Πανεπιστήμιο Αιγαίου- Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών- Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2009-10

Μαθηματικά Οικονομικά - Λύσεις 2ου Φύλλου Ασκήσεων

Διδάσκοντες : Χρήστος Κουντζάκης

Άσκηση 1.

Να δειχθεί ότι σε μια οικονομία με δύο αγαθά και δύο καταναλωτές με αρχικές δέσμες αγαθών $e_1 = e_2 = (1,1)$ *και σχέσεις προτίμησης* $\succeq_1, \succeq_2$ *που ορίζονται από τις συναρτήσεις ωφελιμότητας* $u_1(x,y) = x + 5y, u_2(x,y) = 5x + 6y$ *η αρχική κατανομή βελτιώνεται από την κατανομή* $((\frac{3}{4}, \frac{9}{8}), (\frac{5}{4}, \frac{7}{8}))$.

Απάντηση: Ισχύει $u_1(e_1) = 1 + 5 = 6, u_2(1,1) = 11$, ενώ $u_1(\frac{3}{4}, \frac{9}{8}) = \frac{51}{8}, u_2(\frac{5}{4}, \frac{7}{8}) = \frac{92}{8}$. Αυτό σημαίνει ότι $x_1 \succ_1 e_1, x_2 \succ_2 e_2$, δηλαδή η κατανομή $((\frac{3}{4}, \frac{9}{8}), (\frac{5}{4}, \frac{7}{8}))$ βελτιώνει την αρχική κατανομή.

Άσκηση 2. *Να εξετάσετε αν σε οικονομία ανταλλαγής με δύο αγαθά και δύο καταναλωτές με αρχικές δέσμες αγαθών* $e_1 = (2,1), e_2 = (1,2)$ *και σχέσεις προτίμησης* $\succeq_1, \succeq_2$ *που ορίζονται από την συνάρτηση ωφελιμότητας* $u(x,y) = min\{x,y\}$, *η αρχική κατανομή είναι άριστη κατά Pareto.*

Απάντηση: Η γενική μορφή μίας κατανομής αυτής της οικονομίας ανταλλαγής είναι $((x,y),(3-x,3-y))), 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3$, όπου $x_1 = (x,y)$ είναι το διάνυσμα κατανάλωσης του πρώτου καταναλωτή και $x_2 = (3-x, 3-y)$ το διάνυσμα κατανάλωσης του δεύτερου. Παρατηρούμε ότι αν $x = y = \frac{3}{2}$ τότε $u_1(x_1) = \frac{3}{2} > u_1(e_1) = 1$ και η ίδια ανισότητα ισχύει και για το δεύτερο καταναλωτή. Άρα η κατανομή (x_1, x_2) βελτιώνει γνήσια την αρχική κατανομή και επομένως η αρχική κατανομή δεν είναι άριστη κατά Pareto.

Άσκηση 3. *Σε μια οικονομία με δύο αγαθά και δύο καταναλωτές με αρχικές δέσμες αγαθών* $e_1 = e_2 = (1,1)$ *και σχέσεις προτίμησης* $\succeq_1, \succeq_2$ *που ορίζονται από τις συναρτήσεις ωφελιμότητας* $u_1(x,y) = xy, u_2(x,y) = x^4y^2, x \geq 0, y \geq 0$ *να δείξετε ότι η κατανομή* $((\frac{6}{7}, \frac{6}{5}), (\frac{8}{7}, \frac{4}{5}))$ *είναι άριστη κατά Pareto.*

Απάντηση: Αυτή η οικονομία ανταλλαγής είναι η ίδια με την οικονομία ανταλλαγής της Άσκησης 2 του προηγούμενου Φύλλου, όπου βρέθηκε ότι η συνάρτηση ζήτησης του πρώτου καταναλωτή είναι $x_1(p, p \cdot e_1) = (\frac{1}{2p_1}(p_1 +$

$p_2), \frac{1}{2p_2}(p_1 + p_2)), p_1 > 0, p_2 > 0$, ενώ η συνάρτηση ζήτησης του δεύτερου καταναλωτή είναι $x_2(p_1, p_2) = (\frac{2(p_1+p_2)}{3p_1}, \frac{p_1+p_2}{3p_2}), p_1 > 0, p_2 > 0$. Στην Άσκηση 3 βρήκαμε ότι η τιμή ισορροπίας για την οικονομία αυτή είναι $(\overline{p}_1, \overline{p}_2) = (\frac{7}{12}, \frac{5}{12})$. Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές ισορροπίας των δύο αγαθών $(\overline{p}_1, \overline{p}_2) = (\frac{7}{12}, \frac{5}{12})$ στη συνάρτηση ζήτησης, τότε το διάνυσμα κατανάλωσης που προκύπτει για τον πρώτο καταναλωτή είναι το $(\frac{6}{7}, \frac{6}{5})$, ενώ το διάνυσμα κατανάλωσης που προκύπτει για το δεύτερο καταναλωτή είναι $(\frac{8}{7}, \frac{4}{5})$. Τα δύο αυτά διανύσματα κατανάλωσης συνιστούν κατανομή διότι το άθροισμά τους είναι ίσο με το συνολικό αγαθό $e = (2, 2)$ της οικονομίας.

Παρατηρούμε ότι εκτός από συνεχείς και αυστηρά μονότονες στο $\mathbb{R}^2_{++}$ οι σχέσεις προτίμησης είναι και αυστηρά κυρτές στο σύνολο αυτό, που ειναι και εκείνο που ενδιαφέρει από πλευράς μεγιστοποίησης. Αυτό διότι η $u_1(x, y) = xy$ είναι στο $\mathbb{R}^2_{++}$ γνήσια μονοτονικός μετασχηματισμός της Cobb- Douglas συνάρτησης ωφελιμότητας $c(x, y) = \sqrt{xy}$ η οποία είναι αυστηρά κυρτή. Επίσης η $u_2(x, y) = x^4y^2$ είναι είναι στο $\mathbb{R}^2_{++}$ γνήσια μονοτονικός μετασχηματισμός της Cobb- Douglas συνάρτησης ωφελιμότητας $h(x, y) = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ η οποία είναι αυστηρά κυρτή σε αυτό.

Επομένως η οικονομία ανταλλαγής είναι νεοκλασσική, η δοσμένη κατανομή είναι κατανομή ισορροπίας και άρα σύμφωνα με το Πρώτο Θεώρημα Ευημερίας είναι άριστη κατά Pareto.

Άσκηση 4.

(Συναρτήσεις Κοινωνικής Ευημερίας) Αν υποθέσουμε ότι σε οικονομία ανταλλαγής με n το πλήθος αγαθά υπάρχουν I καταναλωτές με συναρτήσεις ωφελιμότητας $u_i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., I$ των οποίων η 'βαρύτητα' στην οικονομία αποδίδεται με έναν πραγματικό αριθμό $0 < \lambda_i < 1$ και $\sum_{i=1}^{I} \lambda_i = 1$. Αν κάθε καταναλωτής έχει αρχική δέσμη αγαθών e_i, να δείξετε ότι κάθε σημείο μεγιστοποίησης της συνάρτησης $u_\lambda(x_1, x_2, ..., x_I) = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i u_i(x_i)$ στο σύνολο των κατανομών

$$\mathcal{A}_e = \{(x_1, x_2, ..., x_I) \in (\mathbb{R}^n_+)^I | \sum_{i=1}^{I} x_i = \sum_{i=1}^{I} e_i\}$$

της οικονομίας είναι άριστη κατά Pareto κατανομή. Το ίδιο να δείξετε και για την συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας του Rawls

$$v(x_1, x_2, ..., x_I) = min\{u_1(x_1), u_2(x_2), ..., u_I(x_I)\}.$$

Σε ποια κοινωνία από τις δύο θα θέλατε να ζείτε και γιατί ; Σε μια κοινωνία όπου η ευημερία μετράται με μια συνάρτηση u_λ ή σε μια κοινωνία όπου η ευημερία μετράται με τη v ;

Απάντηση:

Αν η κατανομή $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_I)$ της παραπάνω οικονομίας ανταλλαγής στην οποία οι σχέσεις προτίμησης αναπαρίστανται από τις συναρτήσεις ωφελιμότητας $u_i, i = 1, 2, ..., I$ και οι αρχικές δέσμες αγαθών των καταναλωτών είναι $e_1, e_2, ...e_I$ αντίστοιχα, μεγιστοποιεί τη συνάρτηση

$$u_\lambda(x_1, x_2, ..., x_I) = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i u_i(x_i)$$

στο σύνολο των κατανομών αυτής της οικονομίας ανταλλαγής, τότε υποθέτουμε ότι υπάρχει κατανομή που βελτιώνει όλους τους καταναλωτές και βελτιώνει γνήσια κάποιον από αυτούς και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έστω $(y_1, y_2, ..., y_I)$ μια τέτοια κατανομή. Τότε ισχύει $u_i(y_i) \geq u_i(\overline{x}_i), i = 1, 2, ..., I$ και $u_{i_0}(y_{i_0}) > u_{i_0}(\overline{x}_{i_0})$ για κάποιον καταναλωτή i_0. Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη αυτές τις ανισότητες με τα αντίστοιχα θετικά βάρη λ_i και προσθέτοντάς τις κατά μέλη, προκύπτει ότι $\sum_{i=1}^{I} \lambda_i u_i(y_i) > \sum_{i=1}^{I} \lambda_i u_i(\overline{x}_i)$. Αυτό σημαίνει όμως ότι η κατανομή $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_I)$ δεν μεγιστοποιεί τη συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας $u_\lambda(x_1, x_2, ..., x_I) = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i u_i(x_i)$. Αυτό όμως είναι άτοπο. Άρα η $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_I)$ είναι άριστη κατά Pareto. Παρομοίως για τη συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας του Rawls, αν η κατανομή $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_I)$ της παραπάνω οικονομίας ανταλλαγής στην οποία οι σχέσεις προτίμησης αναπαρίστανται από τις συναρτήσεις ωφελιμότητας $u_i, i = 1, 2, ..., I$ και οι αρχικές δέσμες αγαθών των καταναλωτών είναι $e_1, e_2, ...e_I$ αντίστοιχα μεγιστοποιεί τη συνάρτηση

$$v(x_1, x_2, ..., x_I) = min\{u_i(x_i), i = 1, 2, ..., I\}$$

στο σύνολο των κατανομών αυτής της οικονομίας ανταλλαγής, τότε υποθέτουμε ότι υπάρχει κατανομή που βελτιώνει όλους τους καταναλωτές και βελτιώνει γνήσια κάποιον από αυτούς και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έστω $(y_1, y_2, ..., y_I)$ μια τέτοια κατανομή. Τότε ισχύει $u_i(y_i) \geq u_i(\overline{x}_i), i = 1, 2, ..., I$ και $u_{i_0}(y_{i_0}) > u_{i_0}(\overline{x}_{i_0})$ για κάποιον καταναλωτή i_0. Παίρνοντας το ελάχιστο των αριστερών μελών των ανισοτήτων αυτών, αυτό είναι μεγαλύτερο γνήσια από το ελάχιστο των δεξιών μελών λόγω της παρουσίας μίας γνήσιας ανισότητας. Άρα προκύπτει ότι $min\{u_i(y_i), i = 1, 2, ..., I\} > min\{u_i(\overline{x}_i), i = 1, 2, ..., I\}$. Αυτό σημαίνει όμως ότι η κατανομή $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_I)$ δεν μεγιστοποιεί τη συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας

$$v(x_1, x_2, ..., x_I) = min\{u_i(x_i), i = 1, 2, ..., I\}.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο. Άρα η $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_I)$ είναι άριστη κατά Pareto.