Αντασφάλιση

Διδάσκων: Χρήστος Κουντζάκης

21 Μαΐου 2015

1 Συλλογικό Μοντέλο Αντασφάλισης

Στα πλαίσια της Excess Loss αντασφαλιστικής σύμβασης, υπάρχει η δυνατότητα διάκρισης διαφόρων επιπέδων αποζημίωσης. Για παράδειγμα

$$P(x_1 < X^c \leq x_2) = S_1, P(x_2 < X^c \leq x_3) = S_2, ...,$$

εν γένει οι πιθανότητητες S_k δείχνουν τη *σφοδρότητα* (severity) του κινδύνου εκείνου του τμήματος που αναλαμβάνει η αντασφαλίστρια εταιρία, δηλαδή το X^c. Επίσης θεωρούμε μία τ.μ. N που υποδεικνύει το πλήθος των συμβολαίων που βρίσκονται σε καθεστώς αντασφαλιστικής σύμβασης (excess loss), χωρίς όμως να γνωρίζουμε σε ποιο επίπεδο σφοδρότητας βρίσκονται αυτά. Αναλόγως με τη διάκριση των επιπέδων σφοδρότητας μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες μετάβασης από το ένα επίπεδο στο άλλο A_k, αν γνωρίζουμε την πιθανότητα A_0, δηλαδή να μην υπάρξει μεταβολή στο επίπεδο σφορδότητας της αποζημίωσης. Η γενική σχέση που χρησιμοποιείται στην περίπτωση αυτή προέρχεται από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας και είναι η εξής

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} (a + \frac{bi}{k}) S_i A_{k-i},\ i = 1, 2, ..., k$$

και στηρίζεται στο ότι υπολογίζονται όλες οι πιθανότητες μετάβασης από όλες τις προηγούμενες καταστάσεις σε εκείνη όπου αντιστοιχεί στο k-επίπεδο σφοδρότητας του κινδύνου. Οι κατανομές που χρησιμοποιούνται για το N είναι συνήθως η Poisson $P(N = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, n = 1, 2, ...,$ όπου $a = 0, b = \lambda$, η αρνητική διωνυμική

$$P(N = n) = \frac{(a + n - 1)!}{n!(a - 1)!} p^a (1 - p)^n,\ a = 1 - p, b = (a - 1)(1 - p),$$

και επιπλέον η διωνυμική

$$P(N = n) = \frac{M!}{n!(M - n)!} p^n (1 - p)^{M-n},\ a = \frac{p}{p - 1}, b = \frac{(M + 1)p}{1 - p}.$$

Παράδειγμα. Έστω ότι $X^c \sim Pareto(1, 2)$ και τα επίπεδα ασφάλισης (παρέμβασης του αντασφαλιστή) καθορίζονται από τους πραγματικούς, 3,7,9. Αν η πιθανότητα $A_0 = p_1$, βρείτε το γενικό τύπο των πιθανοτήτων A_k.

Λύση. Είναι

$$S_1 = P(1 < X^c \leq 3), S_2 = P(3 < X^c \leq 7), S_3 = P(7 < X^c \leq 9), S_4 = P(X^c > 9).$$

Άρα η κατανομή είναι διωνυμική με κάποιο p και $M = 4$. Αν $p = \frac{1}{2}$, τότε

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} (-1 + \frac{5i}{k}) S_i A_{k-i}, A_0 = p_1, k = 1, 2, 3, 4.$$

Ασκήσεις.

1. Έστω ότι $X^c \sim Pareto(2, 3)$ και τα επίπεδα ασφάλισης (παρέμβασης του αντασφαλιστή) καθορίζονται από τους πραγματικούς, 3,5,11. Αν η πιθανότητα $A_0 = 0.05$, βρείτε το γενικό τύπο των πιθανοτήτων A_k και την πιθανότητα A_2 αν το p της διωνυμικής είναι 0.1.

2. Έστω ότι $X^c \sim Pareto(2, 5)$ και τα επίπεδα ασφάλισης (παρέμβασης του αντασφαλιστή) καθορίζονται από τους πραγματικούς, 4,6,10. Αν η πιθανότητα $A_0 = 0.05$, βρείτε το γενικό τύπο των πιθανοτήτων A_k και την πιθανότητα A_2 αν το p της διωνυμικής είναι 0.3.