ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΧΡΗΜΑΤΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Α′ ΕΞΑΜΗΝΟ
4η ενότητα
ΟΜΟΛΟΓΑ -ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΝ ΚΙΝΔΥΝΟ ΑΘΕΤΗΣΗΣ ΤΙ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ΑΝΑΔΙΑΡΘΡΩΣΗ ΧΡΕΟΥΣ;

Διδάσκων: Χ. Κουντζάκης

1. Αναφέραμε ότι στην περίπτωση των ομολόγων υπάρχει ο λεγόμενος **κίνδυνος αθέτησης**, δηλαδή ό δανειζόμενος να μην μπορέσει να καταβάλλει στο δανειστή τα κουπόνια και την ονομαστική αξία του ομολόγου.

2. Βέβαια αυτό συμβαίνει με κάποια πιθανότητα και συνήθως αφορά κάποια από τα κουπόνια της χρηματοροής του ομολόγου. Δηλαδή υπάρχει μία ενδεχόμενη -δηλαδή τυχαία χρονική περίοδος N κατά την οποία η χρηματοροή του ομολόγου χωρίζεται σε δύο μέρη. Στα κουπόνια $C_1, C_2, ..., C_N$ που δεν έχουν αποπληρωθεί και στα κουπόνια $C_{N+1}, C_{N+2}, ..., C_n$ τα οποία έχουν αποπληρωθεί. Το κουπόνι C_n συμπεριλαμβάνει την καταβολή της ονομαστικής αξίας F του ομολόγου. Οι τιμές της N είναι $n - K$ όπου $K = k$ η τυχαία μεταβλητή με τιμές $k = 0, 1, 2, ..., n$, όπου k το πλήθος των κουπονιών που έχει αποπληρωθεί, αρχίζοντας από το τελευταίο.

3. Η τυχαία μεταβλητή N μπορεί να ονομαστεί **χρόνος αθέτησης**. Στην περίπτωση που $N = 0$ δεν υπάρχει αθέτηση, ενώ στην περίπτωση που $N = n$ μπορεί η αθέτηση να ονομαστεί **απόλυτη αθέτηση**.

4. Συμβατικά, το ενδεχόμενο $K = 0$ σημαίνει ότι όλα τα κουπόνια δεν πληρώνονται, ενώ το n στην περίπτωση της K σημαίνει ότι όλα τα κουπόνια πληρώνονται. Στην περίπτωση $K = 0$ είμαστε στην περίπτωση της απόλυτης αθέτησης.

5. Αν υποθέσουμε ότι σε κάθε χρονική περίοδο το κουπόνι του ομολόγου έχει την ίδια πιθανότητα p να πληρωθεί από το δανειζόμενο στο κάτοχο του ομολόγου (δανειστή) και την ίδια πιθανότητα να μην πληρωθεί $q = 1-p$, ενώ το γεγονός της πληρωμής ή μη πληρωμής ενός κουπονιού σε ορισμένη χρονική περίοδο k είναι ανεξάρτητο από την πληρωμή ή τη μη πληρωμή του κουπονιού στην περίοδο $k - 1$ και στην $k + 1$ (αναφερόμαστε σε προηγούμενη και επόμενη χωρίς βλάβη της γενικότητας) τότε η πιθανότητα αθέτησης είναι $P(K = k) = p^k q^{n-k}$. Η πιθανότητα μη αθέτησης είναι p^n και η πιθανότητα απόλυτης αθέτησης είναι q^n. Αν αθροίσουμε τις πιθανότητες αυτές, το άθροισμα δεν είναι 1, διότι αποκλείουμε την περίπτωση να μην πληρώνονται k από τα n κουπόνια σε οποιεσδήποτε χρονικές περιόδους. Τότε η κατανομή της πιθανότητας αθέτησης είναι διωνυμική
$$\binom{n}{k} p^{n-k} q^k.$$

6. Τότε, η χρηματοροή του ομολόγου $C_1, C_2, ..., C_n$ από βέβαιη γίνεται τυχαία ή αλλιώς ενδεχόμενη και ανάλογα με την παρούσα αξία των καταβληθέντων κουπονιών ορίζεται και η έννοια της **ενδεχόμενης παρούσας αξίας**. Για παράδειγμα αν $K = n - 1$, τότε σύμφωνα με τα προηγούμενα σε αυτό το ενδεχόμενο αντιστοιχεί παρούσα αξία
$$C_1 v^1 + ... + C_{n-1} v^{n-1}$$
με πιθανότητα $p^{n-1} q$. Άρα η ενδεχόμενη παρούσα αξία είναι το γινόμενο της παρούσας αξίας επί την αντίστοιχη πιθανότητα.

7. Αν υποθέσουμε ότι ο δανειζόμενος χρεωκοπεί όταν $K = n - k$ και αδυνατεί μέχρι τη στιγμή n να πληρώσει τα κουπόνια του ομολόγου. Πώς ο δανειστής θα πάρει πίσω τα λεφτά του; Η παρούσα αξία του ομολόγου είναι $\sum_{t=1}^{n} C_t v^t, v = \frac{1}{1+i}$. δηλαδή ο δανειζόμενος πρέπει να αποπληρώσει το τμήμα της παρούσας αξίας $\sum_{t=1}^{k} C_t v^t, v = \frac{1}{1+i}$.

8. Θα πρέπει λοιπόν να σχηματιστεί μετά την περίοδο n μία νέα χρηματοροή -κατά προτίμηση τόσων όρων όσων και οι όροι που δεν αποπληρώθηκαν- που να είναι ισοδύναμη με τη χρηματοροή των κουπονιών που δεν αποπληρώθηκαν. Αυτό ακριβώς είναι περίπου και η αναδιάρθρωση του δημόσιου χρέους. Δηλαδή για μία χρηματοροή $(C_{n+1}, C_{n+2}, ..., C_{n+k})$ και επιτόκιο i_1 που δίνει συντελεστή προεξόφλησης $v_1 = \frac{1}{1+i_1}$ θα πρέπει να ισχύει
$$\sum_{t=1}^{k} C_t v^t = \sum_{t=1}^{k} C_{n+t} v_1^{n+t}.$$

9. Αν σε κάθε περίοδο υποθέσουμε ότι εξοφλείται εκείνο το τμήμα του χρέους που αντιστοιχούσε σε κάθε όρο της συνολικής παρούσας αξίας με τον αντίστοιχο τόκο, λαμβάνομε ότι
$$C_t v^t = C_{n+t} v_1^{n+t},$$
δηλαδή ισοδύναμα
$$\frac{C_t}{C_{n+t}} = v_1^n \frac{(1+i)^t}{(1+i_1)^t}, t = 1, 2, , ..., k.$$

10. Αυτό σημαίνει ότι μία αύξηση του νέου επιτοκίου σε σχέση με το παλαιό σημαίνει ανάλογη αύξηση όλων των καταβαλλόμενων κουπονιών.

11. Αν το ομόλογο που εκδίδει μία χώρα που είναι σε πρόγραμμα αναδιάρθρωσης χρέους είναι μοναδικό, τότε κατά τα παραπάνω έχουμε
$$C_{n+t} v_1^{n+t} = C_t v^t, t = 1, 2, ..., k,\ v = \frac{1}{1+i}, v_1 = \frac{1}{1+i_1}.$$
Αν μας δίνεται το επιτόκιο αναδιάρθωσης χρέους, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το νέο κουπόνι $C_{n+t}, t = 1, 2, ..., k$.

12. Αν υπολογιστούν τα κουπόνια $C_{n+1}, C_{n+2}, ..., C_{n+m}$ μετά από χρόνο m, τότε η χώρα που εξέδωσε το ομόλογο οφείλει το τμήμα της αρχικής παρούσας αξίας του ομολόγου
$$C_{m+1} v^{m+1} + ... + C_k v^k$$
στους δανειστές.

13. Αν ένας δανειστής έχει στην κατοχή του ομόλογα στα οποία η χώρα έχει κηρύξει αθέτηση, δηλαδή θεωρούμε έναν αντιπροσωπευτικό δανειστή έναντι της χώρας που κατέχει το χαρτοφυλάκιο των χρεωκοπημένων ομολόγων, τότε αν υποθέσουμε ότι αυτό το χαρτοφυλάκιο είναι το $(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_J) \in \mathbb{R}^J_{++}$, τότε αν υποθέσουμε ότι για κάθε ένα από αυτά τα ομόλογα υπάρχει κοινή διάρκεια n και χρόνος αθέτησης $K_j = k$, σύμφωνα με το πιο απλό σχήμα αναδιάρθρωσης χρέους, μπορούμε να υπολογίσουμε το συνολικό χρέος.

14. Θεωρούμε ένα νέο ενιαίο επιτόκιο δανεισμού της χώρας i_1 από τον αντιπροσωπευτικό δανειστή, τέτοιο ώστε για τα νέα κουπόνια του χαρτοφυλακίου να ισχύει
$$C_{n+t}(\theta) v_1^{n+t} = \sum_{j=1}^{J} \theta_j C_{t,j} v^t, t = 1, 2, ..., k,\ v = \frac{1}{1+i}, v_1 = \frac{1}{1+i_1}.$$

15. Ο κίνδυνος αθέτησης εμφανίζεται και στα κοινά δάνεια, στα οποία ο δανειζόμενος αδυνατεί να αποπληρώσει τις δόσεις του δανείου του από μία χρονική περίοδο k και πριν. Έτσι στο σχήμα αναδιάρθρωσης του δανείου, η τράπεζα αλλάζει το επιτόκιο και τη δόση για να διευκολύνει το δανειζόμενο να αποπληρώσει το δάνειο σε ίσο για παράδειγμα πλήθος περιόδων με αυτό των δόσεων που οφείλει. Έτσι, αν ο δανειζόμενος πλήρωνε ενιαία ετήσια δόση A με ετήσιο επιτόκιο i, τώρα βάσει του γενικού σχήματος αναδιάρθρωσης χρέους που αναφέραμε για τα ομόλογα θα πληρώνει ετήσια δόση A_1 με επιτόκιο i_1. Άρα ισχύει η ακόλουθη εξίσωση παρουσών αξιών
$$A' v_1^{n+t} = A v^t, t = 1, 2, ..., k,\ v = \frac{1}{1+i}, v_1 = \frac{1}{1+i_1}.$$

16. Για τη σύγκριση των δόσεων A, A' έχουμε τα εξής. Αν $i > i_1$, τότε $A' > A(1+i_1)^n$. Αν $i < i_1$, τότε $A' < A(1+i_1)^n$. Αν $i = i_1$, τότε $A' = A(1+i_1)^n$.

17. Οι οίκοι πιστοληπτικής αξιολόγησης όταν βαθμολογούν τα ομόλογα μίας χώρας και τους αποδίδουν διάφορους χαρακτηρισμούς από AAA μέχρι D (junk bonds) βάσει και του λεγόμενου επιτοκίου συμφωνίας που ονομάζεται και επιτόκιο κουπονιού (coupon-rate), όταν τα κουπόνια είναι της μορφής Fi, όπου F είναι η ονομαστική αξία του ομολόγου.

18. Οι τρέχουσες τιμές των ομολόγων διαμορφώνονται στη δευτερογενή αγορά και όπως είπαμε μπορεί να θεωρηθεί ότι απορρέουν από την αποτίμηση της χρηματοροής με κάποιο ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο που εκφράζει την εξέλιξη της αξίας του χρήματος σε έναν τραπεζικό λογαριασμό. Αυτό το επιτόκιο i_2 ονομάζεται **απόδοση στη λήξη** (yield-to-maturity). Αν η απόδοση στη λήξη είναι μεγαλύτερη από το επιτόκιο κουπονιού, τότε η τρέχουσα τιμή είναι χαμηλότερη από την ονομαστική αξία (τιμολόγηση υπό το άρτιο), ενώ αν είναι μικρότερη έχουμε τιμολόγηση υπέρ το άρτιο. Στη δεύτερη περίπτωση, αναφερόμαστε στην περίπτωση που δεν έχουν πληρωθεί τα κουπόνια.

19. Στην περίπτωση όπου τα κουπόνια έχουν τη μορφή Fi_c, όπου το i_c είναι το επιτόκιο κουπονιού, ενώ η απόδοση στη λήξη είναι i_2 το επιτόκιο με το οποίο συγκρίνεται το επιτόκιο αναδιάρθρωσης του χρέους είναι η απόδοση στη λήξη διότι αυτή καθορίζει την αρχική παρούσα αξία της χρηματοροής του ομολόγου.