'ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ'
Λύσεις 1ου φύλλου ασκήσεων

Διδάσκων : Χ. Κουντζάκης

17 Ιουνίου 2010

Άσκηση 1 *Έστω ότι το σύνολο των καταστάσεων του κόσμου είναι το $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ και οι ενέργειές μας εξελίσσονται σε τρεις χρονικές περιόδους $\mathbf{T} = \{0,1,2\}$. Έστω ότι η πληροφορία μας για τις καταστάσεις του κόσμου περιγράφεται από τις διαμερίσεις του Ω $F_0 = \{\Omega\}, F_1 = \{\{1,2,3\},\{4,5,6\}\}, F_2 = \{\{\omega\}, \omega \in \Omega\}$. Υποθέτουμε επίσης ότι στην αγορά υπάρχουν διαθέσιμες $d = 2$ μετοχές και ένας τραπεζικός λογαριασμός που περιγράφει την εξέλιξη της αξίας της νομισματικής μονάδας, των οποίων οι ανελίξεις αξίας δίνονται από τα ακόλουθα διανύσματα του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^{\mathbb{D}}$ ($\mathbb{D}$ είναι το δένδρο πληροφόρησης):*

$$S^0 = S^0 = (1, 0.5, 0.5, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}),$$

$$S^1 = (10, 8, 2, 2, 2, 4, 1, 1, 0),$$

$$S^2 = (8, 4, 4, 2, 2, 0, 2, 2, 0),$$

(i) *Να σχεδιάσετε το γράφημα του δένδρου πληροφόρησης $\mathbb{D}$ για τις καταστάσεις του κόσμου. Να προσδιοριστούν τα σύνολα των άμεσα επόμενων κόμβων ξ^+, για κάθε κόμβο $\xi \in \mathbb{D}^-$.*

(ii) *Να προσδιορίσετε τα διανύσματα $S(\xi)$ και του πίνακες $S(\xi^+)$ για κάθε κόμβο $\xi \in \mathbb{D}^-$.*

(iii) *Να προσδιορίστεί ο πίνακας αποδόσεων $W(S)$ της αγοράς των $d+1$ αξιογράφων και το διάνυσμα απόδοσης $t(z)$ του χαρτοφυλακίου $z = ((0,1,1),(0,1,-1),(0,1,1))$, όπου $z(\xi_0) = (0,1,1), z(\xi_1) = (0,1,-1), z(\xi_2) = (0,1,1)$.*

(iv) *Να προσδιοριστούν τα διανύσματα $t(z)(\xi^+) = S(\xi^+) \cdot z(\xi) - S(\xi^+) \bullet_\xi z(\xi^+)$ για το χαρτοφυλάκιο του προηγούμενου ερωτήματος.*

Λύση:

(i) Το δένδρο πληροφόρησης είναι το ακόλουθο

$$\mathbb{D} = \{(0,\Omega),(1,\{1,2,3\}),(1,\{4,5,6\}),(2,\{1\}),(2,\{2\}),(2,\{3\}),(2,\{4\}),(2,\{5\}),(2,\{6\})\} =$$

$$= \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8\}.$$

Είναι $\xi_0^+ = \{\xi_1, \xi_2\}, \xi_1^+ = \{\xi_3, \xi_4, \xi_5\}, \xi_2^+ = \{\xi_6, \xi_7, \xi_8\}$.

(ii) Είναι $S(\xi_0) = (1, 10, 8), S(\xi_1) = (0.5, 8, 4), S(\xi_2) = (0.5, 2, 4), S(\xi_3) = (\frac{1}{6}, 2, 2), S(\xi_4) = (\frac{1}{6}, 2, 2), S(\xi_5) = (\frac{1}{6}, 4, 0)$. Ακόμη είναι $S(\xi_6) = (\frac{1}{6}, 1, 2), S(\xi_7) = (\frac{1}{6}, 1, 2), S(\xi_8) = (\frac{1}{6}, 0, 0)$. Επιπλέον

$$S(\xi_0^+) = \begin{bmatrix} 0.5 & 8 & 4 \\ 0.5 & 2 & 4 \end{bmatrix}, S(\xi_1^+) = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 2 & 2 \\ \frac{1}{6} & 2 & 2 \\ \frac{1}{6} & 4 & 0 \end{bmatrix}, S(\xi_2^+) = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(iii) Ο πίνακας $W(S)$ είναι διαστάσεων 9×9 και είναι ο ακόλουθος πίνακας

$$W(S) = \begin{bmatrix} -1 & -10 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 8 & 4 & -0.5 & -8 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Το διάνυσμα απόδοσης του χαρτοφυλακίου z είναι το $t(z) = W(S) \cdot z$ και είναι το ακόλουθο διάνυσμα

$$t(z) = \begin{bmatrix} -1 & -10 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 8 & 4 & -0.5 & -8 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(iv) Τα διανύσματα $t(z)(\xi_0^+)$, $t(z)(\xi_1^+)$, $t(z)(\xi_2^+)$ είναι τα εξής:

$$t(z)(\xi_1^+) = S(\xi_1^+) \cdot z(\xi_1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 2 & 2 \\ \frac{1}{6} & 2 & 2 \\ \frac{1}{6} & 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$t(z)(\xi_2^+) = S(\xi_2^+) \cdot z(\xi_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$t(z)(\xi_0^+) = S(\xi_0^+) \cdot z(\xi_0) - S(\xi_0^+) \bullet_{\xi_0} z(\xi_0^+) = \begin{bmatrix} 0.5 & 8 & 4 \\ 0.5 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (0.5, 8, 4) \cdot (0, 1-1) \\ (0.5, 2, 4) \cdot (0, 1, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2 *Έστω ότι το σύνολο των καταστάσεων του κόσμου είναι το* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *και οι ενέργειές μας εξελίσσονται σε τρεις χρονικές περιόδους* $\mathbf{T} = \{0, 1, 2\}$. *Έστω ότι η πληροφορία μας για τις καταστάσεις του κόσμου περιγράφεται από τις διαμερίσεις του* Ω $F_0 = \{\Omega\}, F_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}, F_2 = \{\{\omega\}, \omega \in \Omega\}$. *Υποθέτουμε επίσης ότι στην αγορά υπάρχουν διαθέσιμες* $d = 2$ *μετοχές και ένας τραπεζικός λογαριασμός που περιγράφει την εξέλιξη της αξίας της νομισματικής μονάδας, των οποίων οι ανελίξεις αξίας δίνονται από τα ακόλουθα διανύσματα του Ευκλειδείου χώρου* $\mathbb{R}^{\mathbb{D}}$ *(*$\mathbb{D}$ *είναι το δένδρο πληροφόρησης):*

$$S^0 = (1, 1.1, 1.1, 1.2, 1.2, 1.2, 1.3, 1.3, 1.3),$$
$$S^1 = (10, 7, 7, 6, 6, 6, 10, 4, 4),$$
$$S^2 = (8, 7, 7, 6, 5, 7, 5, 10, 10).$$

(i) *Να δείξετε ότι στην αγορά αυτή υπάρχει arbitrage και να προσδιορίσετε δύο τέτοια χαρτοφυλάκια.*

(ii) *Να δείξετε ότι στην αγορά*

$$S^0 = S^0 = (1, 0.5, 0.5, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}),$$
$$S^1 = (10, 8, 2, 2, 2, 4, 1, 1, 0),$$
$$S^2 = (8, 4, 4, 2, 2, 0, 2, 2, 0),$$

δεν υπάρχει arbitrage.

(iii) *Να προσδιοριστούν δύο διανύσματα τιμών των στοιχειωδών αγαθών που καταναλώνονται σε κάθε κόμβο του δένδρου πληροφόρησης.*

(iv) *Να δείξετε με περισσότερους από έναν τρόπους ότι η αγορά του ερωτήματος (ii) δεν είναι πλήρης.*

Λύση:

(i) Ο πίνακας αποδόσεων $W(S)$ είναι διαστάσεων 9×9 και είναι ο ακόλουθος πίνακας

$$W(S) = \begin{bmatrix} -1 & -10 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1 & 7 & 7 & -1.1 & -7 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1 & 7 & 7 & 0 & 0 & 0 & -1.1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1.2 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.2 & 6 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.2 & 6 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.3 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.3 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.3 & 4 & 10 \end{bmatrix}.$$

Δύο χαρτοφυλάκια που παρέχουν arbitrage είναι τα ακόλουθα :

$$z_1 = (7, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), z_2 = (0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

(ii) Το διάνυσμα τιμών $\pi = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ είναι ορθογώνιο στις στηλες του πίνακα $W(S)$ άρα δεν υπάρχει arbitrage.

(iii) Είναι προφανές ότι το διάνυσμα τιμών $\pi = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ είναι ορθογώνιο στις στηλες του πίνακα $W(S)$ και επομένως είναι ένα τέτοιο διάνυσμα τιμών. Για να προσδιορίσουμε ένα δεύτερο τέτοιο διάνυσμα τιμών, έστω $\pi = (1, a, b, c, d, e, f, g, h)$, αρκεί αυτό να έχει όλες του τις συντεταγμένες θετικές και να είναι ορθογώνιο σε όλες τις στήλες του $W(S)$. Αρκεί δηλαδή να ισχύουν οι ακόλουθες εξισώσεις

$$a + b = 2, 8a + 2b = 10, 3a = c + d + e, 8a = 2c + 2d + 4e,$$

$$4a = 2c + 2d, 3b = f + g + h, 2b = f + g, 4b = 2f + 2g.$$

Μετά από πράξεις συμπεραίνουμε ότι η γενική μορφή του διανύσματος π, είναι η ακόλουθη

$$\pi = (1, 1, 1, c, 2 - c, 1, f, 2 - f, 1),$$

όπου όλες οι συντεταγμένες πρέπει να είναι θετικές, δηλαδή $c, f \in (0, 2)$. Για $f = \frac{1}{4}$, έχουμε ότι

$$\pi_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, \frac{1}{4}, \frac{7}{4}, 1).$$

(iv) Τα δύο προηγούμενα διανύσματα τιμών είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Χαρακτηρισμού Πλήρων Αγορών αυτό σημαίνει ότι η αγορά δεν είναι πλήρης. Επίσης, βάσει του ίδιου θεωρήματος ισχύει $rank S(\xi_2^+) = 2 < b(\xi_2) = 3$, άρα η αγορά δεν είναι πλήρης.

Άσκηση 3 *Στην αγορά του ερωτήματος (ii) της προηγούμενης άσκησης, να βρεθεί αν το συγκυριακό συμβόλαιο* $c = (6, 3, 3, 3, 0, 2, 2, 0) \in \mathbb{R}^{\mathbb{D}^+}$ *είναι επιτεύξιμο και αν ναι, βρείτε χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης για αυτό. Πόσο κοστίζει αυτό το χαρτοφυλάκιο ; Είναι αυτή η μοναδική δίκαιη τιμή για το c που ενδέχεται να πληρώσει ο ενδιαφερόμενος για την αντιστάθμιση του c, βάσει των όσων δείξατε στην προηγούμενη άσκηση ;*

Λύση: Με τη μέθοδο της προς τα πίσω απαγωγής, προσδιορίζουμε χαρτοφυλάκια $z(\xi_2), z(\xi_1)$ για τα οποία να ισχύει ότι

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 2 & 2 \\ \frac{1}{6} & 2 & 2 \\ \frac{1}{6} & 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot z(\xi_1) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot z(\xi_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Για παράδειγμα είναι $z(\xi_1) = (18, 0, 0), z(\xi_2) = (12, 0, 0)$. Για αυτήν την επιλογή χαρτοφυλακίων ισχύει ότι

$$(0.5, 8, 4) \cdot z(\xi_0) - (0.5, 8, 4) \cdot (18, 0, 0) = 6, (0.5, 2, 4) \cdot z(\xi_0) - (0.5, 2, 4) \cdot (12, 0, 0) = 3.$$

Ένα χαρτοφυλάκιο που ικανοποιεί τις παραπάνω εξισώσεις είναι το $z(\xi_0) = (6, 1, 1)$. Δεν είναι η μοναδική δίκαιη τιμή για το c που ενδέχεται να πληρώσει ο ενδιαφερόμενος για την αντιστάθμισή του, γιατί λόγω της μη πληρότητας της αγοράς το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης z του c δεν είναι μοναδικό και έτσι η αρχική τιμή $S(\xi_0) \cdot z(\xi_0)$ δεν είναι μοναδική.