'ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ'
Λύσεις 3ου φύλλου ασκήσεων 2011

Διδάσκων : Χ. Κουντζάκης

23 Ιουνίου 2011

Άσκηση 1 *Για την αγορά που είχατε προσδιορίσει στην Άσκηση 3 του 1ου φυλλαδίου και για την αγορά που προκύπτει από την αποτίμηση υπό το διάνυσμα τιμών $\pi = (1,1,1,1,1,1,1,1,1)$, αν επιπλέον αξιόγραφο α που επιλέγεται στα πλαίσια της τελευταίας άσκησης του φυλλαδίου 2 έχει απόδοση ίση με 1 σε κάθε τερματικό κόμβο, προσδιορίστε το μοναδικό ισοδύναμο μέτρο martingale για την πλήρη αυτή αγορά. Υπόδειξη : Ξεκινήστε με τον προσδιορισμό κατάλληλου χαρτοφυλακίου του νέου αξιογράφου που ισοδυναμεί με τραπεζικό λογαριασμό.*

Λύση Το νέο αξιόγραφο τιμολογείται ως εξής $q(\xi_0) = 6, q(\xi_1) = 3, q(\xi_2) = 3$. Επομένως αν θεωρήσουμε το διάνυσμα $S = q + V = (6,3,3,1,1,1,1,1,1)$ της απόδοσης του αξιογράφου σε ολόκληρο το δένδρο πληροφόρησης, διαπιστώνουμε ότι αυτό το αξιόγραφο απότελείται από 6 μερίδια ενός τραπεζικού λογαριασμού. Ο συντελεστής προεξόφλησης μεταξύ των περιόδων 0 και 2 είναι $\Delta_0^2(\omega) = 6, \omega \in \Omega$ όπως δηλώνει το ίδιο το διάνυσμα S. Άρα ο αντίστοιχος συντελεστής ανατοκισμού είναι $\Gamma_0^2(\omega) = \frac{1}{6}$ και επομένως το μοναδικό ισοδύναμο μέτρο martingale είναι $\mu_\pi(\omega) = \frac{1}{6}, \omega \in \Omega$.

Άσκηση 2 *Επιβεβαιώστε τις σχέσεις martingale που (οφείλουν να) ικανοποιούν οι προεξοφλημένες στοχαστικές διαδικασίες τιμών (ή αποδόσεων) υπό το μέτρο που προσδιορίσατε για ένα από τα δύο αρχικά αξιόγραφα της αγοράς.*

Λύση Αν επιλέξουμε το πρώτο αξιόγραφο, ισχύει ότι $S^1 = (10,5,5,3,1,1,4,1,0)$, πρέπει να ισχύει ότι $S_0^1 = E(\Delta_0^1 S_1^1|\mathcal{F}_0) = E(\Delta_0^1 S_1^1)$. Είναι $10 = 2 \cdot (5 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot frac12)$. Επιπλέον πρέπει να ισχύει $S_1^1 = E(\Delta_1^2 S_2^1|\mathcal{F}_1)$. Αυτή η σχέση συνεπάγεται ότι πρέπει να ισχύει $5 = \frac{3\cdot 3\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot 1\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot 1\cdot\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}$ και $5 = \frac{3\cdot 4\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot 1\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot 0\cdot\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}$.

Άσκηση 3 *Προσδιορίστε μια στοχαστική διαδικασία martingale υπό το μέτρο που προσδιορίσατε, προσαρμοσμένη στο αρχικό δένδρο πληροφόρησης.*

Λύση Αν αριθμήσουμε τους κόμβους του δένδρου πληροφόρησης ως εξής $\xi_0 = (0,\Omega), \xi_1 = (1,\{1,2,3\})$, $\xi_2 = (1,\{4,5,6\}), \xi_3 = (2,\{1\}), \xi_4 = (2,\{2\}), \xi_5 = (2,\{3\}), \xi_6 = (2,\{4\}), \xi_7 = (2,\{5\}), \xi_8 = (2,\{6\})$, εφ' όσον οι ζητούμενες στοχαστικές διαδικασίες πρέπει να είναι προσαρμοσμένες στη διήθηση που παράγεται από τις παραπάνω διαμερίσεις πληροφορίας, αυτές μπορούν να παρασταθούν από ένα διάνυσμα (a,b,c,d,e,f,g,h,k) του $\mathbb{R}^{\mathbb{D}}$ όπου $X_0(\omega) = a$ για κάθε ω, $X_1(\omega) = b, \omega = 1,2,3$ $X_1(\omega) = c, \omega = 4,5,6$, $X_2(1) = d, X_2(2) = e, X_2(3) = f, X_2(4) = g, X_2(5) = h, X_2(6) = k$, ενώ X_0, X_1, X_2 είναι οι τυχαίες μεταβλητές της διαδικασίας X. Αν κάθε κατάσταση έχει πιθανότητα ίση με $\frac{1}{6}$, τότε για να είναι η X martingale πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις $E(X_1|\mathcal{F}_0) = X_0$, $E(X_2|\mathcal{F}_1) = X_1$, όπου $\mathcal{F}_i, i = 0,1,2$ είναι η άλγεβρα υποσυνόλων του Ω που παράγεται από τη διαμέριση F_i. Αυτές οι σχέσεις ισοδύναμα γράφονται ως εξής $a = \frac{b+c}{2}$, $b = \frac{d+e+f}{3}, c = \frac{g+h+k}{3}$. Διανύσματα (a,b,c,d,e,f,g,h,k) που να ικανοποιούν αυτές τις σχέσεις, μπορούν ως γνωστόν να προσδιοριστούν μέσω της προς τα πίσω απαγωγής. Για παράδειγμα, αν $g = h = k = 1$ $e = f = 0$, $g = 3$, τότε $b = c = 1$ και τότε $a = 1$.