'ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ'
Λύσεις 2ου φύλλο ασκήσεων

Διδάσκων : Χ. Κουντζάκης

8 Ιουνίου 2010

Άσκηση 1 *Έστω ότι το σύνολο των καταστάσεων του κόσμου είναι το $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ και οι ενέργειές μας εξελίσσονται σε τρεις χρονικές περιόδους $\boldsymbol{T} = \{0,1,2\}$. Έστω ότι η πληροφορία μας για τις καταστάσεις του κόσμου περιγράφεται από τις διαμερίσεις του Ω $F_0 = \{\Omega\}, F_1 = \{\{1,2,3\},\{4,5,6\}\}, F_2 = \{\{\omega\}, \omega \in \Omega\}$. Υποθέτουμε επίσης ότι στην αγορά υπάρχουν διαθέσιμη $d = 1$ μετοχή και ένας τραπεζικός λογαριασμός που περιγράφει την εξέλιξη της αξίας της νομισματικής μονάδας, των οποίων οι ανελίξεις αξίας δίνονται από τα ακόλουθα διανύσματα του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^{\mathbb{D}}$ ($\mathbb{D}$ είναι το δένδρο πληροφόρησης):*

$$S^0 = S^0 = (1, 0.5, 0.5, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}),$$

$$S^1 = (10, 3, 7, 1, 0, 1, 3, 3, 1).$$

(i) Δείξτε ότι στην αγορά δεν υπάρχει arbitrage.

(ii) Έστω ομόλογο με κουπόνι $C = 50$ και ονομαστική αξία $F = 150$. Προσδιορίστε το σύνολο των χαρτοφυλακίων αντιστάθμισης του ομολόγου αν στους κόμβους που αντιστοιχούν στην χρονική περίοδο 1 επιλέγονται χαρτοφυλάκια στα οποία περιέχονται μόνο χρήματα.

(iii) Τιμολογήστε το ομόλογο βάσει ενός χαρτοφυλακίου αντιστάθμισής του.

(iv) Τιμολογήστε το ομόλογο βάσει της παρούσας αξίας της χρηματοροής του, αφού πρώτα προσδιορίσετε την ανέλιξη επιτοκίων που ορίζει ο τραπεζικός λογαριασμός καθώς και τα διανύσματα τιμών των στοιχειωδών αγαθών.

(v) Υπάρχει περίπτωση οι δύο τιμολογήσεις να είναι ίσες ;

Λύση:

(i) Το διάνυσμα τιμών $\pi = (1,1,1,1,1,1,1,1,1)$ είναι ορθογώνιο στις στήλες του πίνακα των αποδόσεων των χρηματοοικονομικών συμβολαίων $W(S)$, άρα δεν υπάρχει arbitrage.

(ii) Ο πίνακας $W(S)$ είναι διαστάσεων 9×6 και είναι ο ακόλουθος πίνακας

$$W(S) = \begin{bmatrix} -1 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} & -3 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 7 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -7 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 1 \end{bmatrix}.$$

Το ομόλογο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα συγκυριακό συμβόλαιο με διάνυσμα απόδοσης στους κόμβους του $\mathbb{D}^+$ το $E = (50, 50, 200, 200, 200, 200, 200, 200)$. Η αγορά των συμβολαίων δεν είναι πλήρης, όπως φαίνεται από τους υποπίνακες του $W(S)$. Το σύνολο των χαρτοφυλακίων αντιστάθμισης του E αποτελείται από τα χαρτοφυλάκια $z = (z(\xi_0), z(\xi_1), z(\xi_2))$ με $S(\xi_2^+) \cdot z(\xi_2) = E(\xi_2^+), S(\xi_1^+) \cdot z(\xi_1) = E(\xi_1^+)$ και $S(\xi_0^+) \cdot z(\xi_0) =$

$E(\xi_0^+) + S(\xi_0^+) \bullet z(\xi_0^+)$. Για τα χαρτοφυλάκια που ικανοποιούν την πρώτη εξίσωση, έχουμε ότι αυτά θα είναι εκείνα για τα οποία

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 3 \\ \frac{1}{6} & 3 \\ \frac{1}{6} & 1 \end{bmatrix} \cdot (a,b) = (200,200,200)^T, \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 1 \\ \frac{1}{6} & 1 \\ \frac{1}{6} & 1 \end{bmatrix} \cdot (c,d) = (200,200,200)^T,$$

όπου $z(\xi_2) = (a,b), z(\xi_1) = (c,d)$. Είναι $(a,b) = (1200,0)$ και $c + 6d = 1200$ με $c, d \in \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι το $z(\xi_0)$ είναι ίσο με (s,t), τότε για τον κόμβο ξ_1 έχουμε $\frac{1}{2}s + 3t - 600 = 50$, και για τον κόμβο ξ_2 έχουμε $\frac{1}{2}s + 7t - \frac{1}{2}c - 7d = 50$.

(iii) Αν το χαρτοφυλάκιο $z(\xi_1)$ περιέχει μόνο μερίδια του τραπεζικού λογαριασμού, τότε οι εξισώσεις για το $z(\xi_0)$ γίνονται $\frac{1}{2}s + 3t - 600 = 50$, $\frac{1}{2}s + 7t - 600 = 50$ και αν $t = 0$, τότε για το χαρτοφυλάκιο $z(\xi_0) = (1300, 0)$ είναι $S(\xi_0) \cdot z(\xi_0) = 1300$ άρα μια τιμολόγηση του ομολόγου είναι στα 1300 ευρώ.

(iv) Η ανέλιξη προεξόφλησης που ορίζει ο τραπεζικός λογαριασμός είναι $\Delta_0^1 = 2, \Delta_2^1 = 3$. Η στοχαστική παρούσα αξία κατά την περίοδο 0 της χρηματοροής του ομολόγου είναι ίση με $NPV_0 = \Delta_0^1 \cdot C + \Delta_0^2 \cdot (C + F)$ εφ' όσον σε όλους τους κόμβους της περιόδου 1 εισπράττεται το κουπόνι C και σε όλους τους κόμβους της περιόδους 2 το κουπόνι μαζί με την ονομαστική αξία F.

(v) Αντικαθιστώντας στον τύπο της NPV_0 τα νούμερα, έχω ότι $NPV_0 = 2 \cdot 50 + 6 \cdot 200 = 100 + 1200 = 1300$. Άρα η τιμολόγηση αυτή συμπίπτει με την τιμολόγηση βάσει του χαρτοφυλακίου του ερωτήματος (iii).

Άσκηση 2 *Έστω ότι το σύνολο των καταστάσεων του κόσμου είναι το* $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ *και οι ενέργειές μας εξελίσσονται σε δύο χρονικές περιόδους* $\boldsymbol{T} = \{0,1\}$. *Να επιλέξετε τυχαία έναν πίνακα αποδόσεων μιας αγοράς τριών αξιογράφων ως εξής: Εκτός από τον τραπεζικό λογαριασμό του οποίου το διάνυσμα απόδοσης κατά την περίοδο 1 είναι* $(1+r)\boldsymbol{1}$ *(όπου* $r > 0$ *είναι το επιτόκιο απόδοσης, το οποίο μπορείτε να το επιλέξετε να είναι μικρότερο του 1), με την εντολή Random[] στο Mathematica λαμβάνετε έναν ψευδοτυχαίο αριθμό από την ομοιόμορφη κατανομή στο* $[0,1]$. *Επαναλάβετε την εντολή 10 φορές και πλλαπλασιάστε τους αριθμούς που θα πάρετε με το 10. Τα ακέραια μέρη των αριθμών σας καταχωρήστε τα με τη σειρά που εμφανίστηκαν ως συντεταγμένες των δύο άλλων διανυσμάτων του* $\mathbb{R}^5$ *που αναπαριστούν τις αποδόσεις των αξιογράφων* $d = 1,2$ *κατά την περίοδο 1 στις 5 καταστάσεις του κόσμου.*

(i) *Ισχύει ότι κάποιο από τα τρία αξιόγραφα μπορεί να γραφεί ως χαρτοφυλάκιο των δύο άλλων ;*

(ii) *Αν ισχύει ότι τα διανύσματα που επιλέξατε είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε βρείτε την απόδοση ενός χαρτοφυλακίου* b *των μετοχών (δηλαδή των αξιογράφων* $d = 1,2$*) που διαχωρίζει τις καταστάσεις του κόσμου.*

(iii) *Να προσδιοριστούν τιμές εξάσκησης τέτοιες ώστε τα δικαιώματα είτε αγοράς είτε πώλησης που εγγράφονται στο* b *με αυτές τις τιμές εξάσκησης μαζί με τα τρία αρχικά αξιόγραφα να συνιστούν μία πλήρη αγορά.*

Λύση:

(i) Υποθέτοντας ότι το επιτόκιο για τον τραπεζικό λογαριασμό είναι $r = 0.10$ και εφαρμόζοντας την διαδικασία που περιγράφεται στην εκφώνηση, παίρνουμε τον πίνακα

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1.1 & 5 & 8 \\ 1.1 & 7 & 8 \\ 1.1 & 0 & 4 \\ 1.1 & 5 & 4 \\ 1.1 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Δεν ισχύει ότι κάποιο από τα άξιόγραφα αυτά μπορεί να γραφεί ως χαρτοφυλάκιο των δύο άλλων. Αυτό διότι τα τρία διανύσματα του $\mathbb{R}^5$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(ii) Τα τρία παραπάνω διανύσματα -στήλες του πίνακα S_1 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, διότι η 3×3 ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1.1 & 5 & 8 \\ 1.1 & 7 & 8 \\ 1.1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

είναι μη μηδενική και ίση με -8.

(iii) Το χαρτοφυλάκιο $(0,1,1)$ έχει ως απόδοση το συγκυριακό συμβόλαιο $b=(13,15,4,9,12)$ το οποίο διαχωρίζει τις καταστάσεις του κόσμου και αν θεωρήσουμε τις τιμές εξάσκησης $k_1=5, k_2=10, k_3=\frac{25}{2}, k_4=14$ τότε έχουμε ότι οι αποδόσεις των αντίστοιχων call-options που εγγράφονται στο b είναι

$$(b-k_1\mathbf{1})^+=(8,10,0,4,7),(b-k_2\mathbf{1})^+=(3,5,0,0,2),$$

$$(b-k_3\mathbf{1})^+=(\frac{1}{2},\frac{5}{2},0,0,0),(b-k_4\mathbf{1})^+=(0,1,0,0,0).$$

Τα παραπάνω διανύσματα-αποδόσεις δικαιωμάτων αγοράς πάνω στο b μαζί με το b είναι μια βάση του $\mathbb{R}^5$, άρα συνιστούν μια πλήρη αγορά αξιογράφων.