Κεφάλαιο 1

Βαριές Ουρές -Εισαγωγή στην Αντασφάλιση

Πρόταση 1.0.1 *Αν η τ.μ. X έχει θετική βαριά ουρά, τότε $v_X < \infty$.*

Απόδειξη.

Αφού η X έχει βαριά ουρά, τότε για $r = 1$ ισχύει $\mathbb{E}(e^X) = +\infty$, δηλαδή η ακολουθία $1k!\mathbb{E}(X^k)$ δεν είναι φραγμένη, άρα και η ακολουθία $\mathbb{E}(X^k)$ δεν είναι φραγμένη. Επομένως, το σύνολο $\{p \in \mathbb{R}_+ | \mathbb{E}(X^p) < +\infty\}$ είναι άνω φραγμένο.

Ένα από τα προβλήματα στη μοντελοποίηση του ασφαλιστικού κινδύνου -ακόμη και για συγκεκριμένο πλήθος ασφαλιστηρίων συμβολαίων- είναι το πρόβλημα της *κλειστότητας ως προς τη συνέλιξη*. Δηλαδή, ακόμη και αν υποθέσουμε ότι το χαρτοφυλάκιό μας δεν είναι ομογενές αλλά τουλάχιστον περιλαμβάνει *ανεξάρτητους* κινδύνους $(X_1, X_2, ..., X_n)$, και οι τ.μ. X_i ακολουθούν μία κατανομή $F_i, i = 1, 2, ..., n$ όπου $F_i \in K \subseteq \mathcal{K}$ και $\mathcal{K}$ το σύνολο των κατανομών με βαριές ουρές, ΔΕΝ ισχύει ΠΑΝΤΑ ότι

$$F_{\sum_{i=1}^n X_i} \in K.$$

Το ότι διαπιστώνουμε πώς οι κατανομές 'είναι' οι F_i είναι αποτέλεσμα στατιστική επεξεργασίας δεδομένων που γίνεται π.χ. όπως στο πρώτο κεφάλαιο.

Άσκηση. Αν οι αποζημιώσεις είναι ανεξάρτητες εκθετικές με παραμέτρους $\lambda_i, i = 1, 2, ..., n$, η συνολική αποζημίωση είναι εκθετική; **Άσκηση.** Η εκθετική κατανομή έχει ελαφριά ή βαριά θετική ουρά;

Ας αναφέρουμε μερικές οικογένειες βαρέων ουρών που έχουν την ιδιότητα να είναι κλειστές ως προς τη συνέλιξη.

1. Αν μία κατανομή έχει συνάρτηση ουράς $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ με την ιδιότητα
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overline{F}(tx)}{\overline{F}(x)} = t^a, a \in \mathbb{R},$$
για κάθε $t > 0$ ονομάζεται *κατανομή με ομαλά μεταβαλλόμενη ουρά.*

2. Αν μία καταανομή έχει συνάρτηση ουράς $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ με την ιδιότητα
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overline{F}(tx)}{\overline{F}(x)} < \infty,$$
για κάθε $t > 0$ ονομάζεται *κατανομή με κυριαρχημένα μεταβαλλόμενη ουρά.*

Άσκηση.

(α΄) Να βρεθούν κατανομές που να ανήκουν στην οικογένεια των ομαλά μεταβαλλόμενων ουρών και να δειχεί ότι είναι βαριές ουρές.

(β΄) Να βρεθούν κατανομές που να ανήκουν στην οικογένεια των κυριαρχημένα μεταβαλλόμενων ουρών και να δειχεί ότι είναι βαριές ουρές.

(γ΄) Να βρεθούν οι δείκτες ροπών αυτών.

Στα Μοντέλα Κινδύνου οι απαριθμήτριες τ.μ. $N = N_t, t \in [0, T]$, χρησιμοποιούνται συνήθως για να δηλώσουν το πλήθος των ασφαλιστηρίων συμβολαίων που πρέπει να αποζημιώσει η εταιρία Α εντός ενός χρονικού ορίζοντα, π.χ. $[0, T]$. Για το λόγο αυτό η κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων δεν είναι συνήθως της μορφής $\sum_{i=1}^{n} X_i$, αλλά της μορφής
$$\sum_{i=1}^{N_T} X_i.$$

1.0.1 Αντασφάλιση

Στην Αντασφάλιση, το τυχαίο άθροισμα $\sum_{i=1}^{N_T} X_i$ αφορά τις συνολικές ΑΡΧΙΚΕΣ αποζημιώσεις που τίθενται σε καθεστώς Αντασφάλισης μέχρι τη χρονική στιγμή T. Η απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία $N = N_t, t \in [0, T]$, απαριθμεί ΠΟΣΑ ασφαλιστήρια συμβόλαια τίθενται σε καθεστώς Αντσφάλισης κατά τη χρονική στιγμή t. Σαφώς και η πιο απλή περίπτωση είναι εκείνη κατά την οποία η N_t είναι μία ντετερμινιστική συνάρτηση και άρα κατά την τελική χρονική περίοδο απλά αθροίζουμε κάποια X_i και έχουμε μία τ.μ. της μορφής $\sum_{i=1}^{N} X_i$, η οποία αν μάλιστα τα X_i ανήκουν σε κάποια οικογένεια κλειστή ως προς τη συνέλιξη, υπολογίζουμε και την κατανομή της. Ο υπολογισμός της κατανομής δεν είναι δύσκολος, ούτε κατά την περίπτωση όπου η N_t αποτελείται από διαδοχικές στιγμές εμφάνισης ατυχημάτων που είναι εκθετικές κατανομές (Κλασσικό Μοντέλο Κινδύνου), ούτε μία γενική κατανομή (Ανανεωτικό Μοντέλο Κινδύνου)- αν και στην περίπτωση της Αντασφάλισης οι διαδοχικοί χρόνοι έκθεσης συμβολαίου σε καθεστώς Αντασφάλισης πέραν της εκθετικής κατανομής θα μελετηθούν παρακάτω.

Ορισμός 1.0.2 *Η Αντασφάλιση καθεαυτή είναι η τοποθέτηση ενός συμβολαίου με αποζημίωση* X_i *σε ένα καθεστώς* $I_i(X_i)$ *το οποίο ονομάζεται αντασφαλιστικό σχήμα, τέτοιο ώστε*

$$\mathbb{P}(X_i \geq I_i(X_i)) \leq 1 - a, a \in (0,1).$$

Αν σε ντετερμινιστικό χρόνο n τεθούν αντίστοιχα n συμβόλαια σε καθεστώς αντασφάλισης σε επίπεδο σημαντικότητας a, το ερώτημα είναι αν μειώνεται ο συλλογικός κίνδυνος.