεί να'ναι συνάρτηση, δηλ.

$X : [0,T] \times \{\omega\} \to \mathbb{R}$

Έτσι, παρατηρούμε ότι η $X : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ είναι η πιο γενική περίπτωση των παραπάνω.

Άρα, όλα αυτά τα αντικείμενα απ'το πιο απλό στο πιο σύνθετο ενώνονται στην κλάση των τυχαίων πεδίων.

Ερώτημα: Μπορούμε να ορίσουμε ένα ολοκλήρωμα παρόμοιο με το ολοκλήρωμα Lebesgue;

Απάντηση: Ναι. Ενώ έχει μελετηθεί το ολοκλήρωμα μόνο σε περίπτωση στοχαστικών διαδικασιών, όπως π.χ στην κίνηση Levie κλπ, αλλά όχι σε περίπτωση τυχαίων πεδίων.

Όταν $\langle H, H \rangle$ (Hilbert με το δυϊκό του να'ναι ο εαυτός του) $\langle L^2, L^2 \rangle$

ή

$\langle L^\infty, L^1 \rangle$.

$x^* \geq y^* \Leftrightarrow$

$x^*(x) \geq y^*(x)$, $x \in E_+$ (δηλ. τα x που ανήκουν στο θετικό κώνο του E) και έτσι ορίζεται το αντίστοιχο.

Όταν τα διαστήματα $[x^*, y^*]$ είναι συμπαγή ως προς την ασθενή τοπολογία που ορίζεται στο ασθενή-αστεροειδή στο δυϊκό χώρος του ίδιου του χώρου, τότε

$(\sigma(E^*, E))$, τότε η δυϊκότητα ονομάζεται Ζεύγος Riesz

Για την κατασκευή ολοκληρώματος τυχαίων πεδίων έχουμε ότι:

$$\int_{\alpha}^{B} x_t \, dy_t$$, όπου α, β στοιχεία του τοπολογικού χώρου, $\alpha, \beta \in T$, x: τυχαίο πεδίο

και ολοκληρώνουμε ως προς άλλο τυχαίο πεδίο y. Τα x, y παίρνουν τιμές στον ίδιο χώρο Banach.

Καταρχήν, θεωρούμε το σύνολο των πεπερασμένων αλυσίδων $G(\alpha, \beta)$ με αρχή το α και τέλος το β (δηλ. τα ολικά διατεταγμένα σύνολα στον τοπολογικό χώρο που έχουν πεπερασμένα στο πλήθος στοιχεία), δηλ.

$$G(\alpha, \beta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n(\alpha, \beta)$$

Τώρα, το $C_n(\alpha, \beta)$ είναι το σύνολο όλων των $t_0, t_1, \ldots, t_n \in T$ δηλ.

$$C_n(\alpha, \beta) = \{ t_0, t_1, \ldots, t_n \in T / t_0 = \alpha, t_n = B, t_i \geq t_{i-1}, i = 1, \ldots, n \}$$

είναι, ~~κατά μία έννοια~~, το ανάλογο των διαμερίσεων.

Οπότε, πάνω σ'αυτά τα σύνολα ορίζουμε τα στοιχ. τυχαία πεδία, δηλ. το στοιχ. τυχαίο πεδίο του X σχετικό με μία αλυσίδα της μορφής

$$(x, C_n(\alpha, \beta)) = (x_{t_1}, \ldots, x_{t_n})$$ και αντίστοιχα για το y.

Οπότε, το στοχαστικό ολοκλήρωμα είναι:

$$\int_{C_n(\alpha,\beta)} x_t\, dy_t = \sum_{i=1}^{n} x_{t_i}(y_{t_i} - y_{t_{i-1}})$$

Επομένως, έχουμε αυτή την ακολουθία. Αυτή η ακολουθία που'ναι ακολουθία ως προς n.

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_{t_i}(y_{t_i} - y_{t_{i-1}}) \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \| x_{t_i}(y_{t_i} - y_{t_{i-1}}) \|$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} \| x_{t_i} \| \, \| y_{t_i} - y_{t_{i-1}} \|$$

στην περίπτωση που ο χώρος είναι και άλγεβρα Banach (π.χ. L^2).

Άλγεβρα Banach σημαίνει ότι αν έχω ~~α, β~~ δύο στοιχεία a, b που ανήκουν στον E ($a, b \in E$) τότε το γινόμενό τους ανήκει στον E ($a \cdot b \in E$).

Αν ο χώρος T είναι μετρικοποιήσιμος δηλ. μπορώ να έχω $[0,T]$ τότε το $\| y_{t_i} - y_{t_{i-1}} \|$ μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό.

Ειδικά, για τον L^2 ανεξάρτητως της μορφής της στοχαστικής διαδικασίας ή του τυχαίου πεδίου, εφόσον $\sum_{i=1}^{n} x_{t_i}(y_{t_i} - y_{t_{i-1}})$ είναι φραγμένη, αφού μπορώ να ελέγξω το φράγμα της νόρμα του, μπορώ να ελέγξω μέσω του θεωρήματος Eberlein-Smulian κάθε φραγμένη ακολουθία και όταν ~~όταν~~ ο χώρος είναι αυτοπαθής τότε έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία, το οποίο σημαίνει ότι μπορώ να βρω μια υπακολουθία που να συγκλίνει ασθενώς.

Το όριο αυτής της ασθενώς συγκλίνουσας υπακολουθίας το ονομάζω στοχαστικό ολοκλήρωμα: $\int_{C_n(\alpha,\beta)} x_t\, dy_t$ □.