ΧΡΗΜΑΤΟΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ
ΣΤ΄ ΕΞΑΜΗΝΟ
ΘΕΜΑΤΑ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

Διδάσκων: Χ. Κουντζάκης

22 Αυγούστου 2012

Θέμα 1 *Σε οικονομία επικρατεί αβεβαιότητα που περιγράφεται από το σύνολο των καταστάσεων* $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ *και η αποκάλυψη της πληροφορίας σχετικά με αυτές γίνεται σε τρεις χρονικές περιόδους* $T = \{0, 1, 2\}$. *Αν οι διαμερίσεις πληροφορίας είναι* $F_0 = \{\Omega\}, F_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, F_2 = \{\{\omega\}, \omega \in \Omega\}$*, τότε:*

1. *Να γράψετε αναλυτικά το σύνολο των κόμβων του δένδρου πληροφόρησης και να το παραστήσετε γραφικά (1 μονάδα).*

   $\mathbb{D} = \{(0, \Omega), (1, \{1, 2\}), (1, \{3, 4\}, (2, \{1\}), (2, \{2\}, (2, \{3\}), (2, \{4\})\}.$

2. *Να υποδείξετε ποιες είναι οι άλγεβρες υποσυνόλων* $\mathcal{F}_i, i = 0, 1, 2$ *που παράγονται από τις αντίστοιχες διαμερίσεις* F_i *(1 μονάδα).*

   $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \Omega\},$

   $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \Omega\}.$

3. *Να αναφέρετε μία στοχαστική διαδικασία* $x : T \times \Omega \to \mathbb{R}$ *προσαρμοσμένη (adapted) στη διήθηση (filtration) των αλγεβρών* $\mathcal{F}_i, i = 0, 1, 2$ *που παράγονται από τις διαμερίσεις (1 μονάδα).*

   Μια στοχαστική διαδικασία προσαρμοσμένη στη διήθηση αυτή είναι αυτή που δίνεται από τις ακόλουθες τυχαίες μεταβλητές $x_i : \Omega \to \mathbb{R}, i = 0, 1, 2$. $x_0(\omega) = 1, \omega = 1, 2, 3, 4$, $x_1(\omega) = 2, \omega = 1, 2$, $x_1(\omega) = 3, \omega = 3, 4$, $x_2(1) = 4, x_2(2) = 3, x_2(3) = 8, x_2(4) = 9$.

4. *Να αναφέρετε μία στοχαστική διαδικασία* $y : T \times \Omega \to \mathbb{R}$ *που να είναι martingale ως προς τη διήθηση αυτή, αν οι πιθανότητες για τις καταστάσεις του κόσμου είναι* $P(1) = \frac{1}{6}, P(2) = \frac{1}{12}, P(3) = \frac{1}{2}, P(4) = \frac{1}{4}$ *(1.5 μονάδες).*

Για να είναι martingale η adapted στοχαστική διαδικασία y αποτελούμενη από τις τυχαίες μεταβλητές y_0, y_1, y_2 πρέπει να ικανοποιούνται οι ακόλουθες σχέσεις ως προς το μέτρο πιθανότητας P:

$$E(y_1|\mathcal{F}_0) = y_0, E(y_2|\mathcal{F}_1) = y_1.$$

Αν

$$y_0(\omega) = a, \omega = 1, 2, 3, 4,\ y_1(\omega) = b, \omega = 1, 2,\ y_1(\omega) = c, \omega = 3, 4, y_2(1) = d, y_2(2) = e, y_2(3) = t, y_2(4) = k,$$

τότε οι παραπάνω σχέσεις για τις δεσμευμένες μέσες τιμές είναι ισοδύναμες με τις ακόλουθες. Για την πρώτη σχέση: Εφ'οσον η τιμή που λαμβάνει η δεσμευμένη μέση τιμή είναι η μέση τιμή της y_1, αυτή είναι ίση με $\frac{b+3c}{4}$ η οποία λόγω της πρώτης σχέσης οφείλει να είναι ίση με a, δηλαδή $a = \frac{b+3c}{4}$. Για τη δεύτερη σχέση έχουμε ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου $\{1, 2\}$ είναι $\frac{1}{4}$ και η πιθανότητα του ενδεχομένου $\{3, 4\}$ είναι $\frac{3}{4}$. Άρα έχουμε μετά από πράξεις ότι $b = \frac{2d+e}{3}$ και επίσης λόγω του ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου $\{3, 4\}$ είναι $\frac{3}{4}$ τελικά παίρνουμε τη σχέση $c = \frac{2t+k}{3}$. Αντικαθιστώντας τις μεταβλητές d, e, t, k με πραγματικούς αριθμούς και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις που βρήκαμε για τις υπόλοιπες μεταβλητές a, b, c βρίσκουμε μία συγκεκριμένη τέτοια στοχαστική διαδικασία.

Θέμα 2 *Σε στοχαστική οικονομία μίας περιόδου με πέντε καταστάσεις του κόσμου, της οποίας η αγορά χρηματοοικονομικών συμβολαίων αποτελείται από έναν τραπεζικό λογαριασμό με επιτόκιο 10 τοις εκατό και μία μετοχή της οποίας η πιθανή αυριανή αξία δίνεται από το διάνυσμα* $S_T = (10, 20, 20, 10, 30)$ *που δίνει τα ενδεχόμενα αποτελεσματα της αντίστοιχης τυχαίας μεταβλητής, ενώ η σημερινή αξία της μετοχής είναι* $S_0 = \frac{900}{55}$.

1. *Να δοθεί ο πίνακας απόδοσης των συμβολαίων της αγοράς τη χρονική περίοδο 1 και κατά τις δύο χρονικές περιόδους. (1 μονάδα)*

   Ο πίνακας απόδοσης των συμβολαίων τν περίοδο 1 είναι $V = \begin{bmatrix} 1.1 & 10 \\ 1.1 & 20 \\ 1.1 & 20 \\ 1.1 & 10 \\ 1.1 & 30 \end{bmatrix}$ *και κατά τις δύο χρονικές περιόδους*

   $$W = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{900}{55} \\ 1.1 & 10 \\ 1.1 & 20 \\ 1.1 & 20 \\ 1.1 & 10 \\ 1.1 & 30 \end{bmatrix}$$

2. *Υπάρχει arbitrage στην αγορά αυτή ; (1 μονάδα)*

   Όχι δεν υπάρχει arbitrage στην αγορά αυτή, διότι σύμφωνα με το Θεώρημα Χαρακτηρισμού μη Ύπαρξης arbitrage υπάρχει αυστηρά θετικό κάθετο διάνυσμα τιμών π *στις στήλες του πίνακα αποδόσεων* W *που αναφέρεται και στις δύο χρονικές περιόδους. Ένα τέτοιο διάνυσμα είναι το* $(1, \frac{10}{55}, \frac{10}{55}, \frac{10}{55}, \frac{10}{55}, \frac{10}{55})$.

3. *Βρείτε ένα ισοδύναμο martingale μέτρο της αγοράς αυτής. (1.5 μονάδες)*

   Ένα ισοδύναμο μέτρο martignale προκύπτει από το προηγούμενο διάνυσμα πολλαπλασιάζοντας τις συντεταγμένες του που αντιστοιχούν στην περίοδο 1 με τον συντελεστή ανατοκισμού του τραπεζικού λογαριασμού της αγοράς, δηλαδή $1 + r = 1.1$. *Τότε το διάνυσμα πιθανοτήτων που προκύπτει είναι* $\frac{1}{5}(1, 1, 1, 1, 1)$.

4. *Μπορεί αυτό να είναι μοναδικό ; (1.5 μονάδες)*

   Σύμφωνα με αντίστοιχο θεώρημα το ισοδύναμο μέτρο martingale μιας αγοράς είναι μοναδικό αν και μόνο αν η αγορά είναι πλήρης. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η αγορά δεν είναι πλήρης, άρα το μέτρο αυτό δεν είναι κατ΄ ανάγκην μοναδικό. Συγκεκριμένα, μπορούν να προσδιοριστούν και άλλα τέτοια μέτρα για την αγορά αυτήν.

5. *Γράψτε την απόδοση του call-option επί της μετοχής με τιμή εξάσκησης* $k = 15$. *(0.5 μονάδες)*

   $(S_T - k\mathbf{1})^+ = ((10, 20, 20, 10, 30) - (15, 15, 15, 15, 15))^+ = (0, 5, 5, 0, 15)$

6. *Μπορεί να γίνει πλήρης η αγορά αυτή αν προσθέσουμε call και put-options επί της μετοχής και πάρουμε την αγορά που τελικά παράγεται ; (1 μονάδα)*

   Όχι διότι σύμφωνα με το Θεώρημα του Ross, τα διανύσματα αποδόσεων των αξιογράφων δε διαχωρίζουν τις καταστάσεις του κόσμου.

Θέμα 3

1. *Διατυπώστε το Θεώρημα Χαρακτηρισμού μη Ύπαρξης arbitrage και το Θεώρημα του Ross (1 μονάδα).*

   Θεωρία.

2. *Να δώσετε τον ορισμό του συγκυριακού συμβολαίου, να υποδείξετε ένα τέτοιο συμβόλαιο για το μοντέλο του προηγούμενου θέματος και να κάνετε την αντιστάθμισή του. Σε τι χρησιμεύει η αντιστάθμιση ; (1.5 μονάδες)*

   Το συγκυριακό συμβόλαιο $c = (11.1, 21.1, 21.1, 11.1, 31.1)$ *παρατηρούμε ότι είναι επιτεύξιμο. Για να προσδιορίζουμε το σύνολο των χαρτοφυλακίων που το αντισταθμίζουν, θα λύσουμε το σύστημα* $V \cdot z = c$ *όπου* $z = (a, b)$ *με* $a, b \in \mathbb{R}$.