

Στα επόμενα θεωρούμε $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: χώρο πιθανότητας και $[0, T]$ χρονικό ορίζοντα με $T > 0$. Επίσης θεωρούμε \mathbb{F} : διήθηση του χώρου πιθανότητας σχετική με το χρονικό ορίζοντα που προαναφέρθηκε καθώς επίσης και $(B_t, t \in [0, T])$: τυπική κίνηση Brown σε αυτόν. Η διάστασή της εξαρτάται από τα ζητούμενα της άσκησης.

1. Να λυθεί αφού πρώτα αποδειχθεί ότι υπάρχει ισχυρή λύση της, η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = 4X_t dt + 2dB_t, X_0 = x > 0.$$

2. Να λυθεί η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = \frac{1}{X_t} dt + 2X_t dB_t, X_0 = x > 0.$$

3. Να λυθεί η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = -2dt + \sqrt{X_t} dB_t, X_0 = x > 0.$$

4. Να υπολογιστεί το στοχαστικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^T e^{X_t} dX_t,$$

αν

$$dX_t = X_t dt + X_t^2 dB_t, X_0 = x > 0.$$

5. Να υπολογιστεί το στοχαστικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^T e^{B_t} dB_t.$$

6. Να υπολογιστεί το στοχαστικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^T X_t^2 dX_t,$$

αν

$$dX_t = 2X_t^2 dt + \sqrt{X_t} dB_t, X_0 = x > 0.$$

7. Στην παρακάτω αγορά:

$$dX_0(t) = 0, dX_1(t) = dt + 2dB_1(t), dX_2 = 2dt + 2dB_1(t),$$

όπου B_1 είναι τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown και $X_1(0) = x_1, X_2(0) = x_2$, υπάρχει arbitrage; Αν υπάρχει, εξηγήστε πώς μπορούμε να κάνουμε arbitrage.

8. Στην παρακάτω αγορά:

$$dX_0(t) = 0, dX_1(t) = dt + 2dB_1(t) + 2dB_2(t),$$

όπου (B_1, B_2) είναι τυπική 2-διάστατη κίνηση Brown και $X_1(0) = x_1$, υπάρχει arbitrage; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

9. Προσδιορίστε όλα τα ισοδύναμα μέτρα martingale της αγοράς της Άσκησης 8.

10. Αιτιολογήστε με δύο τρόπους γιατί η αγορά της Άσκησης 8 δεν είναι πλήρης.

11. Προσδιορίστε ένα επιτεύξιμο Ευρωπαϊκό Συγκυριακό Συμβόλαιο της αγοράς της Άσκησης 8.

12. Ποια μορφή παίρνει η στοχαστική διαδικασία Itô που περιγράφει την εξέλιξη της no-arbitrage τιμής $B(t, T), t \in [0, T]$ του ομολόγου μηδενικού κουπονιού, αν η στοχαστική διαδικασία του short-term επιτοκίου περιγράφεται από το μοντέλο των Cox-Ingersoll-Ross ;