# Αντασφαλιστικά σχήματα και Μέτρα Κινδύνου

25 Φεβρουαρίου 2015

Σε ένα αντασφαλιστικό σχήμα $I(X)$, η τ.μ. $I(X)$ υποδεικνύει το τμήμα του κινδύνου που αναλαμβάνει η αντασφαλίστρια εταιρία $A$, ενώ $X - I(X)$ είναι το τμήμα του κινδύνου που απομένει στην εταιρία $E$ που ονομάζεται *πρωτασφαλίστρια εταιρία*. Τα πιο γνωστά αντασφαλιστικά σχήματα είναι

$(i)$ Το *αναλογικό σχήμα* με $I(X) = \beta X, \beta \in (0,1)$,

$(ii)$ Το σχήμα stop-loss με $I(X) = (X - d\mathbf{1})^+$.

Το τμήμα του κινδύνου που απομένει στην πρωτασφαλίστρια εταιρία στην πρώτη περίπτωση είναι $(1-\beta)X$, ενώ στη δεύτερη $X - (X - d\mathbf{1})^+ = X \wedge d\mathbf{1}$.

Ας προσπαθήσουμε να αντιληφθούμε πώς λειτουργεί στην πράξη η αντασφάλιση. Θεωρητικά θα ήταν βολικό για την πρωτασφαλίστρια εταιρία να ξεφορτώνεται τους 'μεγάλουσ' κινδύνους σε κάποια αντασφαλίστρια εταιρία, προκειμένου να μη χρεωκοπήσει. Όμως ακριβώς επειδή οι κίνδυνοι είναι βαριές ουρές, υπάρχει κίνδυνος χρεωκοπίας της αντασφαλίστριας εταιρίας. Για αυτό το λόγο η αντασφάλιση εν γένει είναι ακριβή.

Έστω ένα ομογενές χαρτοφυλάκιο κινδύνων $(X_1, X_2, ..., X_n)$, τέτοιο ώστε η κατανομή του να ανήκει στην $\mathcal{D}$. Ας υποθέσουμε ότι η πρωτασφαλίστρια εταιρία ακολουθεί το αναλογικό σχήμα αντασφάλισης για κάθε ένα από αυτά τα συμβόλαια. Συνεπώς, το πρόβλημα βελτιστοποίησης της πρωτασφαλίστριας εταιρίας στην προκειμένη περίπτωση είναι

$$\min \sum_{i=1}^{n} p_i \beta_i,$$

$$s.t. \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} (1-\beta_i) X_i > u_A + c_A T) \leq 1 - a_A,$$

$$\beta_i \in (0,1), a_A \in (0,1).$$

Το αντίστοιχο πρόβλημα βελτιστοποίησης της αντασφαλίστριας εταιρίας είναι

$$\min \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i > \theta_E(u_E + c_E T))) \leq 1 - a_E,$$

$$s.t. \beta_i \in (0,1), a_E, \theta_E \in (0,1).$$

*Τεχνική Ισορροπία* έχουμε στην περίπτωση όπου βρεθεί ένα διάνυσμα $\beta = (\beta_i, \beta_2, ..., \beta_n)$ που αποτελεί λύση και στα δύο προβλήματα.

Υπενθυμίζουμε ότι

$$q_a^+(X) = \inf x \in \mathbb{R} | F_X(x) > a\}, V@R_a(X) = -q_a^+(X).$$

Ακόμη ότι

$$ES_a(X) = -\mathbb{E}(X | X \leq q_a^+(X)).$$

Από τον ορισμό των $V@R, ES$ και χαλαρώνοντας τους περιορισμούς για τις $\beta_i$ μεταβλητές -επιτρέποντας να ανήκουν στο $[0,1]$, έχουμε ότι τα δύο προβλήματα μπορούν να διατυπωθούν ως εξής:

$$\min \sum_{i=1}^{n} p_i \beta_i,$$

$$s.t. ES_{a_A}(\sum_{i=1}^{n} (1-\beta_i) X_i) \geq -u_A + c_A T,$$

$$\beta_i \in [0,1],$$

$$\min ES_{a_E}(\sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i),$$

$$s.t. ES_{a_E}(\sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i) \geq -\theta_E(u_E + c_E T + p \cdot \beta),$$

$$\beta_i \in [0,1].$$

Το πρώτο πρόβλημα έχει λύση (γιατί το σύνολο των περιορισμών του είναι κυρτό και συμπαγές και η υπό ελαχιστοποίηση συνάρτηση γραμμική). Για κάθε $\beta$ στο σύνολο λύσεων του πρώτου ή του δεύτερου προβλήματος έχει λύση το δεύτερο ή το πρώτο πρόβλημα αντίχτοιχα γιατί η υπό ελαχιστοποίηση συνάρτηση είναι συνεχής. Άρα υπάρχει τεχνική ισορροπία με αναλογική αντασφάλιση. Ακόμη και αν διατηρηθεί ο περιορισμός $\beta_i \in (0,1)$, τότε στο ένα πρόβλημα έχουμε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού σε πολυγωνικό σύνολο, ενώ στο δεύτερο πρόβηλαμ έχουμε να ελαχιστοποιήσουμε μία κυρτή, συνεχή συνάρτηση πάνω σε ένα επίσης πολυγωνικό σύνολο. Και τα δύο προβλήματα έχουν λύση. Άρα πάλι με τον ίδιο τρόπο έχουμε την ύπαρξη τεχνικής ισορροπίας.

Λίγα λόγια για τις ανισότητες που χρησιμοποιούνται και πώς καταλήγουμε σε αυτές. Αν

$$\mathbb{P}(X > \theta) \leq 1 - a,$$

τότε

$$1 - F_X(\theta) \leq 1 - a,$$

ή αλλιώς

$$F_X(\theta) \geq a.$$

Με άλλα λόγια

$$q_X^+(a) \leq \theta,$$

άρα

$$\mathbb{E}(-X | X \leq q_X^+(a)) \geq -\theta,$$

δηλαδή

$$ES_a(X) \geq -\theta.$$