

Πανεπιστήμιο Αιγαίου- Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών-  
Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2009-10

Μαθηματικά Οικονομικά - Λύσεις 3ου Φύλλου Ασκήσεων

Διδάσκοντες : Χρήστος Κουντζάκης

**Άσκηση 1.** Σε μια οικονομία με δύο αγαθά και δύο καταναλωτές με αρχικές δέσμες αγαθών  $e_1 = e_2 = (1, 1)$  και σχέσεις προτίμησης  $\succeq_1, \succeq_2$  που ορίζονται από τις συναρτήσεις ωφελιμότητας  $u_1(x, y) = xy, u_2(x, y) = x^4y^2, x \geq 0, y \geq 0$  η κατανομή  $((\frac{6}{7}, \frac{6}{5}), (\frac{8}{7}, \frac{4}{5}))$  είναι άριστη κατά Pareto. Αν η κεντρική κυβέρνηση αποφασίσει να επιβάλλει φόρους, ποιο σύστημα φόρων θα πρέπει να επιβάλλει στους δύο καταναλωτές έτσι ώστε η παραπάνω κατανομή να επιλεγεί ως κατανομή ισορροπίας από αυτούς ;

**Λύση** Η κατανομή  $((\frac{6}{7}, \frac{6}{5}), (\frac{8}{7}, \frac{4}{5}))$  είναι η νέα αρχική κατανομή για τους καταναλωτές της οικονομίας. Η κατανομή αυτή είναι ισορροπία υπό την τιμή  $p = (\frac{7}{12}, \frac{5}{12})$ . Το εισόδημα των καταναλωτών μεταβλήθηκε ως εξής :  $p \cdot e_i + t_i = p \cdot x_i, i = 1, 2$ , όπου  $x_1 = (\frac{6}{7}, \frac{6}{5}), x_2 = (\frac{8}{7}, \frac{4}{5})$ . Άρα έχουμε ότι  $t_1 = t_2 = 0$ .

**Άσκηση 2.** Μετασχηματίστε τις συναρτήσεις ωφελιμότητας  $u_1(x, y) = xy^6$  και  $v(x, y) = x^8y^2$  όπου  $x \geq 0, y \geq 0$  σε Cobb-Douglas που αναπαριστούν την ίδια σχέση προτίμησης στο  $\mathbb{R}_{++}^2$ .

**Λύση** Η Cobb-Douglas συνάρτηση ωφελιμότητας που αναπαριστά την ίδια σχέση προτίμησης με αυτήν που αναπαριστά η πρώτη συνάρτηση ωφελιμότητας στο  $\mathbb{R}_{++}^2$  είναι η  $u_1^*(x, y) = x^{\frac{1}{7}}y^{\frac{6}{7}}$ . Παρομοίως, η Cobb-Douglas συνάρτηση ωφελιμότητας που αναπαριστά την ίδια σχέση προτίμησης με αυτήν που αναπαριστά η δεύτερη συνάρτηση ωφελιμότητας στο  $\mathbb{R}_{++}^2$  είναι η  $u_2^*(x, y) = x^{\frac{4}{5}}y^{\frac{1}{5}}$ .

**Άσκηση 3.** Έστω οικονομία ανταλλαγής με δύο αγαθά και δύο καταναλωτές. Οι σχέσεις προτίμησης των καταναλωτών ορίζονται από τις συναρτήσεις ωφελιμότητας  $u_1(x, y) = u_2(x, y) = x + y, x \geq 0, y \geq 0$  και οι αρχικές δέσμες αγαθών τους είναι  $e_1 = (2, 3), e_2 = (3, 4)$ . Η αρχική κατανομή είναι άριστη κατά Pareto ;

**Λύση** Η γενική μορφή μιας κατανομής στην παραπάνω οικονομία ανταλλαγής είναι  $((x, y), (5 - x, 7 - y))$  όπου  $0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 7$ . Είναι  $u_1(e_1) = 5, u_2(e_2) = 7$ . Αν η αρχική κατανομή δεν είναι άριστη κατά Pareto, τότε υπάρχει κατανομή για την οποία ισχύει είτε  $(x, y) \succeq_1 (2, 3), (5 - x, 7 - y) \succ_2 (3, 4)$ , είτε  $(x, y) \succ_1 (2, 3), (5 - x, 7 - y) \succeq_2 (3, 4)$ . Το πρώτο ζεύγος σχέσεων συνεπάγεται ότι  $x + y \geq 5, 12 - (x + y) > 7$ , ενώ το δεύτερο ζεύγος σχέσεων συνεπάγεται ότι  $x + y > 5, 12 - (x + y) \geq 7$ . Όμως τέτοιες ποσότητες αγαθών δεν υπάρχουν, άρα η αρχική κατανομή είναι άριστη κατά Pareto.

**Άσκηση 4.** Αν στην οικονομία της Άσκησης 1 η κεντρική κυβέρνηση επιλέξει το σύστημα φόρων  $t_1 = 1, t_2 = -1$  για το χρηματικό εισόδημα των καταναλωτών, αυτή της η ενέργεια μπορεί να είναι κοινωνικά αποτελεσματική; Τι θα πρέπει να ισχύει στην περίπτωση αυτή;

**Λύση**

Πρέπει να υπάρχει τιμή  $(p_1, p_2)$ , τέτοια ώστε να ισχύει ότι  $p \cdot x_1(p) = p \cdot e_1 + 1, p \cdot x_1(p) = p \cdot e_2 - 1$ , ή  $p \cdot x_2(p) = p \cdot e_1 - 1, p \cdot x_1(p) = p \cdot e_2 + 1$ , όπου  $x_1(p), x_2(p)$  είναι οι συναρτήσεις ζήτησης των καταναλωτών.