

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΧΡΗΜΑΤΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α' ΕΞΑΜΗΝΟ

4η ενότητα

ΟΜΟΛΟΓΑ

Διδάσκων: Χ. Κουντζάκης

1. Τα **ομόλογα** είναι τα σημαντικότερα αξιόγραφα της κατηγορίας αξιογράφων **σταθερού εισοδήματος**. Αυτό σημαίνει ότι ο κάτοχος του αξιογράφου αυτού γνωρίζει με την αγορά του αξιογράφου τις αποδόσεις που θα εισπράξει και σε ποιες χρονικές περιόδους θα τις εισπράξει.
2. Ένα ομόλογο είναι ένας τίτλος (αξιόγραφο) βάσει του οποίου ο κάτοχός του εισπράττει ένα προσυμφωνημένο ποσό F (face-value) στο τέλος της χρονικής περιόδου της σύμβασης, το οποίο ονομάζεται **ονομαστική αξία** του ομολόγου.
3. Ενδιάμεσα, σε ετήσια συχνότητα ή με μεγαλύτερη συχνότητα, ο κάτοχος του ομολόγου εισπράττει το λεγόμενο **κουπόνι** C που είναι συνήθως ο τόκος επί της ονομαστικής αξίας βάσει ενός προσυμφωνημένου επιτοκίου i , το οποίο συνήθως είναι ετήσιο.
4. Επομένως ένα ομόλογο είναι ουσιαστικά μία χρηματοροή που οι όροι της είναι τα κουπόνια C στις ενδιάμεσες χρονικές περιόδους και η ονομαστική αξία F στη λήξη. Τα χρονικά διαστήματα μεταξύ των ενδιάμεσων χρονικών περιόδων είναι συνήθως ίσα μεταξύ τους.
5. Τα ομόλογα αποτελούν εργαλεία δανεισμού και εκδίδονται είτε από κράτη, είτε σπανιότερα από εταιρίες. Ο εκδότης του ομολόγου έχει άμεση ανάγκη από χρήματα και προβαίνει στην έκδοση του ομολόγου, δανειζόμενος ένα ποσό από τους αγοραστές του ομολόγου. Όσο πιο μεγάλη ανάγκη έχει για χρήματα, τόσο πιο μεγάλο κουπόνι θα υπόσχεται στο δανειστή, δηλαδή μεγαλύτερο επιτόκιο.
6. Τα ομόλογα διαπραγματεύονται σε οργανωμένες αγορές, στις οποίες **δημοπρατούνται** τα ομόλογα. Ωστόσο υπάρχει και η λεγόμενη **δευτερογενής** αγορά ομολόγων, στην οποία γίνονται κυρίως απευθείας διαπραγματεύσεις μεταξύ ενδιαφερομένων. Στη δευτερογενή αγορά συνήθως κάτοχοι ομολόγων και υποψήφιοι αγοραστές προσέρχονται σε διαπραγμάτευση και καταλήγουν σε **τιμές συμφωνίας** για τα ομόλογα οι οποίες είναι κάτω από την ονομαστική αξία τους.
7. Τέλος στις οργανωμένες αγορές πραγματοποιούνται **μαζικές αγορές και πωλήσεις** χαρτοφυλακίων ομολόγων, μαζί με άλλα αξιόγραφα.
8. Το επιτόκιο i είναι το κύρια διαπραγματεύσιμο σε μια έκδοση ομολόγων. Πιο αναλυτικά, αν υποθέσουμε ότι ο δανειζόμενος έχει στο μυαλό του να καλύψει έκδοση ομολογιακού δανείου ύψους D νομισματικών μονάδων της χώρας του που αντιστοιχεί σε N τίτλους (ομόλογα), τότε η παρούσα αξία του ενός τίτλου είναι $\frac{D}{N}$. Αν θεωρήσουμε ότι οι όροι του δανείου είναι διάρκεια n έτη και ονομαστική αξία F για κάθε τίτλο, τότε αυτό που απομένει να καθοριστεί είναι το επιτόκιο του κουπονιού. Ο δανειστής για να μην αποχωρήσει από τη δημοπρασία θα αφήσει το δανειζόμενο να αυξήσει το επιτόκιο έτσι ώστε να παραμείνει ο ίδιος -αν θέλει φυσικά. Βέβαια αυτό θα οδηγήσει στην εξίσωση των παρούσων αξιών της χρηματοροής του ομολόγου $X_1 = Fi, \dots, X_{n-1} = Fi, X_n = F(1+i)$, με την παρούσα αξία της χρηματοροής της καταβολής της αξίας της από το δανειστή $\frac{D}{N}$ μετά τη συμφωνία για το επιτόκιο.
9. Πολλές φορές αυτό που εμφανίζεται ως βέβαιο, δεν είναι. Δηλαδή η καταβολή των κουπονιών και η καταβολή της ονομαστικής αξίας στο δανειστή, ενδέχεται να μην μπορεί να πραγματοποιηθεί. Αυτή είναι μια περίπτωση αυτού που στα χρηματοοικονομικά ονομάζεται **κίνδυνος αθέτησης**.
10. Στα εταιρικά ομόλογα (corporate bonds), σε περίπτωση πτώχευσης της επιχείρησης οι κάτοχοι ομολόγων αποζημιώνονται πρώτοι έναντι των μετόχων.

11. Ποια είναι όμως η παρούσα αξία ενός ομολόγου; Αν υποθέσουμε ότι το ετήσιο επιτόκιο υπολογισμού του κουπονιού είναι σταθερό και ίσο με i και **ίδιο με το επιτόκιο συμφωνίας!** και η ονομαστική αξία του ομολόγου είναι F , τότε αν η ονομαστική αξία καταβάλλεται μετά από n έτη, οι όροι της χρηματοροής του ομολόγου είναι $X_k = C = Fi$ για $k = 1, 2, \dots, n-1$ και $X_n = F + C = F + Fi = F(1+i)$. Αν το ίδιο επιτόκιο είναι το επιτόκιο με το οποίο εξελίσσεται η αξία του χρήματος, τότε η παρούσα αξία της χρηματοροής του ομολόγου είναι

$$\frac{Fi}{1+i} + \frac{Fi}{(1+i)^2} + \dots + \frac{Fi}{(1+i)^{n-1}} + \frac{F(1+i)}{(1+i)^n} = Fi \cdot a(n, i) + \frac{F}{(1+i)^n},$$

όπου $a(n, i)$ είναι η παρούσα αξία της ληξιπρόθεσμης ράντας 1 νομισματικής μονάδας, n ετών και ετήσιου επιτοκίου i .

12. Αν το επιτόκιο με το οποίο εξελίσσεται η αξία του χρήματος είναι **διαφορετικό από το επιτόκιο συμφωνίας -που είναι και η πιο συνηθισμένη περίπτωση** και είναι ίσο με i_1 , τότε η αντίστοιχη σχέση είναι

$$\frac{Fi}{1+i_1} + \frac{Fi}{(1+i_1)^2} + \dots + \frac{Fi}{(1+i_1)^{n-1}} + \frac{F(1+i)}{(1+i_1)^n} = Fi \cdot a(n, i_1) + \frac{F}{(1+i_1)^n}.$$

13. Αν το κουπόνι δεν έχει σχέση με τον τόκο που υπολογίζεται επί της ονομαστικής αξίας κάθε χρόνο, τότε η παρούσα αξία του ομολόγου είναι

$$\frac{C}{1+i_1} + \frac{C}{(1+i_1)^2} + \dots + \frac{C}{(1+i_1)^{n-1}} + \frac{F+C}{(1+i_1)^n} = C \cdot a(n, i_1) + \frac{F}{(1+i_1)^n}.$$

14. Αν τα τρέχοντα επιτόκια με τα οποία εξελίσσεται η αξία του χρήματος διαφοροποιούνται μεταξύ των περιόδων, τότε υπολογίζουμε τμηματικά την παρούσα αξία χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις, αλλάζοντας τα επιτόκια όπου χρειάζεται και αθροίζοντας τις επιμέρους παρούσες αξίες. Το ίδιο και αν το επιτόκιο δίνεται από μια συνάρτηση (καμπύλη επιτοκίων) $i(t)$, $0 \leq t \leq n$.

15. Η παρούσα αξία είναι ουσιαστικά το ποσό που δανείστηκε ο εκδότης του ομολόγου. Αν θέλουμε να δανειστούμε ένα συγκεκριμένο ποσό μέσω της έκδοσης ενός ομολόγου -το οποίο μάλιστα είναι μόνο ένας **τίτλος ομολογιακού δανείου** (με την έννοια ότι πολλαπλάσιοι τίτλοι μπορούν να αγοραστούν από τους δανειστές του εκδότη)- τότε συνήθως το επιτόκιο δανεισμού καθορίζεται από την ανάγκη του δανειζόμενου να δανειστεί και την διαθεσιμότητα του δανειστή να δανείσει. Δηλαδή από την ζήτηση και την προσφορά χρήματος εκείνη τη δεδομένη στιγμή.

16. Μέτρο σύγκρισης της **τρέχουσας τιμής** ενός ομολόγου -τίτλου ομολογιακού δανείου είναι η ονομαστική αξία του. Η τρέχουσα τιμή αγοράς είναι η τιμή στην οποία ο αγοραστής ενός ομολόγου αγοράζει το ομόλογο κάποια στιγμή και τρέχουσα τιμή πώλησης είναι η τιμή στην οποία ο πωλητής του ομολόγου πωλεί το ομόλογο κάποια στιγμή.

17. Στις οργανωμένες αγορές όπου αγοράζονται και πωλούνται **χαρτοφυλάκια τίτλων** που μεταξύ άλλων περιλαμβάνουν και ομόλογα -δηλαδή μερίδια ομολογιακών δανείων- οι τιμές αγοράς και πώλησης είναι διαφορετικές μεταξύ τους, δηλαδή υπάρχει και εδώ ένα bid-ask spread. Στη **δευτερογενή αγορά** όπου μπορεί να υπάρξει συμφωνία απευθείας μεταξύ δύο ενδιαφερομένων, η εκάστοτε τιμή συμφωνίας μπορεί να θεωρηθεί μια δυνητική τρέχουσα τιμή του τίτλου.

18. Η τιμή στην οποία δημοπρατείται το ομόλογο, δηλαδή όταν γίνεται η πρόσκληση προς τους δανειστές, είναι επίσης μια μορφή τρέχουσας τιμής -την τιμή της σύναψης του ομολογιακού δανείου.

19. Συνήθως οι τιμές των ομολόγων αναφέρονται ως ποσοστά της ονομαστικής αξίας του μεριδίου. Συνήθως στη δευτερογενή αγορά, τα ομόλογα είναι φθηνότερα από την τιμή δημοπράτησής τους.

20. Μια μορφή ομολογιακού δανείου είναι τα **έντοκα γραμμάτια** του Δημοσίου. Εκεί το κράτος δανείζεται χρήματα από τους πολίτες. Στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε χαρακτηριστικά αγοράς. Το επιτόκιο του κουπονιού και η ονομαστική αξία κάθε μεριδίου, καθορίζονται με απόφαση της κυβέρνησης.

21. Η παρούσα αξία του ομολόγου είναι όμως και μια **οικονομικά ορθή** τιμολόγησή του εκ των υστέρων -δηλαδή εφ'όσον γνωρίζουμε το επιτόκιο που διαμορφώθηκε στη δημοπρασία του ομολογιακού δανείου. Αν θέλουμε να βρούμε ποια χρηματοροή είναι **οικονομικά ισοδύναμη** με τη χρηματοροή των κουπονιών και της ονομαστικής αξίας ενός ομολόγου τη χρονική περίοδο 0, αυτή είναι εκείνη που έχει ως μοναδικό όρο την παρούσα αξία της χρηματοροής του ομολόγου.

22. Αν ονομάσουμε $PV(B)$ την παρούσα αξία ενός ομολόγου τη χρονική περίοδο 0 και F την ονομαστική του αξία, τότε αν $PV(B) = F$ λέμε ότι το ομόλογο **τιμάται στο άρτιο** (at par).
23. Αν $PV(B) < F$, λέμε ότι το ομόλογο **τιμάται υπό το άρτιο** (below par).
24. Αν $PV(B) > F$, λέμε ότι το ομόλογο **τιμάται υπέρ το άρτιο** (at a premium).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Χώρα A θέλει να δανειστεί 10.000.000 με ρήτρα νμ B, εκδίδοντας 1000 μερίδια ομολογιακού δανείου. Το επιτόκιο δανεισμού διαμορφώνεται σε ύψος $i_1 = 0.10$ ενώ η συναλλαγματική ισοτιμία μεταξύ νομίσματος χώρας A και νομίσματος χώρας B τη στιγμή σύναψης του δανείου είναι T.A. 1.22 νμB/νμA και T.Π. 1.27 νμB/νμA. Ποια θα είναι η ονομαστική αξία του ενός μεριδίου του ομολόγου σε νμB και σε νμA εάν η έκδοση καλυφθεί στο 100 τοις εκατό και η περίοδος αποπληρωμής είναι $n = 10$ έτη, δεδομένου ότι το επιτόκιο εξέλιξης της αξίας του χρήματος είναι ίδιο με το επιτόκιο της συμφωνίας ;
2. Αν μετά από δύο έτη η τρέχουσα τιμή του ομολόγου είναι στο 75 τοις εκατό της ονομαστικής του αξίας, τι συμφέρει τον κάτοχο ενός μεριδίου του ομολογιακού δανείου, δεδομένου ότι το επιτόκιο εξέλιξης της αξίας του χρήματος είναι ίδιο με το επιτόκιο της συμφωνίας ; Να το κρατήσει μέχρι τη λήξη του ή να το πουλήσει;
3. Χώρα A θέλει να εκδόσει ομολογιακό δάνειο με τη μορφή των εντόκων γραμματίων του Δημοσίου. Αν το κράτος σχεδίαζε να καλύψει έκδοση 10000 τίτλων αποτελούμενων από 5000 τίτλους επιτοκίου $i_1 = 0.20$, 2000 τίτλους επιτοκίου $i_2 = 0.15$ και 3000 τίτλους επιτοκίου $i_3 = 0.1$, ο πρώτος τίτλος είναι δεκαετής, ο δεύτερος πενταετής και ο τρίτος τετραετής, ενώ η έκδοση καλύφθηκε για όλα τα είδη στο 75 τοις εκατό, τι χρήματα άντλησε το κράτος αν η ονομαστική αξία κάθε τίτλου είναι 100 νμ A ; Το τρέχον επιτόκιο τη στιγμή που εγγράφονται οι πολίτες στα έντοκα γραμμάτια είναι $i_0 = 0.12$.
4. Υπάρχει επιτόκιο συμφωνίας μεταξύ δανειστή και δανειζόμενου τέτοιο ώστε η τιμή ενός 4- ομολόγου την χρονική περίοδο 0 είναι στο άρτιο άρτιο αν με το ίδιο επιτόκιο εξελίσσεται η αξία του χρήματος ;

Λύσεις

1. Σύμφωνα με τα όσα έχουμε πει η Χώρα A θα δανειστεί το ποσό των 819672 νμ χώρας A = $\frac{10000000}{1.22}$ τα οποία αποτελούν 1000 τίτλους ομολόγων (δεδομένου ότι όταν έχουμε ποσό του ξένου νομίσματος, για να βρούμε τις αξίες σε εγχώριο χρησιμοποιούμε την ισοτιμία T.A). Άρα η παρούσα αξία κάθε τίτλου είναι 819.672 νμ A, δεδομένου ότι η έκδοση καλύπτεται στο 100 τοις εκατό. Για να βρούμε την ονομαστική αξία θα πρέπει να λύσουμε την πρωτοβάθμια εξίσωση

$$819.672 = F \cdot 0.1 \cdot a(10, 0.1) + \frac{F}{(1.10)^{10}},$$

όπου $a(10, 0.1)$ είναι η παρούσα αξία της ληξιπρόθεσμης ράντας μίας νμ B διάρκειας 10 ετών με επιτόκιο $i = 0.1$. Δηλαδή έχουμε

$$819.672 = F \cdot 0.1 \cdot 6.144 + F \cdot 0.385543 = 0.999943F.$$

Άρα $F \cong 819.718$ νμ A.

2. Η τρέχουσα τιμή του ομολόγου είναι $0.75F$. Η παρούσα αξία των κουπονιών που έχει ακόμη να εισπράξει συν την ονομαστική αξία είναι

$$\begin{aligned} \frac{Fi}{(1+i)} + \frac{Fi}{(1+i)^2} + \frac{Fi}{(1+i)^3} + \frac{Fi}{(1+i)^4} + \frac{Fi}{(1+i)^5} + \frac{Fi}{(1+i)^6} + \frac{Fi}{(1+i)^7} + \frac{F+Fi}{(1+i)^8} = \\ = Fia(8, 0.1) + \frac{F}{1.1} = 0.5253F + 0.513F. \end{aligned}$$

Άρα η παρούσα αξία στο τέλος του δεύτερου έτους της υπολειπόμενης χρηματοροής είναι το 103.8 τοις εκατό της ονομαστικής αξίας του ομολόγου F , ενώ ο κάτοχος του ομολόγου αν πουλήσει το ομόλογό του θα λάβει 75 τοις εκατό της ονομαστικής του αξίας. Άρα τον συμφέρει να κρατήσει το ομόλογο και να μην το πουλήσει.

3. Αφήνεται στον αναγνώστη.

4. Είναι

$$aF = \frac{iF}{1+i} + \frac{iF}{(1+i)^2} + \frac{iF}{(1+i)^3} + \frac{F(1+i)}{(1+i)^4}.$$

Δηλαδή,

$$a = \frac{i}{1+i} + \frac{i}{(1+i)^2} + \frac{i}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^3} = \frac{i}{1+i} + \frac{i}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^2}.$$

Με τη σειρά της η τελευταία εξίσωση συνεπάγεται ότι

$$a = \frac{i}{1+i} + \frac{1}{1+i} = 1.$$

Για κάθε επιτόκιο συμφωνίας λοιπόν ισχύει η ζητούμενη ισότητα. Το αποτέλεσμα μπορεί να γενικευτεί για οποιαδήποτε χρονική διάρκεια n .

ΑΝΑΦΟΡΕΣ M.Musiela, M.Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer (1998)