

“Μαθηματικά Οικονομικά” (Ζ’ Εξάμηνο)

Διδάσκοντες: Χρ. Κουντζάκης

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Έστω καταναλωτής με σύνολο κατανάλωσης τη σφήνα  $C$  και ο οποίος διαθέτει σχέση προτίμησης  $\succeq$  στα στοιχεία της. Αν για μια δέσμη αγαθών  $v \in C$  ισχύει ότι για κάθε  $x \in C, \lambda > 0, x + \lambda v \succ x$ , τότε το  $v$  ονομάζεται **άκρως επιθυμητό στοιχείο** για την  $\succeq$ . Έστω οικονομία ανταλλαγής με σύνολο κατανάλωσης  $C = \mathbb{R}_+^I$  με  $I$  καταναλωτές των οποίων οι σχέσεις προτίμησης  $\succeq_i, i = 1, 2, \dots, I$  είναι κυρτές και το συνολικό διαθέσιμο αγαθό  $e = e_1 + e_2 + \dots + e_I$  είναι άκρως επιθυμητό στοιχείο όλων των καταναλωτών. Έστω επίσης ότι  $\text{textbf{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_I)$  είναι κατανομή της οικονομίας, ασθενώς άριστη κατά Pareto.

1. Να δείξετε ότι κάθε  $F_i = \{x \in \mathbb{R}_+^I \mid x \succeq_i x_i\}$  είναι κυρτό σύνολο.
2. Να δείξετε ότι το σύνολο  $F = F_1 + F_2 + \dots + F_I - e$  είναι κυρτό.
3. Να δείξετε ότι για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει  $\frac{1}{n}e \notin F$ . (Υπόδειξη: Αν ίσχυε αυτό για κάποιο  $n$ , τότε θα είχαμε

$$e = (z_1 + \frac{1}{In}e) + (z_2 + \frac{1}{In}e) + \dots + (z_I + \frac{1}{In}e), z_i \in F_i, i = 1, 2, \dots, I.$$

Γιατί είναι άτοπο;)

4. Με βάση το προηγούμενο ερώτημα, εφαρμόστε το θεώρημα διαχωρισμού κυρτών συνόλων και διαπιστώστε ότι υπάρχει  $p_n, \|p_n\|_1 = 1$  με

$$p_n \cdot z \geq a_n \geq \frac{-1}{n} p_n \cdot e, z \in F.$$

5. Αφού η ακολουθία  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  είναι φραγμένη, έχει συγκλίνουσα υπακολουθία  $p_{k_n}$  με  $p_{k_n} \rightarrow p$ . Διαπιστώστε ότι  $p \cdot z \geq 0, z \in F$ .
6. Έστω  $x \succeq_i x_i, i = 1, 2, \dots, I$ . Τότε διαπιστώστε ότι το  $p$  στηρίζει την κατανομή  $\xi$ , δηλαδή  $p \cdot x \geq p \cdot x_i, i = 1, 2, \dots, I$ . Υπόδειξη: Διαπιστώστε ότι  $x - x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1} + x + x_{i+1} + \dots + x_I - e$  και αξιοποιήστε την  $p \cdot z \geq 0, z \in F$ .

Το παρόν φυλλάδιο να παραδοθεί την ημέρα εξέτασης του μαθήματος.