ΜΙΚΡΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
Α′ ΕΞΑΜΗΝΟ
1) ΕΠΙΛΟΓΗ
2) ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΖΗΤΗΣΗΣ

Διδάσκων: Χ. Κουντζάκης

1. Αποδεικνύεται ότι αν ένα άτομο έχει μια προτίμηση $\succeq$ στα αγαθά Α και Β που αναπαρίσταται από μια συνεχή συνάρτηση ωφελιμότητας u με άκρως επιθυμητό συνδυασμό το $(1,1)$, τότε το μέγιστο της u στο σύνολο προϋπολογισμού $B(p_1,p_2,m), p_1>0, p_2>0, m>0$ λαμβάνεται πάνω στον εισοδηματικό περιορισμό, αν επιπλέον η u είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}^2_+$.

2. Έστω (x_1,x_2) το μέγιστο που υπάρχει λόγω συνέχειας και $p_1x_1+p_2x_2<m$. Θέτω $\delta=m-p_1x_1+p_2x_2>0$. Θεωρώ τον συνδυασμό $\frac{\delta}{2}(\frac{1}{p_1+p_2},\frac{1}{p_1+p_2})$ και υποθέτω ότι ο καταναλωτής προσθέτει αυτό το συνδυασμό στην αρχική του κατανάλωση. Τότε ισχύει, $p_1x_1+p_2x_2+\frac{\delta}{2}(\frac{p_1}{p_1+p_2}+\frac{p_2}{p_1+p_2})=p_1x_1+p_2x_2+\frac{\delta}{2}<m$. Όμως $u((x_1,x_2)+\frac{\delta}{2}(\frac{1}{p_1+p_2},\frac{1}{p_1+p_2}))>u(x_1,x_2)$, δηλαδή το (x_1,x_2) δεν είναι μέγιστο.

3. Το σύνολο $x(p_1,p_2,m)$ των συνδυασμών κατανάλωσης που μεγιστοποιούν την ωφελιμότητα u στο σύνολο προϋπολογισμού $B(p_1,p_2,m), p_1>0, p_2>0, m>0$ ονομάζεται **σύνολο ζήτησης**.

4. Αποδεικνύεται ότι αν ένα άτομο έχει μια προτίμηση $\succeq$ στα αγαθά Α και Β που αναπαρίσταται από μια αυστηρά σχεδόν κοίλη συνάρτηση ωφελιμότητας u, τότε το σύνολο $x(p_1,p_2,m)$ των συνδυασμών κατανάλωσης που μεγιστοποιούν την ωφελιμότητα u αποτελείται από ένα και μοναδικό στοιχείο.

5. Αν υποθέσουμε ότι $(x_1,x_2)\neq(y_1,y_2)$ δύο στοιχεία του $x(p_1,p_2,m)$, τότε για κάθε $\lambda\in(0,1)$ ισχύει $u(\lambda\cdot(x_1,x_2)+(1-\lambda)\cdot(y_1,y_2))>\min\{u(x_1,x_2),u(y_1,y_2)\}=u(x_1,x_2)$, άτοπο διότι το $\lambda\cdot(x_1,x_2)+(1-\lambda)\cdot(y_1,y_2)$ είναι στοιχείο του $B(p_1,p_2,m)$.

6. Η συνάρτηση $x:\mathbb{R}^2_{++}\times\mathbb{R}_{++}$ με $(p_1,p_2,m)\mapsto x(p_1,p_2,m)$ στην περίπτωση που η συνάρτηση ωφελιμότητας είναι γνησίως μονότονη (ή γενικότερα έχει άκρως επιθυμητό συνδυασμό τον $(1,1)$), συνεχής και αυστηρά σχεδόν κοιλη, ή γενικά όταν το σύνολο ζήτησης είναι μονοσύνολο, ονομάζεται **συνάρτηση ζήτησης**.

7. Παράδειγμα εύρεσης της συνάρτησης ζήτησης 1: Τέλεια υποκατάστατα αγαθά. Έχουμε να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $u(x_1,x_2)=x_1+x_2$ στο $B(p_1,p_2,m)$. Η συνάρτηση ωφελιμότητας είναι γνησίως μονότονη, άρα το μέγιστο λαμβάνεται πάνω στον εισοδηματικό περιορισμό. Δηλαδή οι άριστοι συνδυασμοί ικανοποιούν τις σχέσεις, $p_1x_1+p_2x_2=m, x_1\geq 0, x_2\geq 0$. Αν $p_1=p_2=p$, τότε οι άριστοι συνδυασμοί είναι το ευθύγραμμο τμήμα $x_1+x_2=\frac{m}{p}, x_1\geq 0, x_2\geq 0$. Αν $p_1\neq p_2$, τότε $x_2=\frac{m}{p_2}-\frac{p_1}{p_2}x_1$, δηλαδή έχουμε να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $g(x_1)=\frac{m}{p_2}-\frac{p_1}{p_2}x_1+x_1$, όταν $x_1\in[0,\frac{m}{p_1}]$. Είναι $g'(x_1)=\frac{p_2-p_1}{p_2}$. Άρα αν $p_2>p_1$, τότε το μέγιστο λαμβάνεται όταν $x_1=\frac{m}{p_1}$ (και $x_2=0$), ενώ αν $p_1>p_2$ θα είναι $x_1=0$ και $x_2=\frac{m}{p_2}$.

8. Παράδειγμα εύρεσης της συνάρτησης ζήτησης 2: Τέλεια συμπληρωματικά αγαθά. Σύμφωνα με ό,τι είπαμε πριν έχουμε να μεγιστοποιήσουμε την $u(x_1,x_2)=\min\{x_1,x_2\}$ στο $B(p_1,p_2,m)$. Η συνάρτηση ωφελιμότητας είναι γνησίως μονότονη, άρα το μέγιστο λαμβάνεται πάνω στον εισοδηματικό περιορισμό. Δηλαδή οι άριστοι συνδυασμοί ικανοποιούν τις σχέσεις, $p_1x_1+p_2x_2=m, x_1\geq 0, x_2\geq 0$. Λόγω της γεωμετρίας των καμπυλών αδιαφορίας, το σημείο τομής με το σύνολο προϋπολογισμού έχει τη μορφή $(c,c), c>0$, άρα το σημείο μεγιστοποίησης είναι $(\frac{m}{p_1+p_2},\frac{m}{p_1+p_2})$.

9. Ως ασκήσεις μπορούν να δοκιμαστούν οι συναρτήσεις ζήτησης των γενικευμένων υποκατάστατων με $u(x_1,x_2)=ax_1+bx_2$, $a>0, b>0$, καθώς και των γενικευμένων συμπληρωματικών με $u(x_1,x_2)=\min\{ax_1,bx_2\}$, $a>0, b>0$.

10. Παράδειγμα εύρεσης της συνάρτησης ζήτησης 3. Αδιάφορα αγαθά. Σύμφωνα με ό,τι είπαμε πριν έχουμε να μεγιστοποιήσουμε την $u(x_1, x_2) = x_2$ στο $B(p_1, p_2, m)$ αν το A είναι αδιάφορο για τον καταναλωτή. Η συνάρτηση ωφελιμότητας είναι γνησίως μονότονη, άρα το μέγιστο λαμβάνεται πάνω στον εισοδηματικό περιορισμό. Δηλαδή οι άριστοι συνδυασμοί ικανοποιούν τις σχέσεις, $p_1x_1 + p_2x_2 = m, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. Ο άριστος συνδυασμός είναι ο $(0, \frac{m}{p_2})$.

11. Αν το αγαθό B είναι αδιάφορο, δηλαδή $u(x_1, x_2) = x_1$ τότε ο αντίστοιχος άριστος συνδυασμός κατανάλωσης είναι ο $(\frac{m}{p_1}, 0)$.

12. Αν η προτίμηση του καταναλωτή αναπαρίσταται από μια συνάρτηση Cobb-Douglas $u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$, $x_1 > 0, x_2 > 0, a + b = 1, a, b > 0$, τότε πάλι η σχέση προτίμησης είναι γνησίως μονότονη και μεγιστοποείται στον εισοδηματικό περιορισμό. Άρα η υπό μεγιστοποίηση συνάρτηση είναι π.χ. $f(x_1) = x_1^a(\frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1)^b$, $0 < x_1 < \frac{m}{p_1}$. Ο άριστος συνδυασμός είναι $(\frac{am}{p_1}, \frac{bm}{p_2})$. Αυτό προκύπτει από τη μελέτη της παραπάνω συνάρτησης. Είναι

$$f'(x_1) = x_1^{a-1}(\frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1)^{b-1}[\frac{am}{p_2} - \frac{p_1x_1}{p_2}],$$

άρα το $x_1 = \frac{am}{p_1}$ είναι θέση ολικού μεγίστου για την f. Άρα από αντικατάσταση στον εισοδηματικό περιορισμό, έχουμε $x_2 = \frac{bm}{p_2}$.

13. Αν η ζήτηση του αγαθού A, δηλαδή η συντεταγμένη $x_1(p_1, p_2, m)$ στον άριστο συνδυασμό

$$(x_1(p_1, p_2, m), x_2(p_1, p_2, m))$$

έχει θετική παράγωγο ως προς το εισόδημα, δηλαδή $\frac{d}{dm}x_1(p_1, p_2, m) > 0$ τότε το αγαθό αυτό ονομάζεται **κανονικό**.

14. Αυτό σημαίνει ότι η (επιθυμητή) κατανάλωση του αγαθού αυτού όσο αυξάνεται το εισόδημα, αυξάνεται επίσης.

15. Αν η ζήτηση του αγαθού A έχει αρνητική παράγωγο ως προς το εισόδημα, δηλαδή ισχύει $\frac{d}{dm}x_1(p_1, p_2, m) < 0$ τότε το αγαθό αυτό ονομάζεται **κατώτερο**.

16. Αυτό σημαίνει ότι η (επιθυμητή) κατανάλωση του αγαθού αυτού θα αυξηθεί αν μειωθεί το εισόδημα.

17. Οι καμπύλες **εισοδήματος -κατανάλωσης** είναι εκείνες οι καμπύλες που ενώνουν τους άριστους συνδυασμούς κατανάλωσης για διάφορα επίπεδα εισοδήματος, αν οι τιμές (p_1, p_2) παραμείνουν σταθερές.

18. Αντίστοιχα ονομάζουμε **καμπύλες Engel** τις αντίστροφες συναρτήσεις του τύπου $m = m(x_i), i = 1, 2$ ($i = 1$ αν αναφερόμαστε στο αγαθό A και $i = 2$ αν αναφερόμαστε στο αγαθό B) όπου $x_i = x_i(p_1, p_2, m)$. Δηλαδή η καμπύλη Engel δείχνει πώς μεταβάλλεται η ζήτηση ενός μόνο αγαθού σε σχέση με το εισόδημα όταν οι τιμές (p_1, p_2) παραμείνουν σταθερές.

19. Στα τέλεια υποκατάστατα, αναφέραμε ότι αν $p_1 > p_2$, τότε η άριστη κατανάλωση του δεύτερου αγαθού είναι $\frac{m}{p_2}$. Τότε η καμπύλη Engel του δεύτερου αγαθού είναι $m = m(x_2) = p_2x_2, x_1 > 0$. Αν $p_2 > p_1$, τότε η άριστη κατανάλωση του πρώτου αγαθού είναι $\frac{m}{p_1}$. Τότε η καμπύλη Engel του πρώτου αγαθού είναι $m = m(x_1) = p_1x_1, x_2 > 0$.

20. Στην περίπτωση που έχουμε $p_1 = p_2$ δεν υπολογίζουμε καμπύλες Engel, γιατί το σύνολο ζήτησης δεν αποτελείται μόνο από έναν συνδυασμό κατανάλωσης.

21. Στα τέλεια συμπληρωματικά ο ζητούμενος συνδυασμός είναι $(\frac{m}{p_1+p_2}, \frac{m}{p_1+p_2})$. Άρα η καμπύλη Engel του πρώτου αγαθού είναι

$$m = (p_1 + p_2) \cdot \frac{m}{p_1 + p_2} = (p_1 + p_2)x_1(p_1, p_2, m) = (p_1 + p_2)x_1, x_1 > 0.$$

Αντίστοιχα η καμπύλη Engel του δεύτερου αγαθού είναι

$$m = (p_1 + p_2) \cdot \frac{m}{p_1 + p_2} = (p_1 + p_2)x_2(p_1, p_2, m) = (p_1 + p_2)x_2, x_2 > 0.$$

22. Στην περίπτωση των προτιμήσεων που ορίζονται από συναρτήσεις ωφελιμότητας Cobb-Douglas ο ζητούμενος άριστος συνδυασμός είναι $(\frac{am}{p_1}, \frac{bm}{p_2})$. Άρα $x_1 = x_1(p_1, p_2, m) = \frac{am}{p_1}, x_2 = x_2(p_1, p_2, m) = \frac{bm}{p_2}$ και επομένως οι αντίστοιχες καμπύλες Engel είναι $m = m(x_1) = \frac{p_1 x_1}{a}, x_1 > 0$, $m = m(x_2) = \frac{p_2 x_2}{b}, x_2 > 0$.

23. Αν ένα αγαθό είναι τέτοιο ώστε η ζήτησή του αυξάνεται πολύ γρηγορότερα σε σχέση με το εισόδημα του καταναλωτή, αυτό ονομάζεται **αγαθό πολυτελείας**. Αν όχι, λέμε ότι είναι **βασικό αγαθό**.

24. Οι προτιμήσεις εκείνες που επιτρέπουν μια συμπεριφορά τέτοια ώστε η ζήτηση των αγαθών αυξάνει με τον ίδιο ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται το εισόδημα του καταναλωτή, είναι οι **ομοθετικές προτιμήσεις**. Μια προτίμηση $\succeq$ ονομάζεται ομοθετική αν και μόνο αν ισχύει ότι αν $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$, τότε για κάθε $t > 0$ ισχύει $t(x_1, x_2) \succeq t(y_1, y_2)$.

25. Οι συναρτήσεις ωφελιμότητας που αναπαριστούν τις σχέσεις προτίμησης των τέλεια υποκατάστατων και τέλεια συμπληρωματικών αγαθών ορίζουν ομοθετικές προτιμήσεις.

26. Στην περίπτωση των τέλεια υποκατάστατων αγαθών, αυτό ισχύει διότι

$$u(tx_1, tx_2) = tx_1 + tx_2 = t(x_1 + x_2) = t(x_1 + x_2) = tu(x_1, x_2) \geq u(ty_1, ty_2) =$$

$$= ty_1 + ty_2 = t(y_1 + y_2) = t(y_1 + y_2) = tu(y_1, y_2),$$

αν $u(x_1, x_2) \geq u(y_1, y_2)$.

27. Επίσης στην περίπτωση των τέλεια συμπληρωματικών αγαθών, αν $u(x_1, x_2) \geq u(y_1, y_2)$ δηλαδή $\min\{x_1, x_2\} \geq \min\{y_1, y_2\}$, τότε αν $t > 0$ έχουμε ότι

$$tu(x_1, x_2) = t\min\{x_1, x_2\} = \min\{tx_1, tx_2\} = u(tx_1, tx_2)$$

$$\geq tu(y_1, y_2) = t\min\{y_1, y_2\} = \min\{ty_1, ty_2\} = u(ty_1, ty_2).$$

28. Μπορεί εύκολα να δειχθεί το ίδιο και για τις προτιμήσεις που ορίζουν οι συναρτήσεις ωφελιμότητας Cobb-Douglas (ΑΣΚΗΣΗ).