Πανεπιστήμιο Αιγαίου - Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

Ακαδημαϊκό έτος 2007-8

Απάντηση στην εργασία του μαθήματος "Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά III" (Ζ′ Εξάμηνο)

Διδάσκων: Χ. Κουντζάκης

Έστω αγορά η οποία αποτελείται από μια μετοχή και τον χωρίς κίνδυνο τίτλο που συνίσταται στην αξία ενός ευρώ που ανατοκίζεται με σταθερό επιτόκιο $r > 0$ στο χρονικό διάστημα $[0, T]$. Να υποδείξετε επιλέγοντας κατάλληλους συντελεστές ανόδου και καθόδου της μετοχής στο διωνυμικό μοντέλο (οι οποίοι εξαρτώνται από το πλήθος των χρονικών περιόδων στις οποίες εξελίσσεται η τιμή της μετοχής) ότι αν το πλήθος των χρονικών περιόδων εξέλιξης της μετοχής τείνει στο άπειρο, το μοντέλο που περιγράφει την εξέλιξη των τίτλων της αγοράς είναι το μοντέλο Black-Scholes. Στη συνέχεια δείξτε ότι η no-arbitrage αποτίμηση του ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης k ευρώ στο διωνυμικό μοντέλο με αυτούς τους κατάλληλους συντελεστές είναι η αντίστοιχη αποτίμηση που προκύπτει από το μοντέλο Black-Scholes όταν το πλήθος των χρονικών περιόδων εξέλιξης της μετοχής στο διωνυμικό μοντέλο τείνει στο άπειρο.

Τιμολόγηση του Ευρωπαϊκού Δικαιώματος αγοράς μετοχής σε n χρονικές περιόδους.

Έστω μία μετοχή, η τιμή της οποίας εξελίσσεται σε n χρονικές περιόδους και για την τιμή της οποίας σύμφωνα με το πλαίσιο που υποδεικνύει το διωνυμικό μοντέλο θεωρούμε σταθερούς για κάθε χρονική περίοδο συντελεστές ανόδου u και πτώσης d της τιμής της μετοχής. Υποθέτουμε επίσης ότι η άνοδος και η πτώση της τιμής της μετοχής σε κάθε περίοδο δεν εξαρτώνται από το τι συνέβη μέχρι εκείνη τη στιγμή. Αυτό σημαίνει ότι οι τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες $X_i = 1$ αν $S(i) = uS(i-1)$ και $X_i = 0$ αν $S(i) = dS(i-1)$ όπου $S(i)$ είναι η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή i, $i = 1, 2, ...n$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες. Ετσι η εξέλιξη της μετοχής μπορεί να περιγραφεί πλήρως από το διάνυσμα τυχαίων μεταβλητών

$$(X_1, X_2, ..., X_n).$$

Αν η τιμή της μετοχής κατά την περίοδο 0 είναι $S(0)$ τότε στο τέλος του χρονικού ορίζοντα η τιμή της $S(n)$ είναι $S(n) = u^Y d^{n-Y} S(0)$, όπου $Y = \sum_{i=1}^n X_i$. Θεωρούμε επίσης ότι η άνοδος και η πτώση της τιμής της μετοχής έχουν την ίδια πιθανότητα να συμβούν σε κάθε χρονική περίοδο, δηλ.

$$P(X_i = 1 | X_1 = x_1, ..., X_{i-1} = x_{i-1}) = p,$$

όπου $x_k = 0, 1, k = 1, 2, ..., i$. Παρατηρούμε ότι η Y ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, p. Επομένως το payoff του Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς της μετοχής με τιμή εξάσκησης k είναι η τυχαία μεταβλητή $C(S(n), k) = (S(n) - k)^+$. Υποθέτουμε ότι $P(X_1 = x_1, ..., X_{i-1} = x_{i-1}, X_i = x_i) = a$. Τότε το αναμενόμενο κέρδος από την αγορά της μετοχής κατά την περίοδο $i - 1$ και την πώλησή της κατά την περίοδο i, όπου $i = 1, 2..., n$ είναι

$$a[p(1 + r)^{-1} uS(i - 1) + (1 - p)(1 + r)^{-1} dS(i - 1) - S(i - 1)],$$

όπου r είναι το επιτόκιο του βέβαιου τίτλου μεταξύ δύο χρονικών περιόδων. Επομένως η μη ύπαρξη arbitrage ισχύει υπό την πιθανότητα ανόδου για την οποία $\frac{pu}{1+r} + \frac{(1-p)d}{1+r} = 1$ δηλαδή $p = \frac{1+r-d}{u-d}$. Υπό αυτό το μέτρο πιθανότητας, η τιμή του δικαιώματος στην αρχή του χρονικού ορίζοντα είναι

$$C = (1 + r)^{-n} E((S(n) - k))^+),$$

όπου το p στη διωνυμική κατανομή είναι το $\frac{1+r-d}{u-d}$- έχουμε υποθέσει ότι $d < 1 + r < u$.

Διαίρεση του χρονικού διαστήματος $[0, T]$ σε μεγάλο αριθμό υποδιαστημάτων και τιμολόγηση του δικαιώματος

Επιλέγουμε ως χρονικό ορίζοντα το κλειστό διάστημα $[0, T]$ και θεωρούμε μία διαμέριση του διαστήματος αυτού που ορίζεται από τα σημεία $t_i = i\frac{T}{n}, i = 1, ..., n$ για κάποιον n φυσικό. Είναι φανερό ότι όσο μεγαλώνει το n τόσο μικραίνει το πλάτος της διαμέρισης και τελικά το σύνολο των σημείων της διαμέρισης τείνει να ταυτιστεί με το διάστημα $[0, T]$. Στη συνέχεια επιλέγουμε τους συντελεστές ανόδου και πτώσης της τιμής της μετοχής που εξελίσσεται κατά τις χρονικές στιγμές $t_1, ..., t_n$ σύμφωνα με το διωνυμικό μοντέλο, να είναι οι ακόλουθοι :

$$u_n = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}, d_n = e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}},$$

όπου το σ είναι εκείνο που αντιστοιχεί στο συντελεστή πτητικότητας της γεωμετρικής κίνησης $Brown$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

που περιγράφει την εξέλιξη της τιμής της μετοχής, ή αλλιώς στη διασπορά σ^2 της απόδοσης της μετοχής κατά το μοντέλο Black-Scholes.

Για αρκετά μεγάλο n ισχύουν με ικανοποιητική προσέγγιση σύμφωνα με το ανάπτυγμα Taylor οι ακόλουθες σχέσεις :

$$e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} \cong 1 + \sigma\sqrt{\frac{T}{n}} + \frac{\sigma^2 T}{2n},$$

$$e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} \cong 1 - \sigma\sqrt{\frac{T}{n}} + \frac{\sigma^2 T}{2n}.$$

Υπολογίζοντας για κάθε n την αντίστοιχη no-arbitrage πιθανότητα ανόδου p_n λαμβάνουμε

$$p_n = \frac{1 + \frac{rT}{n} - d}{u - d} \cong \frac{\frac{rT}{n} + \sigma\sqrt{\frac{T}{n}} - \sigma^2 \frac{T}{2n}}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{r\sqrt{\frac{T}{n}}}{2\sigma} - \frac{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}{4}.$$

Επομένως η τιμή μη κερδοσκοπίας του δικαιώματος αγοράς της μετοχής με τιμή εξάσκησης k είναι σύμφωνα με τα παραπάνω

$$C = (1+r\frac{T}{n})^{-n} E((S(0)u_n^{Y_n} d_n^{n-Y_n} - K)^+) = (1+r\frac{T}{n})^{-n} E[(S(0)(\frac{u_n}{d_n})^{Y_n} d_n^n - K)^+)] =$$

$$= (1+r\frac{T}{n})^{-n} E((S(0)e^{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}Y_n} e^{-\sigma\sqrt{nT}} - K)^+) = (1+r\frac{T}{n})^{-n} E((S(0)e^{W_n} - K)^+),$$

όπου $W_n = 2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}Y_n - \sigma\sqrt{nT}$.

Είναι $lim_n p_n = \frac{1}{2}$ και επίσης η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $W_n, n \in \mathbb{N}$ συγκλίνει κατά νόμον (δες παρακάτω για λεπτομέρειες) σε μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή. Η μέση τιμή και η διασπορά της W_n υπολογίζονται ως εξής

$$E(Y_n) = np_n, Var(Y_n) = np_n(1 - p_n)$$

άρα

$$E(W_n) = 2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}np_n - \sigma\sqrt{nT} = 2\sigma\sqrt{nT}(p_n - \frac{1}{2}) \cong 2\sigma\sqrt{nT}(\frac{r\sqrt{\frac{T}{n}}}{2\sigma} - \frac{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}{4}) =$$

$$= (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T.$$

Ακόμη

$$Var(W_n) = (2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}})^2 Var(Y_n) = 4\sigma^2 T p_n(1-p_n) \cong \sigma^2 T.$$

Άρα αν αφήσουμε το n να τείνει στο άπειρο, οριακά παίρνουμε ως τιμή μη κερδοσκοπίας του δικαιώματος τη χρονική στιγμή μηδέν την

$$C = e^{-rT}E[(S(0)e^W - K)^+]$$

όπου W είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο $(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T$ και διασπορά $\sigma^2 T$. Αυτός όμως δεν είναι άλλος από τον τύπο αποτίμησης του Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς της μετοχής με τιμή εξάσκησης k στο μοντέλο Black-Scholes.

Από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, έπεται ότι ακολουθία τυχαίων μεταβλητών

$$\frac{W_n - E(W_n)}{\sqrt{Var(W_n)}} = \frac{W_n - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sqrt{\sigma^2 T}}$$

συγκλίνει κατά νόμον σε μια τυχαία μεταβλητή Z που ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή. Σημειώνουμε ότι στο άθροισμα $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k^{(n)}$ των δίτιμων Bernoulli $X_k^{(n)}, k = 1, 2, ..., n$ που αφορούν την άνοδο ή την πτώση της τιμής της μετοχής στο διωνυμικό μοντέλο που εξελίσσεται σε n περιόδους, οι δίτιμες Bernoulli που υποδεικνύουν άνοδο ή κάθοδο της τιμής της μετοχής για κάθε χρονική περίοδο είναι στοχαστικά ανεξάρτητες. Σχετικά με την εφαρμογή του Θεωρήματος των Lindeberg-Feller παρατηρούμε ότι είναι αρκετό να πάρουμε $X_{n,j} = X_j^{(n)}, j = 1, 2, ..., n (k_n = n)$ για κάθε n και να παρατηρήσουμε ότι $\frac{W_n - E(W_n)}{\sqrt{Var(W_n)}} = \frac{Y_n - E(Y_n)}{\sqrt{Var(Y_n)}}$ καθώς επίσης και ότι $S_n = Y_n$ για κάθε n.

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας και $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$. Με F_X συμβολίζουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X η οποία είναι η εξής: $F_X(x) = P(X \leq x), x \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 1. *Η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών X_n συγκλίνει κατά νόμον στην τυχαία μεταβλητή X αν και μόνο αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο η F_X είναι συνεχής ισχύει $lim_n F_{X_n}(x) = F_X(x)$.*

Σχετικό με την ασθενή σύγκλιση ακολουθιών τυχαίων μεταβλητών είναι το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα:

Θεώρημα 2. *(Lindeberg-Feller) Έστω το πεδίο τυχαίων μεταβλητών*

$$X_{1,1}, X_{1,2}, ..., X_{1,k_1};$$

$$X_{2,1}, X_{2,2}, ..., X_{2,k_2};$$

$$...;$$

$$X_{n,1}, X_{n,2}, ..., X_{n,k_n};$$

$$...;$$

όπου $k_n \to \infty$ εφ' όσον $n \to \infty$ και έστω $S_n = \sum_{j=1}^{k_n} X_{n,j}$. Υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $X_{n,j}, j = 1, 2, ..., k_n$ είναι ανεξάρτητες. Αν υποτεθεί ότι τυχαίες μεταβλητές $X_{n,j}, j = 1, 2, ..., k_n$ έχουν πεπερασμένη μέση τιμή και διασπορά τόε η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}}, n \in \mathbb{N}$ συγκλίνει κατά νόμον σε μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή.

Για λόγους πληρότητας, παραθέτουμε κάποια στοιχεία για το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Η ισχύς του Κ.Ο.Θ. βασίζεται στα ακόλουθα δύο θεωρήματα.

Γνωρίζουμε ότι για κάθε τυχαία μεταβλητή X ορίζεται η χαρακτηριστική της συνάρτηση $\phi_X(t) = E(e^{itX})$.

Από στοιχειώδη λογισμό έχουμε ότι $\phi_{aX+b}(t) = e^{itb}\phi_X(at)$.

Θεώρημα 3. *Έστω $F_{X_n}, n \in \mathbb{N}$ οι αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής της ακολουθίας των τυχαίων μεταβλητών $X_n, n \in \mathbb{N}$ και $\phi_{X_n}, n \in \mathbb{N}$ οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις αυτών. Αν ισχύει ότι $lim_n F_{X_n}(x) = F_X(x)$ για κάποια τυχαία μεταβλητή X και για κάθε σημείο συνέχειας της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της F_X, τότε για τη χαρακτηριστική συνάρτηση της X ισχύει*

$$lim_n \phi_{X_n}(t) = \phi_X(t).$$

Επίσης ισχύει το Θ.Levy

Θεώρημα 4. *Έστω $F_{X_n}, n \in \mathbb{N}$ οι αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής της ακολουθίας των τυχαίων μεταβλητών $X_n, n \in \mathbb{N}$ και $\phi_{X_n}, n \in \mathbb{N}$ οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις αυτών. Υποθέτουμε ότι*

- *(i) Υπάρχει για κάθε $t \in \mathbb{R}$ το $lim_n \phi_{X_n}(t)$.*
- *(ii) Η συνάρτηση $\phi(t) = lim_n \phi_{X_n}(t)$ είναι συνεχής στο 0.*

Τότε η ακολουθία $X_n, n \in \mathbb{N}$ συγκλίνει ασθενώς σε μία τυχαία μεταβλητή της οποίας χαρακτηριστική συνάρτηση είναι η ϕ.

Υπενθυμίζουμε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση μίας τ.μ που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο 0 και διασπορά 1 είναι $\phi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Παραπομπές

[1] K.L. Chung, A Course in Probability Theory, Academic Press (1974)

[2] J.C. Cox, S.A. Ross, M. Rubinstein, *Option Pricing : A Simplified Approach*, Journal of Financial Economics 7 (1979), 229-263

[3] S.M. Ross, An Introduction to Mathematical Finance, Cambridge University Press (1999)

[4] Γ.Κοκολάκης, Ι.Σπηλιώτης, Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές, εκδόσεις Συμεών (2004)

[5] Σ.Ξανθόπουλος, Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά Ι, Σημειώσεις Παραδόσεων