

ΎΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ'

Λύσεις 2ου φύλλου ασκήσεων 2011

Διδάσκων : Χ. Κουντζάκης

13 Ιουνίου 2011

Άσκηση 1 Για την αγορά που είχατε προσδιορίσει στην άσκηση 3 του προηγούμενου φυλλαδίου και για την αγορά που προκύπτει από την αποτίμηση υπό το διάνυσμα τιμών $\pi = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, εξετάστε αν το συγκυριακό συμβόλαιο $C = (0, 0, 3, 1, 1, 1, 0) \in \mathbb{R}^{\mathbb{D}^+}$ είναι επιτεύξιμο.

Λύση. Λύνουμε τα γραμμικά συστήματα $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot z(\xi_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot z(\xi_1) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Η λύση του

δεύτερου συστήματος είναι $z(\xi_1) = (0, 1)$ και η λύση του πρώτου συστήματος είναι $z(\xi_2) = (\frac{3}{7}, \frac{1}{7})$. Οι λύσεις αυτές είναι μοναδικές. Έστω $z(\xi_0) = (a, b)$, $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ με $5a + 6b = (4, 5) \cdot (0, 1) = 5$, $5a + 7b = (3, 5) \cdot (\frac{3}{7}, \frac{1}{7}) = 2$. Δηλαδή προκύπτει το γραμμικό σύστημα $5a + 6b = 5$, $5a + 7b = 2$. Άρα $b = -3$, $a = \frac{23}{5}$.

Άσκηση 2 Προσδιορίστε το σύνολο των χαρτοφυλακίων που αντισταθμίζουν το παραπάνω συγκυριακό συμβόλαιο.

Λύση. Το παραπάνω χαρτοφυλάκιο $z = (z(\xi_0), z(\xi_1), z(\xi_2))$ είναι το μοναδικό χαρτοφυλάκιο που αντισταθμίζει το C .

Άσκηση 3 Βάσει του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης της πρώτης άσκησης, προσδιορίστε μια τιμολόγηση του C την περίοδο 0. Παρέχει αυτή ευκαιρίες arbitrage είτε από την πλευρά του αγοραστή είτε από την πλευρά του πωλητή του συμβολαίου C ;

Λύση. Η τιμολόγηση του C είναι $q(\xi_0) \cdot z(\xi_0) = (10, 13) \cdot (\frac{23}{5}, -3) = 46 - 39 = 5 > 0$. Η τιμολόγηση αυτή δεν παρέχει ευκαιρίες arbitrage διότι είναι θετικός πραγματικός αριθμός.

Άσκηση 4 Επειδή η αγορά αυτή δεν είναι πλήρης, τι ενδεικτικές αποδόσεις στους τερματικούς κόμβους θα επιτρέπατε σε ένα νέο συμβόλαιο a που θα επισυνάπτονταν στην αγορά, ώστε να καταστεί πλήρης ; Για τις αποδόσεις που προσδιορίσατε, προσδιορίστε όλο το διάνυσμα a απόδοσης του συμβολαίου, βάσει του γεγονότος ότι αποτιμήσατε τα συμβόλαια V^1, V^1 με το $\pi =$.

Λύση.

Στους κόμβους του συνόλου ξ_1^+ έστω ότι το συμβόλαιο a που επισυνάπτεται έχει αποδόσεις $(1, 0, 0)$ και στους κόμβους του συνόλου ξ_2^+ το συμβόλαιο έχει αποδόσεις $(0, 0, 1)$. Τότε το διάνυσμα απόδοσης του συμβολαίου είναι

$a = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1)$ και οι αντίστοιχοι υποπίνακες θα είναι $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 5 Να βρεθεί ο πίνακας αποδόσεων των συμβολαίων της νέας -πλήρους -αγοράς για την προηγούμενη άσκηση.

Λύση.

Η τιμή $q(\xi_1)$ του νέου συμβολαίου είναι 1 όπως επίσης και η $q(\xi_2)$. Επίσης είναι $q(\xi_0) = 2$ διότι αποτιμούμε τα συμβόλαια με το $\pi = \mathbf{1}$ και στους ξ_0, ξ_1, ξ_2 το συμβόλαιο a δεν αποδίδει στον κάτοχό του κάποια απόδοση. Έτσι

ο πίνακας αποδόσεων γίνεται $W =$

$$\begin{bmatrix} -10 & -13 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & -4 & -5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$