'ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ'
Λύσεις 3ου Φύλλο ασκήσεων

Διδάσκων : Χ. Κουντζάκης

17 Ιουνίου 2010

Άσκηση 1 *Έστω ότι το σύνολο των καταστάσεων του κόσμου είναι το $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και οι ενέργειές μας εξελίσσονται σε τρεις χρονικές περιόδους $\mathbf{T} = \{0, 1, 2\}$. Έστω ότι η πληροφορία μας για τις καταστάσεις του κόσμου περιγράφεται από τις διαμερίσεις του Ω $F_0 = \{\Omega\}, F_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}, F_2 = \{\{\omega\}, \omega \in \Omega\}$. Υποθέτουμε επίσης ότι στην αγορά υπάρχουν διαθέσιμες $d = 2$ μετοχές και ένας τραπεζικός λογαριασμός που περιγράφει την εξέλιξη της αξίας της νομισματικής μονάδας, των οποίων οι ανελίξεις αξίας δίνονται από τα ακόλουθα διανύσματα του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^{\mathbb{D}}$ ($\mathbb{D}$ είναι το δένδρο πληροφόρησης):*

$$S^0 = S^0 = (1, 0.5, 0.5, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}),$$

$$S^1 = (10, 8, 2, 2, 2, 4, 1, 1, 0),$$

$$S^2 = (8, 4, 4, 2, 2, 0, 2, 2, 0),$$

Δεδομένου ότι έχουν προσδιοριστεί τα τιμών των στοιχειωδών αγαθών που καταναλώνονται σε κάθε κόμβο του δένδρου πληροφόρησης (βλ. πρώτο φυλλάδιο), να προσδιοριστεί το σύνολο των ισοδύναμων μέτρων martingale για την αγορά αυτή.

Λύση: Είναι προφανές ότι το διάνυσμα τιμών $\pi = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ είναι ορθογώνιο στις στηλες του πίνακα $W(S)$ και επομένως είναι ένα τέτοιο διάνυσμα τιμών. Για να προσδιορίσουμε ένα δεύτερο τέτοιο διάνυσμα τιμών, έστω $\pi = (1, a, b, c, d, e, f, g, h)$, αρκεί αυτό να έχει όλες του τις συντεταγμένες θετικές και να είναι ορθογώνιο σε όλες τις στήλες του $W(S)$. Αρκεί δηλαδή να ισχύουν οι ακόλουθες εξισώσεις

$$a + b = 2, 8a + 2b = 10, 3a = c + d + e, 8a = 2c + 2d + 4e,$$

$$4a = 2c + 2d, 3b = f + g + h, 2b = f + g, 4b = 2f + 2g.$$

Μετά από πράξεις συμπεραίνουμε ότι η γενική μορφή του διανύσματος π, είναι η ακόλουθη

$$\pi = (1, 1, 1, c, 2 - c, 1, f, 2 - f, 1),$$

όπου όλες οι συντεταγμένες πρέπει να είναι θετικές, δηλαδή $c, f \in (0, 2)$.

Οι συντελεστές προεξόφλησης που προκύπτουν από τον τραπεζικό λογαριασμό είναι οι ακόλουθοι:

$$\Delta_0^1(\omega) = 2, \omega \in \Omega, \Delta_1^2(\omega) = 3, \omega = 1, 2, 3, \Delta_1^2(\omega) = 3, \omega = 4, 5, 6.$$

Άρα ο συντελεστής ανατοκισμού μεταξύ των περιόδων 0 και 2 είναι $\Gamma_0^2(\omega) = \frac{1}{6}, \omega = 1, 2, 3, \Gamma_0^2(\omega) = \frac{1}{6}, \omega = 4, 5, 6$. Άρα η γενική μορφή των ισοδύναμων μέτρων martingale της αγοράς δίνεται από το διάνυσμα $\mu_\pi = (\frac{c}{6}, \frac{2-c}{6}, \frac{1}{6}, \frac{f}{6}, \frac{2-f}{6}, \frac{1}{6}), c, f \in (0, 2)$. Αθροίζοντας τις συντεταγμένες του διανύσματος αυτού, έχουμε ότι το αποτέλεσμα είναι ίσο με 1. Επίσης το διάνυσμα αυτό έχει θετικές, μη μηδενικές συντεταγμένες, λογω του ότι το π έχει θετικές, μη μηδενικές συντεταγμένες.

Άσκηση 2 *Να επαληθευτούν οι σχέσεις της μορφής $\mathbb{E}_\mu(\overline{S}_T^1 | \mathcal{F}_t) = \overline{S}_t^1, T = 2, t < 2$ για την ανέλιξη των προεξοφλημένων τιμών της μετοχής $\overline{S}^1$, ως προς κάθε ισοδύναμο μέτρο martingale μ που έχετε προσδιορίσει στην προηγούμενη άσκηση.*

Λύση:
Πρέπει να επαληθευτούν οι σχέσεις

$$\mathbb{E}_\mu(\Delta_0^2 S_2^1|\mathcal{F}_0) = S_0^1, \mathbb{E}_\mu(\Delta_0^2 S_2^1|\mathcal{F}_1) = \Delta_0^1 S_1^1,$$

για κάθε ισοδύναμο μέτρο martingale μ.
Για την πρώτη σχέση αρκεί να δείξουμε ότι

$$S_0^1 = \sum_{i=1}^{6} \Delta_0^2(i) S_2^1(i)\mu(i).$$

Κάνοντας αντικατάσταση προκύπτει ότι,

$$10 = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot [c \cdot 2 + (2-c) \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot f + 1 \cdot (2-f)],$$

το οποίο ισχύει.
Για τον κόμβο $\xi_1 = (1, \{1,2,3\}$ αρκεί να δείξουμε ότι

$$\Delta_0^1(\sigma_1) S_1^1(\sigma_1) = \sum_{i=1}^{3} \Delta_0^2(i) S_2^1(i) \frac{\mu(i)}{\mu(\sigma_1)},$$

όπου $\sigma_1 = \{1,2,3\}$. Κάνοντας αντικατάσταση προκύπτει ότι,

$$2 \cdot 8 = 6 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot (2 \cdot \frac{c}{6} + 2 \cdot \frac{2-c}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6}).$$

Για τον κόμβο $\xi_2 = (1, \{4,5,6\}$ αρκεί να δείξουμε ότι

$$\Delta_0^1(\sigma_2) S_1^1(\sigma_2) = \sum_{i=4}^{6} \Delta_0^2(i) S_2^1(i) \frac{\mu(i)}{\mu(\sigma_2)},$$

όπου $\sigma_2 = \{4,5,6\}$. Κάνοντας αντικατάσταση προκύπτει ότι,

$$2 \cdot 2 = 6 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot (1 \cdot \frac{f}{6} + 1 \cdot \frac{2-f}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6}).$$

Άσκηση 3 *Για το filtration που παράγεται από τις διαμερίσεις πληροφορίες που δίνονται στην πρώτη άσκηση και το μέτρο πιθανότητας* $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ *για τις καταστάσεις του κόσμου προσδιορίστε ένα martingale, ένα submartingale και ένα supermartingale προσαρμοσμένα στο filtration αυτό.*

L'ush: Αν αριθμήσουμε τους κόμβους του δένδρου πληροφόρησης ως εξής $\xi_0 = (0, \Omega), \xi_1 = (1, \{1,2,3\}), \xi_2 = (1, \{4,5,6\}), \xi_3 = (2, \{1\}), \xi_4 = (2, \{2\}), \xi_5 = (2, \{3\}), \xi_6 = (2, \{4\}), \xi_7 = (2, \{5\}), \xi_8 = (2, \{6\})$, εφ' όσον οι ζητούμενες στοχαστικές διαδικασίες πρέπει να είναι προσαρμοσμένες στη διήθηση που παράγεται από τις παραπάνω διαμερίσεις πληροφορίας, αυτές μπορούν να παρασταθούν από ένα διάνυσμα $(a, b, c, d, e, f, g, h, k)$ του $\mathbb{R}^{\mathbb{D}}$ όπου $X_0(\omega) = a$ για κάθε ω, $X_1(\omega) = b, \omega = 1,2,3$ $X_1(\omega) = c, \omega = 4,5,6$, $X_2(1) = d, X_2(2) = e, X_2(3) = f, X_2(4) = g, X_2(5) = h, X_2(6) = k$, ενώ X_0, X_1, X_2 είναι οι τυχαίες μεταβλητές της διαδικασίας X. Αν κάθε κατάσταση έχει πιθανότητα ίση με $\frac{1}{6}$, τότε για να είναι η X supermartingale πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις $E(X_1|\mathcal{F}_0) \leq X_0$, $E(X_2|\mathcal{F}_1) \leq X_1$, όπου $\mathcal{F}_i, i = 0,1,2$ είναι η άλγεβρα υποσυνόλων του Ω που παράγεται από τη διαμέριση F_i. Αυτές οι σχέσεις ισοδύναμα γράφονται ως εξής $a \geq \frac{b+c}{2}$, $b \geq \frac{d+e+f}{3}, c \geq \frac{g+h+k}{3}$. Για να είναι η X submartingale πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις $E(X_1|\mathcal{F}_0) \geq X_0$, $E(X_2|\mathcal{F}_1) \geq X_1$, όπου $\mathcal{F}_i, i = 0,1,2$ είναι η άλγεβρα υποσυνόλων του Ω που παράγεται από τη διαμέριση F_i. Αυτές οι σχέσεις ισοδύναμα γράφονται ως εξής $a \leq \frac{b+c}{2}$, $b \leq \frac{d+e+f}{3}, c \leq \frac{g+h+k}{3}$. Ένα martingale είναι και submartingale και supermartingale. Διανύσματα $(a, b, c, d, e, f, g, h, k)$ που να ικανοποιούν αυτές τις σχέσεις, μπορούν ως γνωστόν να προσδιοριστούν μέσω της προς τα πίσω απαγωγής.