

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΧΡΗΜΑΤΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## Α΄ ΕΞΑΜΗΝΟ

### 3η ενότητα

## ΠΙΝΑΚΙΑ ΚΑΤΑΘΕΤΙΚΩΝ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΩΝ

## ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑ ΚΑΙ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

Διδάσκων: Χ. Κουντζάκης

- Ένα άλλο ζήτημα σχετικό με τον ανατοκισμό είναι η κατάρτιση πινακίων καταθετικών λογαριασμών. Στους καταθετικούς λογαριασμούς όπως είπαμε έχουμε κάποιους όρους ανατοκισμού (σταθερό, κυμαινόμενο επιτόκιο κλπ.), αλλά πραγματοποιούνται αναλήψεις σε τακτά χρονικά διαστήματα. Επομένως ένα πινάκιο καταθετικού λογαριασμού οφείλει να αποτελείται από τέσσερις βασικές στήλες. Στη βασική στήλη είναι το υπόλοιπο του λογαριασμού  $R_t$  μετά από κάθε χρεωστική ή πιστωτική πράξη. Μετά από την παρέλευση χρόνου  $t_1$ , πραγματοποιείται έστω μια πιστωτική πράξη που είναι μια κατάθεση ή η προσθήκη των τόκων προηγούμενης τοκοφόρας περιόδου στο κεφάλαιο  $R_t$ . Αυτή θα καταχωρηθεί με αντίστοιχη ημερομηνία στη στήλη των πιστωτικών πράξεων. Έστω ότι το κεφάλαιο με το οποίο πιστώνεται ο λογαριασμός με αυτόν τον τρόπο είναι  $C_{t+t_1}$ . Αν υποθέσουμε ότι πραγματοποιούμε μια ανάληψη χρημάτων ύψους  $P_{t+t_1+t_2}$  μετά από παρέλευση χρόνου  $t_2$ , τότε αυτή θα καταχωρηθεί με αντίστοιχη ημερομηνία στη στήλη των χρεωστικών πράξεων. Το τελικό υπόλοιπο μετά από την παρέλευση χρόνου  $t_1 + t_2$  είναι

$$R_{t+t_1+t_2} = R_t + C_{t+t_1} - P_{t+t_1+t_2}.$$

- Η παραπάνω σχέση μπορεί να αλλάξει ανάλογα με την σειρά πραγματοποίησης των πράξεων (χρεωστικών και πιστωτικών).
- Έτσι συμπληρώνονται τα μηχανογραφημένα ενημερωτικά καταθετικών λογαριασμών που παίρνουν οι καταθέτες από τις τράπεζες μέσω ταχυδρομείου ή μέσω ATM.
- Ένα άλλο σημαντικό θέμα στα χρηματοοικονομικά είναι η **αγορά συναλλάγματος**. Αν παρατηρήσουμε τους ηλεκτρονικούς πίνακες των τιμών του συναλλάγματος στα υποκαταστήματα των τραπεζών που επισκεπτόμαστε καθημερινά, θα δούμε ότι υπάρχουν δύο τιμές η Τιμή Αγοράς (T.A.) και η Τιμή Πώλησης (T.Π.) κάθε ξένου νομίσματος ως προς το Εγχώριο Νόμισμα με το οποίο γίνονται οι συναλλαγές στο εσωτερικό της χώρας. Μάλιστα η T.A. είναι μικρότερη από την T.Π. Αυτή η διαφορά ονομάζεται bid-ask spread για την τιμή του συναλλάγματος. Την τράπεζα την συμφέρει να πωλεί ακριβώς το συνάλλαγμα και να το αγοράζει φθηνά, αλλά δεν είναι αυτός ακριβώς ο λόγος που υπάρχει το bid-ask spread. Οι τιμές του συναλλάγματος ωστόσο καθορίζονται κυρίως από τις διεθνείς αγορές **ομολόγων** και άλλων **τίτλων σταθερού εισοδήματος** που αποδίδουν στο κάθε νόμισμα. Ιδιότητες των αγορών ως μαθηματικών οντοτήτων που ξεφεύγουν από το στόχο του παρόντος μαθήματος (π.χ. μη πληρότητα) είναι εκείνες που δεν επιτρέπουν να συμπέσουν οι T.A. και T.Π.
- Αν υποθέσουμε ότι η τιμή αγοράς του ξένου νομίσματος έναντι του εγχώριου είναι  $S_1$  μονάδες ξένου νομίσματος ανά μονάδα εγχώριου και η τιμή πώλησης του ξένου νομίσματος έναντι του εγχώριου είναι  $S_2$  μονάδες ξένου νομίσματος ανά μονάδα εγχώριου, αυτό σημαίνει τα εξής.  $N$  μονάδες εγχώριου νομίσματος αγοράζουν  $NS_2$  μονάδες ξένου, διότι η τράπεζα στην περίπτωση αυτή πωλεί συνάλλαγμα.  $M$  μονάδες ξένου νομίσματος αγοράζουν  $\frac{M}{S_1}$  μονάδες εγχώριου νομίσματος, διότι στην περίπτωση αυτή η τράπεζα αγοράζει συνάλλαγμα.
- Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει με τους τραπεζικούς λογαριασμούς σε συνάλλαγμα. Καταθέτης που διαθέτει  $N$  μονάδες εγχώριου νομίσματος ανοίγει λογαριασμό σε συνάλλαγμα. Τότε το αρχικό του κεφάλαιο είναι  $NS_2$  μονάδες ξένου νομίσματος που ανατοκίζονται με ένα ετήσιο επιτόκιο  $i_f$  που αφορά στο **ξένο νόμισμα**.

- Για παράδειγμα αν το  $i_f$  είναι επιτόκιο απλού ανατοκισμού, θα εισπράξει  $NS_2(1+i_fT)$  μετά από  $T$  έτη. Αν ο ανατοκισμός είναι συνεχής, το τελικό κεφάλαιο θα είναι  $NS_2e^{i_fT}$ .
- Αντίστοιχα, αν ο καταθέτης μετατρέψει  $M$  μονάδες ξένου νομίσματος σε εγχώριο νόμισμα, το αρχικό του κεφάλαιο θα είναι  $\frac{M}{S_1}$  μονάδες εγχώριου νομίσματος και αν ανοίξει λογαριασμό εγχώριου νομίσματος, τα χρήματα αυτά θα ανατοκίζονται με ένα ετήσιο επιτόκιο  $i_d$  που αφορά στο εγχώριο νόμισμα.
- Για παράδειγμα αν το  $i_d$  είναι επιτόκιο απλού ανατοκισμού, θα εισπράξει  $\frac{M}{S_1}(1+i_dT)$  μετά από  $T$  έτη. Αν ο ανατοκισμός είναι συνεχής, το τελικό κεφάλαιο θα είναι  $\frac{M}{S_1}e^{i_dT}$ .
- Για καθέναν από αυτούς τους λογαριασμούς μπορούμε να βρούμε αντίστοιχα Γενικευμένα Πραγματικά Επιτόκια, αν θέλουμε να μετατρέψουμε ένα είδος κεφαλαιοποίησης σε ένα άλλο με όρους πλέον διαφορετικών νομισμάτων. Για παράδειγμα το ΓΠΕ συνεχούς ανατοκισμού σε ξένο νόμισμα  $i_{r,f}$  αν ο καταθετικός λογαριασμός του ξένου νομίσματος είναι τέτοιος ώστε το  $i_f$  να είναι επιτόκιο απλού ανατοκισμού, δίνεται από τη σχέση

$$e^{i_{r,f}T} = (1 + i_fT).$$

Παρομοίως εργαζόμαστε και στις άλλες περιπτώσεις.

## 1 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Καταθέτης τοποθετεί αρχικά στην τράπεζα ποσό 2000. Το ποσό αυτό ανατοκίζεται για δύο χρόνια με ετήσιο επιτόκιο  $i = 0.1$ . Στη λήξη του πρώτου τετραμήνου ο καταθέτης αποσύρει 100 ευρώ, ενώ στην λήξη του πρώτου έτους καταθέτει άλλα 300 ευρώ. Ποιο είναι το ποσό που θα εισπράξει τελικά στο τέλος της χρονικής περιόδου;
2. Καταθέτης τοποθετεί αρχικά στην τράπεζα ποσό 2000. Το ποσό αυτό ανατοκίζεται για τέσσερα χρόνια με ετήσιο επιτόκιο  $i = 0.1$ . Στη λήξη του πρώτου τριμήνου ο καταθέτης αποσύρει 200 ευρώ, στη λήξη του πρώτου εξαμήνου τοποθετεί άλλα 500, ενώ στο τέλος του έτους αποσύρει άλλα 400 για τις προσωπικές του ανάγκες. Στο πρώτο εξάμηνο του δεύτερου έτους κερδίζει ένα λαχείο 800 ευρώ και το τοποθετεί κάθε εξάμηνο με καταθέσεις των 200 ευρώ στο λογαριασμό του. Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό του στο τέλος των τεσσάρων ετών ; Καταρτίστε το σχετικό πινάκιο.
3. Δανός πάει σε ελληνική τράπεζα με 100 κορώνες και θέλει να τις ανταλλάξει με ευρώ. Βλέπει στον πίνακα για τη Δανική Κορώνα, Τ.Α.= 7.123 και Τ.Π.=7.322. Πόσα ευρώ θα πάρει ;
4. Έλληνας θέλει να δανειστεί ελβετικά φράγκα. Μπορεί να δανειστεί όμως μέχρι 10000 και την ημέρα που πάει να συνάψει το δάνειο βλέπει Τ.Α. για το ελβετικό φράγκο 1.022 και Τ.Π. 1.11. Αν αποφασίσει να δανειστεί τελικά 10000 και το επιτόκιο αποπληρωμής είναι  $i_f = 0.05$  με διάρκεια 5 χρόνια πόση είναι η δόση σε φράγκα και πόση σε ευρώ ;

### Απαντήσεις των ασκήσεων

1. Στο πρώτο τετράμηνο οι τόκοι που θα ενσωματωθούν στα αρχικά 2000 ευρώ είναι  $\frac{200}{3}$  και επίσης ο καταθέτης αποσύρει 100 ευρώ. Άρα στο τέλος του πρώτου τετραμήνου υπάρχουν στο λογαριασμό  $\frac{5900}{3}$  ευρώ. Αυτά τοκίζονται για άλλους οκτώ μήνες μέχρι το τέλος του πρώτου έτους, οπότε οι τόκοι που θα ενσωματωθούν στο ποσό αυτό είναι 131.111 ευρώ. Παράλληλα ο καταθέτης τοποθετεί άλλα 300 ευρώ στο τέλος του πρώτου έτους, άρα το συνολικό ποσό που έχει ο λογαριασμός του καταθέτη είναι τώρα 2397.8 ευρώ. Αυτό το ποσό θα τοκιστεί για ολόκληρο το δεύτερο έτος και οι τόκοι που θα αποδώσει είναι 239.778 ευρώ. Άρα το τελικό ποσό του λογαριασμού του καταθέτη είναι 2637.56 ευρώ.
2. Η άσκηση 2 αφήνεται για λύση στον αναγνώστη.
3. Εφ' όσον η τράπεζα αγοράζει τις Δανικές κορώνες, ο συναλλασσόμενος θα λάβει  $\frac{100}{7.123} = 14.039$  ευρώ.
4. Εφ' όσον ο δανειζόμενος αγοράζει ελβετικά φράγκα, τότε το ποσό των φράγκων που θα αγοράσει είναι  $10000 \cdot 1.1 = 11000$  φράγκα. Αν υποθέσουμε ότι το δάνειο εξοφλείται ληξιπρόθεσμα, τότε η παρούσα αξία της ράντας μίας μονάδας ελβετικού φράγκου με ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο  $i_f = 0.05$  είναι  $a(5, 0.05) = 4.198$ . Άρα η ετήσια ληξιπρόθεσμη δόση για την εξόφληση του δανείου είναι περίπου  $L = \frac{11000}{4.198} = 2620.3$  ελβετικά φράγκα (σταθερό ποσό). Δηλαδή ίση με  $\frac{2620.3}{1.022} \cong 2563.89$  ευρώ (μεταβλητό ποσό ανάλογα με την ισοτιμία).