΄ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ΄
ΕΞΕΤΑΣΗ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010
Λύσεις των Θεμάτων

Διδάσκων : Χ. Κουντζάκης

30 Ιανουαρίου 2010

Θέμα 1 *Να δείξετε ότι η σχέση προτίμησης που ορίζει στο $\mathbb{R}^2_+$ η συνάρτηση ωφελιμότητας $u_1(x,y) = x+y$ είναι συνεχής και αυστηρά μονότονη. (1 μονάδα)*

Απάντηση: Η σχέση προτίμησης $\succeq$ που ορίζει η u_1 στο $\mathbb{R}^2_+$ είναι η ακόλουθη :

$$(x_1,x_2) \succeq (y_1,y_2) \Longleftrightarrow u_1(x_1,x_2) \geq u_1(y_1,y_2),$$

όπου $(x_1,x_2),(y_1,y_2)$ είναι δέσμες αγαθών του $\mathbb{R}^2_+$. Για να δείξουμε ότι η $\succeq$ είναι συνεχής, αρκεί να δειχθεί ότι τα υποσύνολα $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2_+ | (x_1,x_2) \succeq (z_1,z_2)\}, \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2_+ | (z_1,z_2) \succeq (x_1,x_2)\}$ είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2_+$. Αυτό ισχύει όμως διότι

$$\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2_+ | (x_1,x_2) \succeq (z_1,z_2)\} = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2_+ | u_1(x_1,x_2) \geq u_1(z_1,z_2)\},$$

$$\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2_+ | (z_1,z_2) \succeq (x_1,x_2)\} = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2_+ | u_1(z_1,z_2) \geq u_1(x_1,x_2)\},$$

για κάθε $(z_1,z_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Το πρώτο σύνολο είναι το

$$(u_1)^{-1}([u_1(z_1,z_2),+\infty))$$

και το δεύτερο είναι το

$$(u_1)^{-1}((-\infty,u_1(z_1,z_2)])$$

στο $\mathbb{R}^2_+$, τα οποία λόγω συνέχειας της u_1 είναι κλειστά υποσύνολά του, για κάθε $(z_1,z_2) \in \mathbb{R}^2_+$.

Σχετικά με την αυστηρή μονοτονία, αν $(x_1,x_2) > (y_1,y_2)$ τότε ισχύουν είτε οι ανισότητες $x_1 \geq y_1, x_2 > y_2$, είτε οι ανισότητες $x_1 > y_1, x_2 \geq y_2$. Είτε στην πρώτη, είτε στη δεύτερη περίπτωση προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει ότι $x_1 + x_2 > y_1 + y_2$. Όμως τα αθροίσματα αυτά είναι οι ωφελιμότητες των δεσμών $(x_1,x_2),(y_1,y_2)$ αντίστοιχα και άρα προκύπτει τελικά ότι $u_1(x_1,x_2) > u_1(y_1,y_2)$.

Θέμα 2 *Γιατί η παραπάνω σχέση προτίμησης είναι κυρτή ενώ δεν είναι αυστηρά κυρτή ; (1.5 μονάδες)*

Απάντηση: Για την κυρτότητα, έστω δύο δέσμες αγαθών $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2_+$ και πραγματικός αριθμός $a \in (0,1)$. Τότε ο κυρτός συνδυασμός των $(x_1,x_2),(y_1,y_2)$ ως προς τον a είναι η δέσμη αγαθών $(ax_1 + (1-a)y_1, ax_2+(1-a)y_2)$. Ισχύει ότι $u_1(ax_1+(1-a)y_1, ax_2+(1-a)y_2) = a(x_1+x_2)+(1-a)(y_1+y_2) = au_1(x_1,x_2)+(1-a)u_1(y_1,y_2)$, δηλαδή ισχύει ότι $u_1(a(x_1,x_2)+(1-a)(y_1,y_2)) \geq au_1(x_1,x_2)+(1-a)u_1(y_1,y_2)$, δηλαδή η u_1 είναι κοίλη και επομένως σχεδόν κοίλη και για την ακρίβεια ισχύει η ισότητα. Αλλά για την αυστηρή κυρτότητα, έστω οι δέσμες αγαθών $x = (\frac{1}{3},\frac{2}{3}), y = (\frac{1}{4},\frac{3}{4})$. Ως προς τη σχέση προτίμησης που ορίζει η u_1 ισχύει $x \succeq z, y \succeq z$ όπου $z = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Θεωρώ τον κυρτό συνδυασμό $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$. Παρατηρώ ότι ισχύει $u_1(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) = 1 = u_1(z)$ συνεπώς δεν ισχύει

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \succ z,$$

και άρα η σχέση προτίμησης που ορίζεται από την u_1 δεν είναι αυστηρά κυρτή.

Θέμα 3 *Να βρεθεί το σύνολο $x(p,w)$ ενός καταναλωτή σε μια οικονομία με δύο αγαθά του οποίου η σχέση προτίμησης ορίζεται από την $u_1(x,y) = x+y$ αν $w = 1$ και $p_1 = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $p_2 = (\frac{1}{2},1)$. (1 μονάδα)*

Απάντηση: Το σύνολο προϋπολογισμού $B(p_1, w)$ είναι $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ | \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \leq 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ | x + y \leq 2\}$. Λόγω της συνέχεις και της αυστηρής μονοτονίας της σχέσης προτίμησης $\succeq$ που ορίζεται από την u_1, οι δέσμες κατανάλωσης που αποτελούν μέγιστα της σχέσης προτίμησης ανήκουν στον εισοδηματικό περιορισμό $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ | x + y = 2\}$. Παρατηρούμε ότι για κάθε στοιχείο του εισοδηματικού περιορισμού, η συνάρτηση ωφελιμότητας u_1 λαμβάνει την τιμή 2, η οποία είναι και η μέγιστη τιμή. Άρα το $x(p_1, w)$ είναι στην περίπτωση αυτή ο εισοδηματικός περιορισμός.

Στην περίπτωση όπου $p_2 = (\frac{1}{2}, 1)$, το σύνολο προϋπολογισμού $B(p_2, w)$ είναι $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ | \frac{1}{2}x + y \leq 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ | \frac{1}{2}x + y \leq 1\}$. Λόγω της συνέχεις και της αυστηρής μονοτονίας της σχέσης προτίμησης $\succeq$ που ορίζεται από την u_1, οι δέσμες κατανάλωσης που αποτελούν μέγιστα της σχέσης προτίμησης ανήκουν στον εισοδηματικό περιορισμό $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ | \frac{1}{2}x + y = 1\}$. Άρα για να βρούμε τα στοιχεία του $x(p_2, w)$, αρκεί να προσδιορίσουμε ποια στοιχεία του εισοδηματικού περιορισμού μεγιστοποιούν τη συνάρτηση u_1. Η εξίσωση που ικανοποιούν τα στοιχεία του εισοδηματικού περιορισμού είναι $x + 2y = 2$ και λύνοντάς την ως προς y, προκύπτει ότι $y = \frac{2-x}{2}$, με $y \geq 0$ δηλαδή $0 \leq x \leq 2$. Αντικαθιστώντας το y στη συνάρτηση ωφελιμότητας για να προσδιορίσουμε την τεταγμένη του σημείου μεγιστοποίησης, έχουμε ότι: $f(x) = u_1(x, \frac{2-x}{2}) = x + \frac{2-x}{2} = 2 + \frac{x}{2}$. Άρα επειδή $f'(x) = \frac{1}{2}$, το μέγιστο λαμβάνεται στο $x_0 = 2$ και άρα στο $y_0 = 0$. Άρα το $x(p_2, w) = \{(2, 0)\}$.

Θέμα 4 *Έστω οικονομία ανταλλαγής με δύο αγαθά και δύο καταναλωτές. Οι σχέσεις προτίμησης των καταναλωτών ορίζονται από τις συναρτήσεις ωφελιμότητας $u_1(x,y) = u_2(x,y) = x + y, x \geq 0, y \geq 0$ και οι αρχικές δέσμες αγαθών τους είναι $e_1 = (2,3), e_2 = (3,4)$. Η αρχική κατανομή είναι άριστη κατά Pareto ; (1 μονάδα)*

Απάντηση: Δες 3ο φυλλάδιο ασκήσεων.

Θέμα 5 *Έστω οικονομία ανταλλαγής με δύο αγαθά και δύο καταναλωτές. Οι σχέσεις προτίμησης των καταναλωτών ορίζονται από τις συναρτήσεις ωφελιμότητας $u_1(x,y) = u_2(x,y) = x + y, x \geq 0, y \geq 0$ και οι αρχικές δέσμες αγαθών τους είναι $e_1 = (2,0), e_2 = (4,5)$. Να βρεθούν οι οι τιμές ισορροπίας και οι δέσμες κατανάλωσης στην ισορροπία για αυτήν την οικονομία ανταλλαγής. (2.5 μονάδες)*

Απάντηση: Αν το διάνυσμα τιμών των αγαθών είναι $(p_1, p_2, p_1 > 0, p_2 > 0$ τότε επειδή η συνάρτηση ωφελιμότητας u_1 είναι συνεχής και αυστηρά μονότονη, το μέγιστο λαμβάνεται στον εισοδηματικό περιορισμό. Ο εισοδηματικός περιορισμός του πρώτου καταναλωτή είναι $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ | p_1 x + p_2 y = 2p_1\}$. Ο εισοδηματικός περιορισμός του δεύτερου καταναλωτή είναι $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ | p_1 x + p_2 y = 4p_1 + 5p_2\}$. Η συνάρτηση ωφελιμότητας του πρώτου καταναλωτή στον εισοδηματικό περιορισμό γίνεται $f(x) = x + \frac{p_1}{p_2}(2 - x) = (1 - \frac{p_1}{p_2})x + 2\frac{p_1}{p_2}$, ενώ $y = \frac{p_1}{p_2}(2 - x) \geq 0$. Η συνάρτηση ωφελιμότητας του δεύτερου καταναλωτή στον εισοδηματικό περιορισμό γίνεται $g(x) = x + \frac{4p_1 + 5p_2 - p_1 x}{p_2} = (1 - \frac{p_1}{p_2})x + \frac{4p_1 + 5p_2}{p_2}$, ενώ $y = \frac{4p_1 + 5p_2 - p_1 x}{p_2} \geq 0$. Άρα για να βρούμε την κατανάλωση του πρώτου αγαθού στα σημεία μεγιστοποίησης, αρκεί να μεγιστοποιήσουμε τις f, g υπό τους αντίστοιχους περιορισμούς. Διακρίνουμε ωστόσο τις εξής περιπτώσεις:

1. $p_1 = p_2$
2. $p_1 > p_2$
3. $p_1 < p_2$

Στην πρώτη περίπτωση, ο εισοδηματικός περιορισμός του πρώτου καταναλωτή είναι $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ | x + y = 2\}$. Ο εισοδηματικός περιορισμός του δεύτερου καταναλωτή είναι $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ | x + y = 9\}$, η f λαμβάνει την τιμή 2 σε αυτόν, ενώ η g λαμβάνει την τιμή 9 σε αυτόν. Αυτό σημαίνει ότι η u_1 μεγιστοποιείται πάνω στον εισοδηματικό περιορισμό του πρώτου καταναλωτή σε κάθε σημείο του και το ίδιο συμβαίνει και με τον εισοδηματικό περιορισμό του δεύτερου. Άρα υπό την τιμή $(1,1)$ κάθε κατανομή αυτής της οικονομίας ανταλλαγής για την οποία ισχύει ότι τα διανύσματα κατανάλωσης των δύο καταναλωτών ανήκουν στους αντίστοιχους εισοδηματικούς περιορισμούς είναι κατανομή ισορροπίας υπό την τιμή $(1,1)$. Για παράδειγμα η αρχική κατανομή είναι μία τέτοια κατανομή. Το σύνολο των κατανομών αυτών περιγράφεται ως εξής: $\{x = (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^2_+)^2 | x_{11} + x_{21} = 6, x_{21} + x_{22} = 5, x_{11} + x_{12} = 2, x_{21} + x_{22} = 9\}$ όπου οι δύο πρώτες εξισώσεις αφορούν στην ιδιότητα της κατανομής και οι άλλες δύο στην ιδιότητα των κατανομών αυτών να ανήκουν στους εισοδηματικούς περιορισμούς. Δεν ανήκουν όμως όλες οι κατανομές στο σύνολο αυτό, μιας και αν πάρουμε την κατανομή $z = ((3,3),(2,3))$ αυτή δεν ανήκει στο προαναφερόμενο σύνολο. Για τη δεύτερη περίπτωση, είναι $f'(x) = g'(x) = 1 - \frac{p_1}{p_2} < 0$, άρα και οι δύο συναρτήσεις μεγιστοποιούνται όταν $x = 0$. Τότε όμως $y_1 = \frac{2p_1}{p_2}$ και $y_2 = \frac{4p_1 + 5p_2}{p_2}$. Δηλαδή στην περίπτωση αυτή, οι καταναλωτές μεγιστοποιούν στις δέσμες $(0, \frac{2p_1}{p_2})$ και $(0, \frac{4p_1 + 5p_2}{p_2})$ αντίστοιχα. Όμως σε μία τέτοια τιμή αποκλείεται η ισορροπία, διότι η συνολική κατανάλωση του πρώτου αγαθού είναι μηδέν. Παρομοίως για την τρίτη και τελευταία περίπτωση, είναι $f'(x) = g'(x) = 1 - \frac{p_1}{p_2} > 0$ και οι συναρτήσεις f, g μεγιστοποιούνται όταν $x = 2, x = \frac{4p_1+5p_2}{p_1}$ αντίστοιχα. Τότε όμως $y_1 = y_2 = 0$ και άρα σε μία τέτοια τιμή αποκλείεται η ισορροπία, διότι η συνολική κατανάλωση του δεύτερου αγαθού είναι μηδέν.

Θέμα 6 *Διατυπώστε το Νόμο του Walras για νεοκλασσικές οικονομίες ανταλλαγής με πεπερασμένο πλήθος αγαθών. (1 μονάδα)*

Απάντηση: ΘΕΩΡΙΑ.

Θέμα 7 *Να διατυπώσετε τα δύο θεωρήματα ευημερίας για νεοκλασσικές οικονομίες ανταλλαγής. (1.5 μονάδες)*

Απάντηση: ΘΕΩΡΙΑ.

Θέμα 8 *Να αποδείξετε ένα από τα δύο θεωρήματα ευημερίας. (2.5 μονάδες)*

Απάντηση: ΘΕΩΡΙΑ.