Αντασφάλιση με σχήμα Stop-Loss

9 Μαρτίου 2015

Σε σχήμα αντασφάλισης Stop-Loss υποθέτουμε ένα ομογενές χαρτοφυλάκιο συμβολαίων $(X_1, X_2, ..., X_n)$ όπου η τ.μ. X_i ακολουθεί την κατανομή F για κάθε $i = 1, 2, ..., n$. Το επίπεδο ασφαλείας για κάθε συμβολαιο που επιλέγει η πρωτασφαλίστρια εταιρία είναι $d_i, i = 1, 2, ..., n$ ή αλλιώς δίνεται από το διάνυσμα $d = (d_1, d_2, ..., d_n)$ όπου $d \in \mathbb{R}_+^n$. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $X_i \wedge d_i$ -δηλαδή του *εναπομείνοντος κινδύνου* κάθε συμβολαίου στην πρωτασφαλίστρια εταιρία είναι αν $X_i \wedge d_i = X_i$,

$$P(X_i \wedge d_i \leq t) = P(X_i \leq d_i, t) = F_{X_i}(d_i \wedge t).$$

Αν $X_i \wedge d_i = d_i$,

$$P(X_i \wedge d_i \leq t) = P(d_i \leq t) = 1,$$

αν $t \geq d_i$ και 0 $t < d_i$. Άρα *ασυμπτωτικά* η α.συν.κ. της $X_i \wedge d_i$, έχει τις ίδιες ιδιότητες με την X_i. Επομένως το $\sum_{i=1}^n X_i \wedge d_i$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{D}$ αν η F ανήκει στην $\mathcal{D}$. Αν απαιτήσουμε να ισχύει

$$\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i \wedge d_i > u_E + c_E T) \leq 1 - a_E,$$

τότε το διάνυσμα των *διατεταγμένων* τ.μ. των $X_i \wedge d_i$ μπορεί να θεωρηθεί asymptotically comonotonic με ένα διάνυσμα $(U_1, U_2, ..., U_n)$, όπου U_i : ομοιόμορφες στο $(0, 1)$. Άρα

$$ES_{a_E}(\sum_{i=1}^n x_i \wedge d_i) = \sum_{i=1}^n ES_{a_E}(X_i) = nES_{a_E}(X) \geq -(u_E + c_E T).$$

αφού X_i είναι ισόνομες. Το $V@R_{a_E})(X_i) \leq \frac{u_E + c_E T}{n}$, για κάθε i. Άρα τα αποδεκτά διανύσματα d για τα stop-loss σχήματα είναι στο διάστημα $[\frac{1}{n}(u_E + c_E T), \min_i V@R_{a_E}(X_i)]$, για κάθε i, σύμφωνα με τη λογική που δείξαμε και στην αναλογική αντασφάλιση. Δηλαδή το πρόβλημα του πρωτασφαλιστή είναι

$$Minimize\, \pi \cdot t, s.t. d_i \in [\frac{1}{n}(u_E + c_E T), \min_i V@R_{a_E}(X_i)].$$

το οποίο έχει λύση λόγω γραμμικότητας της αντικ. συνάρτησης και κυρτότητας -συμπάγειας του συνόλου των περιορισμών. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $(X_i - d_i)^+$ -δηλαδή του αναληφθέντος κινδύνου κάθε συμβολαίου από την αντασφαλίστρια εταιρία είναι αν $(X_i - d_i)^+ = X_i - d_i$ (δηλαδή το αντίστοιχο call option είναι in-the-money)

$$P((X_i - d_i)^+ \leq t) = P(X_i - d_i \leq t) = P(X_i \leq d_i + t) = F_{X_i}(d_i + t).$$

Αν $(X_i - d_i)^+ = 0$, (δηλαδή το αντίστοιχο call option είναι out-of-the-money)

$$P(X_i - d_i)^+ \leq t) = P(0 \leq t) = 1,$$

αν $t \geq 0$ και 0 και $t < 0$. Άρα *ασυμπτωτικά* η α.συν.κ. της $(X_i - d_i)^+$, έχει τις ίδιες ιδιότητες με την X_i. Επομένως το $\sum_{i=1}^n (X_i - d_i)^+$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{D}$ αν η F ανήκει στην $\mathcal{D}$. Αν απαιτήσουμε να ισχύει

$$\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n (X_i - d_i)^+ > u_A + c_A T + \pi d) \leq 1 - a_A,$$

τότε

$$\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i > u_A + c_A T + \pi d + \mathbf{1} \cdot d) \leq 1 - a_A,$$

και άρα παίρνοντας την αντίστοιχη αντισότητα για το ES_{a_A} διατάσσοντας τα X_i παίρνω

$$\sum_{i=1}^{n} ES_a(X_i) \geq -(u_A + c_A T + \pi d + \mathbf{1} \cdot d),$$

Άσκηση. Βρείτε ανισότητες της μορφής

$$P(|X - m(X)| \leq k(X)| \leq h(X),$$

όπου $m(X), h(X), k(X)$, ροπές της Q ή κυρτές συναρτήσεις τους.