Πανεπιστήμιο Αιγαίου- Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών-Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2009-10

Μαθηματικά Οικονομικά - Λύσεις 1ου Φύλλου Ασκήσεων

Διδάσκοντες : Χρήστος Κουντζάκης

Άσκηση 1. *Σε μια οικονομία με δύο αγαθά, να δείξετε ότι η συνάρτηση ζήτησης ενός καταναλωτή με αρχική δέσμη αγαθών* $e_1 = (1, 2)$ *και σχέση προτίμησης* $\succeq$ *που ορίζεται από τη συνάρτηση ωφελιμότητας* $u(x, y) = x \cdot exp(y), x \geq 0, y \geq 0$ *είναι καλά ορισμένη για κάθε διάνυσμα τιμών* $p = (p_1, p_2)$ *με* $p >> 0$ *και να την προσδιορίσετε.*

Απάντηση: Για το σύνολο ζήτησης ισχύει $x(p, p \cdot e_1) \neq \oslash$ για κάθε $p >> 0$ διότι για κάθε αυστηρά θετικό διάνυσμα τιμών, το αντίστοιχο σύνολο προϋπολογισμού $B(p, p \cdot e_1)$ είναι μη κενό, κλειστό και φραγμένο, άρα συμπαγές, ενώ η σχέση προτίμησης που ορίζεται από την παραπάνω συνάρτηση ωφελιμότητας είναι συνεχής. Άρα από το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής, η u λαμβάνει μέγιστη τιμή στο $B(p, p \cdot e_1)$, για κάθε $p >> 0$. Επιπλέον, τα στοιχεία του $x(p, p \cdot e_1)$ ανήκουν στον εισοδηματικό περιορισμό του $B(p, p \cdot e_1)$. Αυτό ισχύει διότι παρατηρούμε ότι $(x_1, y_1) \succeq (0, y_2)$ για κάθε $x_1, y_1, y_2 > 0$. Επομένως περιοριζόμαστε στο να αναφερόμαστε σε θετικούς αριθμούς σε ό,τι αφορά την κατανάλωση του πρώτου αγαθού και αν $x_1 \geq x_2, y_1 > y_2$ τότε $e^{y_1} > e^{y_2}$ και άρα $x_1 e^{y_1} > x_2 e^{y_2}$, το οποίο σημαίνει ότι $u(x_1, y_1) > u(x_2, y_2)$ για δέσμες κατανάλωσης $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ για τις οποίες ισχύουν οι παραπάνω ανισότητες και επομένως $(x_1, y_1) > (x_2, y_2)$. Η άλλη περίπτωση για να ισχύει $(x_1, y_1) > (x_2, y_2)$ είναι η $x_1 > x_2$ και $y_1 \geq y_2$, από την οποία έπεται $e^{y_1} \geq e^{y_2}$. Άρα η σχέση προτίμησης είναι γνησίως μονότονη στο σύνολο δεσμών κατανάλωσης $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ | x > 0, y \geq 0\}$, που είναι όμως και εκείνο που ενδιαφέρει από άποψης μεγιστοποίησης. Άρα εφ΄ οσον είναι γνησίως μονότονη σε αυτό το σύνολο και το μέγιστο λαμβάνεται σε αυτό το σύνολο δεσμών, το μέγιστο λαμβάνεται στον εισοδηματικό περιορισμό καθώς επίσης και σε αυτές τις δέσμες αγαθών. Δηλαδή ισχύει $p_1 x + p_2 y = p_1 + 2p_2$ και $x > 0$. Λύνοντας ως προς y προκύπτει ότι $y = \frac{1}{p_2}(p_1 + 2p_2 - p_1 x)$ και για να βρούμε το μέγιστο της σχέσης προτίμησης, πρέπει να βρούμε το μέγιστο της u στον εισοδηματικό περιορισμό υπό την επιπλέον προϋπόθεση ότι $x > 0$. Όμως η u στον ισοδηματικό περιορισμό είναι συνάρτηση μίας μόνο μεταβλητής -του x - και γίνεται $g(x) = x e^{\frac{1}{p_2}(p_1 + 2p_2 - p_1 x)}$.

Το πρόβλημα όμως της μεγιστοποίησης της u μετατρέπεται σε πρόβλημα μεγιστοποίησης της g υπό τους περιορισμούς $x > 0, \frac{1}{p_2}(p_1 + 2p_2 - p_1 x) \geq 0$. Είναι $g'(x) = e^{\frac{1}{p_2}(p_1+2p_2-p_1x)} + xe^{\frac{1}{p_2}(p_1+2p_2-p_1x)} \frac{d}{dx}(\frac{1}{p_2}(p_1 + 2p_2 - p_1 x)) = = e^{\frac{1}{p_2}(p_1+2p_2-p_1x)}(1 + x(-\frac{p_1}{p_2}))$. Το $x = \frac{p_2}{p_1}$ είναι θέση ολικού μεγίστου για την g υπό τους περιορισμούς που θέσαμε. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του εισοδηματικού περιορισμού έχουμε ότι $y = \frac{p_1+p_2}{p_2}$. Άρα η συνάρτηση ζήτησης είναι $x(p, p \cdot e) = (\frac{p_2}{p_1}, \frac{p_1+p_2}{p_2}), p_1 > 0, p_2 > 0$.

Άσκηση 2. *Σε μια οικονομία με δύο αγαθά, να δείξετε ότι οι συναρτήσεις ζήτησης δύο καταναλωτών καταναλωτή με αρχικές δέσμες αγαθών $e_1 = e_2 = (1, 1)$ και σχέσεις προτίμησης $\succeq_1, \succeq_2$ που ορίζονται από τις συναρτήσεις ωφελιμότητας $u_1(x, y) = xy, u_2(x, y) = x^4y^2, x \geq 0, y \geq 0$ είναι καλά ορισμένες για κάθε διάνυσμα τιμών $p = (p_1, p_2)$ με $p >> 0$ και να τις προσδιορίσετε.*

Απάντηση: Για το σύνολο ζήτησης του πρώτου καταναλωτή είναι $x_1(p, p \cdot e_1) \neq \oslash$ για κάθε $p >> 0$ διότι για κάθε αυστηρά θετικό διάνυσμα τιμών, το αντίστοιχο σύνολο προϋπολογισμού $B(p, p \cdot e_1)$ είναι μη κενό, κλειστό και φραγμένο, άρα συμπαγές, ενώ η σχέση προτίμησης που ορίζεται από την παραπάνω συνάρτηση ωφελιμότητας είναι συνεχής. Άρα από το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής, η u λαμβάνει μέγιστη τιμή στο $B(p, p \cdot e_1)$, για κάθε $p >> 0$. Επιπλέον, τα στοιχεία του $x_1(p, p \cdot e_1)$ ανήκουν στον εισοδηματικό περιορισμό του $B(p, p \cdot e_1)$. Αυτό ισχύει διότι $(x, y) \succ_1 (x_1, 0), (0, y_1)$, όπου $x, y > 0$ και $x_1, y_1 > 0$. Επιπλέον στο $\mathbb{R}^2_{++}$ η σχέση προτίμησης $\succeq_1$ είναι γνησίως μονότονη διότι αν πχ $(x_1, y_1) > (x_2, y_2)$ διότι $x_1 \geq x_2, y_1 > y_2$ τότε συμπεραίνουμε ότι $x_1y_1 > x_2y_2$. Επομένως αν (x, y) οι συντεταγμένες του διανύσματος $x_1(p, p \cdot e_1)$, τότε $p_1x + p_2y = p_1 + p_2$, άρα για τον πρώτο καταναλωτή έχουμε ότι $y = \frac{1}{p_2}(p_1 + p_2 - p_1x)$. Για να βρούμε σε ποια ποσότητα κατανάλωσης του πρώτου αγαθού μεγιστοποιείται η συνάρτηση ωφελιμότητας και άρα και η σχέση προτίμησης, πρέπει να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{p_2}x(p_1 + p_2 - p_1x)$, υπό τους περιορισμούς $x \geq 0$ και $\frac{1}{p_2}(p_1+p_2-p_1x) \geq 0$, δηλαδή $p_1+p_2-p_1x \geq 0$. Μελετώντας την f ως προς τη μονοτονία βρίσκουμε ότι θέση ολικού μεγίστου είναι το $x = \frac{p_1+p_2}{2p_1}$ και άρα η συνάρτηση ζήτησης είναι η $x_1(p, p \cdot e_1) = (\frac{1}{2p_1}(p_1+p_2), \frac{1}{2p_2}(p_1+p_2)), p_1 > 0, p_2 > 0$. Με τον ίδιο τρόπο προσδιορίζεται και η συνάρτηση ζήτησης του δεύτερου καταναλωτή που είναι η $x_2(p_1, p_2) = (\frac{2(p_1+p_2)}{3p_1}, \frac{p_1+p_2}{3p_2})$. Δηλαδή οι συντεταγμένες (x, y) του $x_2(p, p \cdot e_2)$, τότε $p_1x + p_2y = p_1 + p_2$, άρα για το δεύτερο καταναλωτή έχουμε ότι $y = \frac{1}{p_2}(p_1 + p_2 - p_1x)$. Για να βρούμε σε ποια ποσότητα κατανάλωσης του πρώτου αγαθού μεγιστοποιείται η συνάρτηση ωφελιμότητας και άρα και η σχέση προτίμησης, πρέπει να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{p_2^2}x^4(p_1 + p_2 - p_1x)^2$, υπό τους περιορισμούς $x \geq 0$ και $\frac{1}{p_2}(p_1 + p_2 - p_1x) \geq 0$, δηλαδή $p_1 + p_2 - p_1x \geq 0$, ισοδύναμα να μεγιστοποιήσουμε την $h(x) = x^2(p_1 + p_2 - p_1x)$ για την οποία θέση ολικού μεγίστου είναι η $x = \frac{2(p_1+p_2)}{3p_1}$ η οποία ικανοποιεί τους περιορισμούς που θέλουμε.

Άσκηση 3. *Προσδιορίστε τις τιμές ισορροπίας στην οικονομία ανταλλαγής της προηγούμενης άσκησης.*

Απάντηση: Η συνάρτηση συνολικής ζήτησης της οικονομίας ανταλλαγής της προηγούμενης άσκησης είναι

$$x(p_1, p_2) = x_1(p_1, p_2) + x_2(p_1, p_2) = (\frac{p_1 + p_2}{2p_1}, \frac{p_1 + p_2}{2p_2}) + (\frac{2(p_1 + p_2)}{3p_1}, \frac{p_1 + p_2}{3p_2}) =$$

$$= (\frac{7(p_1 + p_2)}{6p_1}, \frac{5(p_1 + p_2)}{6p_2}).$$

Αντίστοιχα η συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης είναι

$$z(p_1, p_2) = x(p_1, p_2) - (e_1 + e_2) = (\frac{7(p_1 + p_2)}{6p_1}, \frac{5(p_1 + p_2)}{6p_2}) - (2, 2) =$$

$$= (\frac{7p_2 - 5p_1}{6p_1}, \frac{5p_1 - 7p_2}{6p_2}).$$

Στο simplex του $\mathbb{R}^2_+$ η μοναδική τιμή ισορροπίας, δηλαδή η τιμή $\overline{p} = (\overline{p}_1, \overline{p}_2)$ για την οποία $z(\overline{p}_1, \overline{p}_2) = 0$ είναι η $(\overline{p}_1, \overline{p}_2) = (\frac{7}{12}, \frac{5}{12})$.

Άσκηση 4. *Σχεδιάστε τα σύνολα αδιαφορίας της σχέσης προτίμησης* $\succeq$ *που ορίζεται από τη συνάρτηση ωφελιμότητας* $u(x, y) = \sqrt{x}y, x \geq 0, y \geq 0$ *στο επίπεδο.*

Απάντηση: Έστω $\boldsymbol{\xi}_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}) \in \mathbb{R}^2_+$ μία δέσμη κατανάλωσης των δύο αγαθών της οικονομίας. Τότε το σύνολο αδιαφορίας ως προς αυτή τη δέσμη κατανάλωσης είναι το $\{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2_+ | \boldsymbol{\xi} \sim \boldsymbol{\xi}_0\}$ και επειδή η $\succeq$ αναπαρίσταται από τη συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x, y) = \sqrt{x}y$, το παραπάνω σύνολο είναι το $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ | u(x, y) = u(x_{0,1}, x_{0,2}) = c\}$. Για $c = 0$, το σύνολο αδιαφορίας είναι το σημείο $(0, 0)$ διότι αν $\sqrt{x}y = 0$ με $x, y \geq 0$, τότε η μοναδική περίπτωση που αυτό ισχύει είναι για $x = y = 0$. Αν $c > 0$, τότε το σύνολο αδιαφορίας είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{c}{\sqrt{x}}, x > 0$.

Άσκηση 5. *Να δώσετε ένα παράδειγμα συνάρτησης ωφελιμότητας που είναι κυρτή, αλλά δεν είναι συνεχής.*

Απάντηση: Έστω οικονομία με ένα αγαθό που καταναλώνεται σε πραγματικές ποσότητες και οι ποσότητες αυτές ανήκουν στο διάστημα $[0,1]$. Τότε η συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = 1, x \in (0,1), u(x) = 2, x = 0,1$, είναι κυρτή αλλά όχι συνεχής. Το γεγονός ότι δεν είναι συνεχής είναι προφανές, μιας και $lim_{x \longrightarrow 1^-} u(x) = 1 \neq u(1) = 2, lim_{x \longrightarrow 0^+} u(x) = 1 \neq u(0) = 2$. Αλλά η συνάρτηση u είναι κυρτή, διότι ισχύουν τα εξής: Έστω $x, y \in [0,1]$ και $\lambda \in [0,1]$. Τότε αν $\lambda x + (1-\lambda)y = 0$, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ισχύει $x = y = 0$. Επομένως ισχύει ότι $u(0) = u(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y) = \lambda u(0) + (1-\lambda)u(0) = u(0)$, επομένως από την ανισότητα $u(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y)$ που χαρακτηρίζει τις κυρτές συναρτήσεις, σε αυτήν την περίπτωση ισχύει η ισότητα. Το ίδιο παρατηρούμε ότι ισχύει και στην περίπτωση που $\lambda x + (1-\lambda)y = 1$. Τότε ισχύει $x = y = 1$. Επομένως ισχύει ότι $u(1) = u(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y) = \lambda u(1) + (1-\lambda)u(1) = u(1)$, επομένως από την ανισότητα $u(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y)$ που ορίζει τις κυρτές συναρτήσεις, σε αυτήν την περίπτωση ισχύει η ισότητα. Αν $\lambda x + (1-\lambda)y \neq 0,1$, τότε $u(\lambda x + (1-\lambda)y) = 1$. Αν $x, y \in (0,1)$ τότε $u(x), u(y) = 1$ και τότε $u(\lambda x + (1-\lambda)y) = 1 = \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y)$, οπότε ισχύει η ισότητα, αν δε ισχύει $x = 0,1$ και $\lambda x + (1-\lambda)y \neq 0,1$, (πχ $y = \lambda = \frac{1}{2}, x = 0$), τότε $u(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y)$, οπότε ισχύει η ανισότητα. Σε κάθε περίπτωση, ο ορισμός της κυρτότητας για την u ικανοποιείται.