

# ΜΙΚΡΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

## Α' ΕΞΑΜΗΝΟ

### 1) ΠΡΟΤΙΜΗΣΕΙΣ

### 2) ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑΣ

Διδάσκων: Χ. Κουντζάκης

1. Στο πλαίσιο των οικονομικών της ορθολογικής επιλογής, θεωρούμε ότι κάθε καταναλωτής συγκρίνει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς κατανάλωσης των αγαθών A και B  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$  βάσει των προσωπικών του προτιμήσεων. Έτσι, αν έχει να επιλέξει μεταξύ δύο συνδυασμών κατανάλωσης  $(x_1, x_2)$ ,  $(y_1, y_2)$  μπορεί πάντοτε να αποφανθεί ποιος είναι προτιμότερος για εκείνον.
2. Ο τρόπος με τον οποίον συγκρίνει ο καταναλωτής τους συνδυασμούς μεταξύ τους, ονομάζεται **σχέση προτίμησης**, ή απλά **προτίμηση** και συμβολίζεται συνήθως με  $\succeq$ . Έτσι, στην παραπάνω περίπτωση συμβολίζουμε  $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$  αν ο καταναλωτής προτιμά τον συνδυασμό κατανάλωσης  $(x_1, x_2)$  από τον  $(y_1, y_2)$ .
3. Αν ισχύει  $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$  και  $(y_1, y_2) \succeq (x_1, x_2)$ , τότε λέμε ότι ο καταναλωτής είναι **αδιάφορος** μεταξύ των συνδυασμών  $(x_1, x_2)$ ,  $(y_1, y_2)$  και συμβολίζουμε  $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ .
4. Αν ισχύει  $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$  αλλά όχι  $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ , τότε συμβολίζουμε με  $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$  και λέμε ότι ο καταναλωτής **προτιμά γνήσια** τον  $(x_1, x_2)$  από τον  $(y_1, y_2)$ .
5. Τα αξιώματα που ικανοποιεί κάθε σχέση προτίμησης είναι α) το αξίωμα της **πληρότητας**, δηλαδή ότι για κάθε δύο συνδυασμούς κατανάλωσης  $(x_1, x_2)$ ,  $(y_1, y_2)$  μπορούμε να αποφανθούμε αν  $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$  ή  $(y_1, y_2) \succeq (x_1, x_2)$ , β) το αξίωμα της **ανακλαστικότητας**, δηλαδή ότι για κάθε συνδυασμό  $(x_1, x_2)$  ισχύει  $(x_1, x_2) \succeq (x_1, x_2)$ , δηλαδή κάθε συνδυασμός είναι προτιμότερος από τον εαυτό του και γ) το αξίωμα της **μεταβατικότητας**, δηλαδή αν  $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$  και  $(y_1, y_2) \succeq (z_1, z_2)$ , τότε  $(x_1, x_2) \succeq (z_1, z_2)$ , δηλαδή αν ο  $(x_1, x_2)$  είναι προτιμότερος από τον  $(y_1, y_2)$  και αυτός με τη σειρά του είναι προτιμότερος από τον  $(z_1, z_2)$ , τότε και ο  $(x_1, x_2)$  είναι προτιμότερος από το  $(z_1, z_2)$ .
6. Τα σύνολα  $I(y_1, y_2) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid (x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)\}$ ,  $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^2$  ονομάζονται **σύνολα αδιαφορίας**. Αν  $(z_1, z_2) \neq (y_1, y_2)$ , τότε  $I(z_1, z_2) \cap I(y_1, y_2) = \emptyset$ .
7. Το πιο συνηθισμένο παράδειγμα σχέσεων προτίμησης είναι αυτές που **αναπαρίστανται** από κάποια συνάρτηση ωφελιμότητας. Δηλαδή, υπάρχει μία συνάρτηση

$$u : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

τέτοια ώστε να ισχύει ότι

$$(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow u(x_1, x_2) \geq u(y_1, y_2).$$

8. Αν η  $\succeq$  αναπαρίσταιται από τη  $u$ , τότε δύο συνδυασμοί  $(x_1, x_2)$ ,  $(y_1, y_2)$  είναι αδιάφοροι ο ένας ως προς τον άλλον, αν και μόνο αν ισχύει  $u(x_1, x_2) = u(y_1, y_2)$ . Δηλαδή οι συνδυασμοί που ανήκουν στο  $I(x_1, x_2)$  ανήκουν σε μία **ισοσταθμική** της  $u$ , δηλαδή σε ένα σύνολο της μορφής  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid u(x_1, x_2) = \rho\}$ ,  $\rho \in \mathbb{R}$ . Μόνο κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις μπορούμε να εκφράσουμε τα σημεία του συνόλου ως μία καμπύλη, δηλαδή ως μία συνάρτηση έστω του  $x_1$ .
9. Παράδειγμα σχέσης προτίμησης που αναπαρίσταιται από συνάρτηση ωφελιμότητας είναι η σχέση προτίμησης δύο **τέλεια υποκατάστατων αγαθών**. Π.χ. αν μας αρέσει ο καφές και στην αγορά υπάρχουν δύο μάρκες ίδιας ποιότητας A και B, εμάς μας ενδιαφέρει πόση ποσότητα συνολικά θα καταναλώσουμε από τον καφέ. Άρα η συνάρτηση ωφελιμότητας είναι

$$u(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

αν  $x_1$  είναι η ποσότητα καφέ μάρκας A και  $x_2$  η ποσότητα καφέ μάρκας B.

10. Η μορφή των καμπυλών αδιαφορίας είναι στην περίπτωση αυτή  $x_1 + x_2 = c, c \in \mathbb{R}_+$ .

11. Παράδειγμα σχέσης προτίμησης που αναπαρίσταται από συνάρτηση ωφελιμότητας είναι επίσης η σχέση προτίμησης δύο **τέλεια συμπληρωματικών αγαθών**. Αν  $A$  είναι η ποσότητα δεξιών παπουτσιών και  $B$  η ποσότητα αριστερών παπουτσιών που θα καταναλώσουμε (π.χ. θα αγοράσουμε για να έχουμε), εμάς μας ενδιαφέρει το  $\min\{x_1, x_2\}$  σε κάθε συνδυασμό  $(x_1, x_2)$ , γιατί αντιστοιχεί στα ζευγάρια που σχηματίζονται. Άρα η συνάρτηση ωφελιμότητας είναι

$$u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}.$$

12. Η μορφή των καμπυλών αδιαφορίας είναι στην περίπτωση αυτή  $\min\{x_1, x_2\} = c, c \in \mathbb{R}_+$ . Το γεωμετρικό σχήμα είναι το εξής: Για τα σημεία  $(x_1, x_2)$  με  $x_2 \geq x_1$ , η ημιευθεία που ξεκινά από το σημείο  $(c, c)$  με  $x_1 = c$ . Για τα σημεία με  $x_1 > x_2$  η ημιευθεία που ξεκινά από το  $(c, c)$  με  $x_2 = c$ .

13. Αν υποθέσουμε ότι ένας καταναλωτής πίνει τον καφέ του με δύο κύβους ζάχαρης ανά φλυτζάνι καφέ. Αν  $x_1$  είναι το πλήθος των φλυτζανιών καφέ που είναι διαθέσιμα και  $x_2$  είναι οι διαθέσιμοι κύβοι ζάχαρης, τότε τα σωστά φλυτζάνια καφέ δίνονται από τη συνάρτηση ωφελιμότητας  $\min\{x_1, \frac{1}{2}x_2\}$ . Δηλαδή για τον καταναλωτή αυτόν, ο καφές και οι κύβοι ζάχαρης είναι τέλεια συμπληρωματικά αγαθά.

14. Η γενική μορφή συνάρτησης ωφελιμότητας των τέλεια συμπληρωματικών αγαθών είναι

$$V(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\},$$

όπου  $a, b > 0$  που καθορίζουν τις αναλογίες κατανάλωσης των αγαθών.

15. Η μορφή της συνάρτησης ωφελιμότητας των γενικευμένα υποκατάστατων αγαθών είναι

$$V(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2,$$

όπου  $a, b$  είναι πραγματικοί αριθμοί που υποδηλώνουν την αξία των αγαθών για τον καταναλωτή. Εδώ εντάσσεται η περίπτωση όπου το αγαθό  $A$  για παράδειγμα είναι **αδιάφορο** για τον καταναλωτή. Άρα τον ενδιαφέρει μόνο η ποσότητα του αγαθού  $B$  που θα καταναλώσει και σε αυτήν την περίπτωση η συνάρτηση ωφελιμότητάς του είναι  $V(x_1, x_2) = x_2$ . Για παράδειγμα αν βάλουμε σε έναν μη καπνιστή (αλλά όχι αντικαπνιστή!) ως αγαθό  $A$  τα τσιγάρα. Το ανάλογο μπορεί να γίνει με το αγαθό  $B$ .

16. Μία άλλη περίπτωση είναι αυτή του **ανεπιθύμητου αγαθού**  $B$ , ενώ αντίστοιχα το αγαθό  $A$  είναι επιθυμητό. Τότε η συνάρτηση ωφελιμότητας έχει τη μορφή

$$V(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2,$$

με  $a > 0$  και  $b < 0$ .

17. Αν το αγαθό  $A$  είναι ανεπιθύμητο, τότε η συνάρτηση ωφελιμότητας του καταναλωτή υποθέτουμε ότι έχει τη μορφή  $u(x_1, x_2) = x_2 - ax_1, a > 0$ . Η σημασία του αριθμού  $a$  είναι η εξής. Αν ο καταναλωτής σχεδιάζε να καταναλώσει το συνδυασμό  $(x_1, x_2)$  και άρα να βρεθεί σε ένα επίπεδο ωφελιμότητας  $u(x_1, x_2) = c$ , τότε αν του δώσουμε μία επιπλέον μονάδα από το αγαθό που δεν επιθυμεί να καταναλώσει, δηλαδή το  $A$ , τότε για να εξακολουθήσει να βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο ωφελιμότητας πρέπει να του δώσουμε ακόμη  $a$  μονάδες του αγαθού  $B$  που επιθυμεί. Επιβεβαιώνοντας,  $u(x_1 + 1, x_2 + a) = x_2 + a - a(x_1 + 1) = x_2 + a - ax_1 - a = c$ .

18. Μία άλλη σημαντική κατηγορία συναρτήσεων ωφελιμότητας είναι οι συναρτήσεις **Cobb-Douglas**:

$$u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b, a, b \in (0, 1), a + b = 1.$$

19. Οι **οιονεί γραμμικές προτιμήσεις** είναι εκείνες για τις οποίες η μορφή της συνάρτησης ωφελιμότητας που τις αναπαριστά είναι  $u(x_1, x_2) = f(x_1) + x_2$  ή  $u(x_1, x_2) = x_2 + g(x_2)$ .

20. Στο επίπεδο, η **συνήθης μερική διάταξη** ορίζεται ως εξής:  $(x_1, x_2) \geq (y_1, y_2)$  αν και μόνο αν  $x_1 \geq y_1, x_2 \geq y_2$ . Τότε λέμε ότι το  $(x_1, x_2)$  είναι **μεγαλύτερο ή ίσο** από το  $(y_1, y_2)$ . Αν μία από τις δύο ανισότητες ισχύει γνήσια, τότε λέμε ότι το  $(x_1, x_2)$  είναι **μεγαλύτερο** από το  $(y_1, y_2)$  και συμβολίζουμε  $(x_1, x_2) > (y_1, y_2)$ . Αν ισχύουν και οι δύο ανισότητες γνήσια τότε λέμε ότι το  $(x_1, x_2)$  είναι **γνήσια μεγαλύτερο** από το  $(y_1, y_2)$  και συμβολίζουμε  $(x_1, x_2) \gg (y_1, y_2)$ .

21. Μία συνάρτηση ωφελιμότητας είναι **μονότονη** αν  $(x_1, x_2) \geq (y_1, y_2)$  έπεται  $u(x_1, x_2) \geq u(y_1, y_2)$ .
22. Μία συνάρτηση ωφελιμότητας είναι **γνησίως μονότονη** αν  $(x_1, x_2) > (y_1, y_2)$  έπεται  $u(x_1, x_2) > u(y_1, y_2)$ .
23. Μια συνάρτηση ωφελιμότητας έχει **άκρως επιθυμητό συνδυασμό κατανάλωσης** τον  $(1, 1)$ , αν για κάθε  $\epsilon > 0$  και κάθε συνδυασμό κατανάλωσης  $(x_1, x_2)$  ισχύει  $u(x_1 + \epsilon, x_2 + \epsilon) > u(x_1, x_2)$ .
24. Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση ωφελιμότητας έχει άκρως επιθυμητό συνδυασμό τον  $(1, 1)$ . Το αντίστροφο δεν ισχύει. Παράδειγμα για αυτό αποτελεί η συνάρτηση ωφελιμότητας των τέλεια συμπληρωματικών αγαθών  $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$ . Τότε  $(3, 1) > (1, 1)$ , αλλά  $u(3, 1) = 1 = u(1, 1)$ .
25. Για τη συνάρτηση ωφελιμότητας των τέλεια υποκατάστατων αγαθών  $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$  έχουμε ότι αυτή είναι γνησίως μονότονη. Πράγματι αν  $(x_1, x_2) > (y_1, y_2)$  και αυτό σημαίνει για παράδειγμα ότι  $x_1 \geq y_1, x_2 > y_2$  τότε  $x_1 + x_2 > y_1 + y_2$ , ενώ αν  $x_1 > y_1, x_2 \geq y_2$  τότε  $x_1 + x_2 > y_1 + y_2$ .
26. Για τις συναρτήσεις ωφελιμότητας Cobb-Douglas  $u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$ , έχουμε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^a, x > 0, a > 0$  είναι γνησίως αύξουσα, άρα αν  $(x_1, x_2) > (y_1, y_2)$  και αυτό σημαίνει για παράδειγμα ότι  $x_1 \geq y_1, x_2 > y_2$ , τότε  $x_1^a \geq y_1^a, x_2^b > y_2^b$ , ενώ αν  $x_1 > y_1, x_2 \geq y_2$ , τότε  $x_1^a > y_1^a, x_2^b \geq y_2^b$ . Σε κάθε περίπτωση πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη ανισότητες με θετικούς αριθμούς και προκύπτει το ζητούμενο, δηλαδή ότι  $u(x_1, x_2) > u(y_1, y_2)$ .
27. Επίσης για τις συναρτήσεις ωφελιμότητας ισχύει ότι η σύνθεση μιας συνάρτησης ωφελιμότητας με μία γνήσια μονότονη  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  αφήνει αναλλοίωτη την οικογένεια των συνόλων αδιαφορίας. Αυτό ισχύει διότι κάθε γνήσια μονότονη είναι  $1 - 1$ , άρα υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της  $h$  και άρα ισχύει

$$\begin{aligned} \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid (h \circ u)(x_1, x_2) = c\} &= \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid u(x_1, x_2) = h^{-1}(c) = c_1\}. \end{aligned}$$

28. **Οριακός λόγος υποκατάστασης (ΟΛΥ)** είναι η κλίση μιας καμπύλης αδιαφορίας σε ένα σημείο της. Αν η καμπύλη αδιαφορίας είναι ομαλή, δηλαδή δίνεται από μια διαφορίσιμη συνάρτηση της μεταβλητής  $x_1$ , έστω  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x_2 = f(x_1)\}$ , τότε η εφαπτομένη ευθεία στο σημείο -συνδυασμό κατανάλωσης  $(x_1, x_2) = (x_{10}, f(x_{10}))$  είναι  $x_2 - f(x_{10}) = f'(x_{10})(x_1 - x_{10})$ . Άρα γύρω από τον συνδυασμό κατανάλωσης  $(x_1, x_2) = (x_{10}, f(x_{10}))$ , καθώς συμβαίνει μία μικρή μεταβολή στην κατανάλωση  $\Delta x_1$  στην κατανάλωση του αγαθού Α, η μεταβολή της κατανάλωσης  $\Delta x_2$  του αγαθού Β θα 'κινείται' πάνω στην εφαπτομένη ευθεία, ενώ παράλληλα μπορούμε να υποθέσουμε ότι κινούμαστε πάνω στην καμπύλη αδιαφορίας. Ο ΟΛΥ εκφράζει το γεγονός ότι αν μεταβληθεί η κατανάλωση του αγαθού Α κατά  $\Delta x_1$  (αύξηση αντιστοιχεί σε μείωση και το αντίστροφο), τότε για να συνεχίσουμε να κινούμαστε πάνω στην ίδια καμπύλη αδιαφορίας η κατανάλωση του αγαθού Β πρέπει να μεταβληθεί κατά  $f'(x_{10})\Delta x_1$ . Αντίστοιχα, αν μεταβληθεί η κατανάλωση του αγαθού Β κατά  $\Delta x_2$  (αύξηση αντιστοιχεί σε μείωση και το αντίστροφο), τότε για να συνεχίσουμε να κινούμαστε πάνω στην ίδια καμπύλη αδιαφορίας η κατανάλωση του αγαθού Α πρέπει να μεταβληθεί κατά  $\frac{\Delta x_2}{f'(x_{10})}$ .
29. Αν έχουμε δύο αγαθά π.χ. σοκολάτες και γκοφρέττες, ενδεχομένως να μας αρέσει να πραγματοποιούμε συνδυασμούς από αυτά τα γλυκά περισσότερο από το αν είχαμε καταναλωτικούς συνδυασμούς αποτελούμενους μόνο από γκοφρέττες ή μόνο από σοκολάτες. Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί στην έννοια των **(αυστηρά) κυρτών προτιμήσεων** και των **(αυστηρά) σχεδόν κοίλων συναρτήσεων ωφελιμότητας**. Προτού όμως ορίσουμε αυτές τις έννοιες, είναι δόκιμο να ορίσουμε την έννοια του **κυρτού συνόλου**.
30. Κυρτό σύνολο είναι ένα υποσύνολο του επιπέδου, το οποίο έχει την ιδιότητα για κάθε δύο σημεία του το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει να βρίσκεται εντός του συνόλου. Ή αλλιώς το  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  είναι κυρτό αν και μόνο αν για κάθε  $x, y \in A, \lambda \in (0, 1)$  ισχύει  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$ .
31. Μια προτίμηση ονομάζεται **κυρτή** αν για κάθε  $(y_1, y_2), (z_1, z_2) \succeq (x_1, x_2)$  και κάθε  $\lambda \in (0, 1)$  ισχύει  $\lambda(y_1, y_2) + (1 - \lambda)(z_1, z_2) \succeq (x_1, x_2)$ , δηλαδή το σύνολο των συνδυασμών  $\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid (y_1, y_2) \succeq (x_1, x_2)\}$  για κάθε συνδυασμό  $(x_1, x_2)$  είναι κυρτό.
32. Αποδεικνύεται ότι όλες οι προαναφερόμενες συναρτήσεις ωφελιμότητας που αναφέρθηκαν ορίζουν κυρτές σχέσεις προτίμησης.
33. Μια προτίμηση ονομάζεται **αυστηρά κυρτή** αν για κάθε  $(y_1, y_2), (z_1, z_2) \succeq (x_1, x_2), (y_1, y_2) \neq (z_1, z_2)$  και κάθε  $\lambda \in (0, 1)$  ισχύει  $\lambda(y_1, y_2) + (1 - \lambda)(z_1, z_2) \succ (x_1, x_2)$ .

34. Μία συνάρτηση ωφελιμότητας  $u$  ονομάζεται **σχεδόν κοίλη** αν για κάθε  $(y_1, y_2), (z_1, z_2)$  και κάθε  $\lambda \in (0, 1)$  ισχύει  $u(\lambda(y_1, y_2) + (1 - \lambda)(z_1, z_2)) \geq \min\{u(y_1, y_2), u(z_1, z_2)\}$ .
35. Μία συνάρτηση ωφελιμότητας  $u$  ονομάζεται **αυστηρά σχεδόν κοίλη** αν για κάθε  $(y_1, y_2), (z_1, z_2)$  και κάθε  $\lambda \in (0, 1)$  ισχύει  $u(\lambda(y_1, y_2) + (1 - \lambda)(z_1, z_2)) > \min\{u(y_1, y_2), u(z_1, z_2)\}$ .
36. Αποδεικνύεται ότι μία προτίμηση που αναπαρίσταται από συνάρτηση ωφελιμότητας  $u$  είναι (αυστηρά) κυρτή αν και μόνο αν η  $u$  είναι (αυστηρά) σχεδόν κοίλη.
37. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής. Αν  $\succeq$  κυρτή, τότε  $\lambda x + (1 - \lambda)y \succeq x, y$ , όπου  $x, y$  είναι συνδυασμοί αγαθών, δηλαδή  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ . Τότε αφού η  $u$  αναπαριστά την  $\succeq$ ,  $u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq u(x), u(y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$  για κάθε  $x, y$  και  $\lambda \in (0, 1)$ . Αντίστροφα, αν  $u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$  για κάθε  $x, y$  και  $\lambda \in (0, 1)$ , τότε για κάθε δύο συνδυασμούς κατανάλωσης  $x, y$  έχουμε ότι είτε  $u(x) > u(y)$ , είτε  $u(x) \leq u(y)$ . Τότε π.χ. για την πρώτη περίπτωση έχουμε ότι  $\min\{u(x), u(y)\} = u(y)$ , άρα λόγω της  $u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$  για κάθε  $\lambda \in (0, 1)$  ισχύει  $u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq u(y)$  δηλαδή  $\lambda x + (1 - \lambda)y \succeq y$ . Παρόμοια εργαζόμαστε και στην άλλη περίπτωση όπως και στην περίπτωση που η  $u$  είναι αυστηρά σχεδόν κοίλη.
38. Μία κυρτή συνάρτηση μπορεί να είναι σχεδόν κοίλη στη μία διάσταση. Π.χ. η  $f(x) = x^2, x \geq 0$  είναι αυστηρά σχεδόν κοίλη. Έστω  $0 \leq x < y$ . Τότε αν  $0 < a < 1$ ,  $(ax + (1 - a)y)^2 = a^2x^2 + 2a(1 - a)xy + (1 - a)^2y^2 > x^2(a^2 + 2a(1 - a) + (1 - a)^2) = x^2 = \min\{x^2, y^2\}$ .
39. Ο γενικός ορισμός μίας **κοίλης συνάρτησης**  $u : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$  είναι  $u(\lambda(y_1, y_2) + (1 - \lambda)(z_1, z_2)) \geq \lambda u(y_1, y_2) + (1 - \lambda)u(z_1, z_2)$  για κάθε  $(y_1, y_2), (z_1, z_2)$  και  $\lambda \in (0, 1)$ .
40. Για τον ορισμό της **αυστηρά κοίλης** συνάρτησης αρκεί αντί  $\geq$  να βάλουμε  $>$ .
41. Μία (αυστηρά) κοίλη συνάρτηση είναι (αυστηρά) σχεδόν κοίλη. Αν τις συναρτήσεις τις ορίσουμε σε ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}_+^2$  αυτό πρέπει να είναι κυρτό.
42. Τέλος, υπάρχει το ζήτημα του **κορεσμού**. Γυρίζοντας στο παράδειγμα με τις γκοφρέττες και τις σοκολάτες, δεν μπορείτε να καταναλώνετε απεριόριστες ποσότητες από αυτά τα αγαθά. Κάποτε επέρχεται ένας κορεσμός. Καθορίζετε εσείς έναν συνδυασμό δηλαδή που καθιστά το μέγιστο που σας ενδιαφέρει να καταναλώσετε και από τα δύο αυτά αγαθά. Μία προτίμηση ονομάζεται **μη κορεσμένη** αν για κάθε συνδυασμό  $(x_1, x_2)$  υπάρχει  $(y_1, y_2)$  με  $(y_1, y_2) \succ (x_1, x_2)$ .