Πανεπιστήμιο Αιγαίου - Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

Ακαδημαϊκό έτος 2007-8

Λύσεις 1ου φύλλου ασκήσεων στο μάθημα "Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά ΙΙΙ" (Ζ′ Εξάμηνο)

Διδάσκων: Χ. Κουντζάκης

Άσκηση 1. *Έστω η ανέλιξη Ito* $H_t = e^{Y_t}$ *όπου*

$$Y_t = \int_0^t c(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t c^2(s)ds, t \in [0,T]$$

όπου c *βαθμωτή στοχαστική ανέλιξη σε χώρο πιθανότητας* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *εφοδιασμένο με φιλτράρισμα* $\mathbf{F}$ *και* $(B_t)_{t\in[0,T]}$ *μονοδιάστατο Brownian motion σε αυτόν.*

(i) *Να εφαρμόσετε το Λήμμα του Ito για την* H.

(ii) *Δώστε την ολοκληρωτική μορφή του Ito για την* H.

(iii) *Ποια είναι η μέση τιμή* $E(H_t)$ *;*

(iv) *Είναι η* H *martingale και γιατί ; Αν ναι, υπό ποιες βασικές συνθήκες για την* c *;*

Λύση

(i) Είναι $dY_t = c_t dB_t - \frac{1}{2}c_t^2 dt$ και ισχύει $H_t = g(t, Y_t) = e^{Y_t}$, όπου $g(t,x) = e^x \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$. Άρα

$$\begin{aligned} dH_t &= \frac{\partial g(t,Y_t)}{\partial x}dY_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g(t,Y_t)}{\partial x^2}(dY_t)^2 \\ &= H_t(c_t dB_t - \frac{1}{2}c_t^2 dt) + \frac{1}{2}H_t c_t^2 dt = H_t c_t dB_t. \end{aligned}$$

(ii) Η ολοκληρωτική μορφή του Ito για την H είναι

$$H_t = 1 + \int_0^t H_s c_s dB_s,$$

διότι $Y_0 = 0$ και $e^{Y_0} = H_0 = 1$.

(*iii*) Η μέση τιμή $E(H_t) = 1$ (η μέση τιμή του ολοκληρώματος Ito είναι μηδέν), υπό την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα Ito $\int_0^t H_s c_s dB_s$ ορίζεται.

(*iv*) Η H είναι martingale διότι η ανέλιξη $M = (M_t)_{t\in[0,T]}$ με $M_t = \int_0^t c_s H_s dB_s$ είναι martingale, αρκεί τα αντίστοιχα ολοκληρώματα Ito να ορίζονται. Γι' αυτό πρέπει η H και επομένως και η c να είναι προσαρμοσμένες στο $\mathbf{F}$ και μετρήσιμες ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{B}_{[0,T]} \otimes \mathcal{F}$, όπου $\mathcal{B}_{[0,T]}$ είναι η σ-άλγεβρα των συνόλων Borel στο $[0,T]$. Επιπλέον πρέπει να ισχύει $\int_0^T E(c_t^2 H_t^2)dt < +\infty$. Αν η c είναι φραγμένη για κάθε $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$ εκτός από ένα σύνολο $\lambda \otimes P$-μέτρου μηδέν, δηλαδή ισχύει $|c(t,\omega)| \leq k$ (όπου $k > 0$) $\lambda \otimes P$-σχεδόν βεβαίως, τότε παρατηρούμε ότι

$$E(c_t^2 H_t^2) \leq k^2 E(H_t^2)$$

και για τη μέση τιμή $E(H_t^2)$ έχουμε τα εξής. Έστω $q > 1$ και

$$S_t = \int_0^t q c_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t q^2 c_s^2 ds, t \in [0,T].$$

Παρατηρούμε ότι $qY_t = S_t + \frac{q(q-1)}{2}\int_0^t c_s^2 ds$. Άρα $e^{qY_t} = e^{S_t + \frac{q(q-1)}{2}\int_0^t c_s^2 ds}$ και επομένως

$$E(e^{qY_t}) \leq E(e^{S_t + \frac{q(q-1)}{2}k^2 t}) = E(e^{S_t})e^{\frac{q(q-1)}{2}k^2 t}.$$

Επειδή όπως έχουμε πει η ανέλιξη e^S είναι supermartingale αν το $\mathbf{F}$ είναι το φιλτράρισμα που παράγει το ίδιο το Brownian motion που έχουμε θεωρήσει, ισχύει $E(e^{S_t}) \leq E(e^{S_0}) = 1$, τελικά είναι $E(e^{qY_t}) \leq e^{\frac{q(q-1)}{2}k^2 t}, t \in [0,T]$ και για $q = 2$ λαμβάνουμε το πεπερασμένο του ζητούμενου ολοκληρώματος.

Άσκηση 2. *Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα Ito* $\int_0^t H_s dB_s, t \in [0,T]$ *για τις παρακάτω ανελίξεις, αφού πριν δείξετε ότι ισχύει* $\int_0^t E(H_s^2)ds < \infty$

(*i*) $H_t = cosB_t$

(*ii*) $H_t = t^2 B_t^4$

(*iii*) $H_t = B_t^5$

(*iv*) $H_t = e^{-t} sinB_t$.

Λύση

(i) Είναι $\int_0^t E(cos^2 B_s)ds \leq \int_0^t E(1)ds = t < +\infty$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα Ito στην ανέλιξη Y για την οποία $Y_t = G(t, B_t) = sinB_t$ έχουμε ότι

$$dY_t = cosB_t dB_t - \frac{1}{2} sinB_t dt$$

και άρα

$$\int_0^t cosB_s dB_s = sinB_t + \frac{1}{2}\int_0^t sinB_s ds.$$

(ii) Είναι $\int_0^t E(s^2 B_s^8)ds = \int_0^t s^2 E(B_s^8)ds$, όμως από το γεγονός ότι $B_s \sim N(0, s)$ ισχύει ότι $E(B_s^8) = \frac{8!s^4}{2^4 4!}$ έπεται το πεπερασμένο του σχετικού ολοκληρώματος. Εφαρμόζοντας το Λήμμα Ito στην ανέλιξη Y για την οποία $Y_t = G(t, B_t) = t^2 \frac{B_t^5}{5}$ έχουμε ότι

$$dY_t = t^2 B_t^4 dB_t + (\frac{2t}{5} B_t^5 + 2t^2 B_t^3)dt.$$

Επομένως

$$\int_0^t s^2 B_s^4 dB_s = t^2 \frac{B_t^5}{5} - \int_0^t (\frac{2s}{5} B_s^5 + 2s^2 B_s^3)ds.$$

(iii) Επειδή $E(B_s^{10}) = \frac{10!s^5}{2^5 5!}$ το ολοκλήρωμα $\int_0^t E(B_s^{10})ds$ είναι πεπερασμένο, όπως και στο ερώτημα (ii). Εφαρμόζοντας το Λήμμα Ito στην ανέλιξη Y για την οποία $Y_t = G(t, B_t) = \frac{B_t^6}{6}$ έχουμε ότι

$$dY_t = B_t^5 dB_t + \frac{5}{2} B_t^4 dt$$

επομένως

$$\int_0^t B_s^5 dB_s = \frac{B_t^6}{6} - \frac{5}{2}\int_0^t B_s^4 ds.$$

(iv) Ισχύει $\int_0^t E(e^{-2s} sin^2 B_s)ds = \int_0^t e^{-2s} E(sin^2 B_s)ds \leq \int_0^t e^{-2s} ds < +\infty$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα Ito στην ανέλιξη Y για την οποία $Y_t = G(t, B_t) = -e^{-t} cosB_t$ έχουμε ότι

$$dY_t = e^{-t} sinB_t dB_t + (\frac{1}{2} e^{-t} cosB_t + e^{-t} cosB_t)dt$$

και άρα

$$\int_0^t e^{-s} sin B_s dB_s = 1 - e^{-t} cos B_t + \int_0^t \frac{3}{2} e^{-ts} cos B_s ds.$$

Άσκηση 3. *Με τη βοήθεια της ισομετρίας του Ito να δείξετε ότι αν*

$$c + \int_0^t g_s dB_s = r + \int_0^t u_s dB_s, t \in [0, T]$$

όπου $c, r \in \mathbb{R}$ και g, u βαθμωτές στοχαστικές ανελίξεις σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ εφοδιασμένο με φιλτράρισμα $\mathbf{F}$ και $(B_t)_{t\in[0,T]}$ μονοδιάστατο Brownian motion σε αυτόν, τότε $c = r$ και $g_t(\omega) = u_t(\omega)$ για κάθε $(t, \omega) \in [0, t] \times \Omega$, εκτός από ένα σύνολο $\lambda \otimes P$- μέτρου μηδέν, όπου λ το μέτρο Lebesgue στο $[0, T]$.

Λύση

Θέτοντας $t = 0$ προκύπτει $c = r$ και θέτοντας $t = T$ παίρνουμε

$$\int_0^T (g_t - u_t) dB_t = 0.$$

Δηλαδή έχουμε ότι $E((\int_0^T (g_t - u_t) dB_t)^2) = 0$ και παρατηρούμε ότι αυτή η μέση τιμή από την ισομετρία του Ito είναι ίση με το ολοκλήρωμα $\int_0^T E((g_t - u_t)^2) dt$ το οποίο είναι ίσο με μηδέν. Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι όμως η μέση τιμή μίας θετικής συνάρτησης (του τετραγώνου της διαφοράς των g, u) ως προς το μέτρο $\lambda \otimes P$ στον $[0, T] \times \Omega$ όπου λ είναι το μέτρο Lebesgue στο $[0, T]$. Δηλαδή το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$\int_0^T \int_\Omega (g(t, \omega) - u(t, \omega))^2 dP(\omega) dt = \int_{[0,T]\times\Omega} (g(t, \omega) - u(t, \omega))^2 d(\lambda \otimes P)(t, \omega).$$

Όμως αν το ολοκλήρωμα μιας θετικής συνάρτησης σε έναν χώρο μέτρου είναι μηδέν, αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση είναι μηδενική σχεδόν παντού στο χώρο αυτόν υπό το μέτρο του. Στην προκειμένη περίπτωση ο χώρος μέτρου είναι ο $([0, T] \times \Omega, \mathcal{B}_{[0,T]} \otimes \mathcal{F}, \lambda \otimes P)$, όπου $\mathcal{B}_{[0,T]}$ είναι η σ-άλγεβρα Borel στο $[0, T]$.

Άσκηση 4. *Επενδυτής εισέρχεται σε αγορά που ακολουθεί το μοντέλο Black-Scholes με αρχικό πλούτο ξ ευρώ. Ο επενδυτής προτίθεται να ακολουθήσει την εξής επενδυτική στρατηγική: Θα επενδύει στο numeraire έτσι ώστε το $(1 - a)100$ τοις εκατό του συνολικού πλούτου του κάθε χρονική στιγμή να προέρχεται από την επένδυση σε αυτό, όπου $0 < a < 1$ και επιπλέον το χαρτοφυλάκιό του να είναι αυτοχρηματοδοτούμενο.*

(*i*) *Ποια στοχαστική διαφορική εξίσωση περιγράφει την ανέλιξη πλούτου του επενδυτή ; (θεωρήστε την αγορά κανονικοποιημένη)*

(*ii*) *Εξετάστε αν η εξίσωση αυτή έχει ισχυρή λύση και αν έχει να την προσδιορίσετε.*

(*iii*) *Ποια είναι ανέλιξη χαρτοφυλακίου του επενδυτή ;*

Λύση Εφ' όσον το $100(1-a)$ τοις εκατό του πλούτου του κάθε χρονική στιγμή ο επενδυτής επιθυμεί να προέρχεται από το numeraire, αυτό σημαίνει ότι το υπόλοιπο $100a$ τοις εκατό προέρχεται από την επένδυση στη μετοχή. Θέτω $q_0(t) = 1-a, q_1(t) = a$ για κάθε t. Παρατηρώ ότι αν Z είναι η ανέλιξη Ito που ορίζεται ως εξής

$$dZ_t = Z_t((1-a)\frac{dS_t^0}{S_t^0} + a\frac{dS_t^1}{S_t^1})$$

και οι ανελίξεις θ_0, θ_1 είναι τέτοιες ώστε

$$\theta_0(t) = \frac{(1-a)Z_t}{S_t^0}, \theta_1(t) = \frac{aZ_t}{S_t^1}$$

τότε για το χαρτοφυλάκιο $\theta = (\theta_0, \theta_1)$ ισχύει ότι η ανέλιξη πλούτου που αντιστοιχεί σε αυτό είναι ακριβώς η Z, το χαρτοφυλάκιο αυτό είναι αυτο-χρηματοδοτούμενο και ικανοποιεί ακριβώς την επιθυμία του επενδυτή. Επειδή η αγορά είναι κανονικοποιημένη, ισχύει ότι

$$dZ_t = Z_t a\frac{dS_t^1}{S_t^1} = aZ_t((\mu - r)dt + \sigma dB_t).$$

Η παραπάνω στοχαστική διαφορική εξίσωση είναι γραμμική και επομένως έ-χει ισχυρή λύση σύμφωνα με το αντίστοιχο θεώρημα του Ito, η οποία είναι και μοναδική. Μάλιστα, η λύση της είναι μια γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους τάσης $a(\mu - r)$ και πτητικότητας $a\sigma$. Επειδή ο αρχικός πλούτος του επενδυτή είναι ξ ευρώ, λύνοντας αυτή την εξίσωση θα βρούμε ότι $Z_t = \xi e^{(a(\mu-r)-\frac{1}{2}a^2\sigma^2)t + a\sigma B_t}$ και επομένως για τις τυχαίες μεταβλητές των ανελίξ-εων θ_0, θ_1 ισχύει

$$\theta_0(t) = (1-a)Z_t, \theta_1(t) = a\frac{Z_t}{S_1(t)},$$

όπου $S_1(t) = S_1(0)e^{((\mu-r)-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma B_t}$.

Άσκηση 5. *Έστω χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ εφοδιασμένος με φιλτράρισμα $\mathbf{F}$ και $(B_t)_{t\in[0,T]}$ μονοδιάστατο Brownian motion σε αυτόν. Να εξετάσετε αν η στοχαστική διαφορική εξίσωση Ornstein-Uhlenbeck*

$$dX_t = (mX_t - k)dt + \sigma dB_t, m, k, \sigma > 0$$

έχει ισχυρή λύση και αν έχει να την προσδιορίσετε. Με τι ρυθμό μεταβάλλεται η μέση τιμή μιας μετοχής της οποίας η ανέλιξη τιμών ακολουθεί την παραπάνω στοχαστική διαφορική εξίσωση ;

Λύση

Η στοχαστική διαφορική εξίσωση είναι γραμμική και επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα Ito έχει μοναδική ισχυρή λύση. Από τη γενική μορφή μιας μονοδιά στατης στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dS_t = b(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dB_t$$

προκύπτει ότι στην προκειμένη περίπτωση ισχύει $b(t,x) = mx - k$ και $\sigma(t,x) = \sigma$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θεωρήματος Ito για την ύπαρξη και τη μοναδικότητα ισχυρής λύσης: Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| = m|x - y|,$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Άρα η σταθερά τύπου Lipschitz που απαιτεί το Θεώρημα Ito είναι ίση με m. Επίσης ισχύει ότι

$$\begin{aligned} |b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 &= (mx - k)^2 + \sigma^2 = m^2x^2 + k^2 - 2kmx + \sigma^2 \\ &\le 2m^2x^2 + 2k^2 + \sigma^2 \le max\{2m^2, 2k^2 + \sigma^2\}(1 + x^2). \end{aligned}$$

Άρα η δεύτερη σταθερά που απαιτεί το θεώρημα Ito στην προκειμένη περίπτωση είναι ίση με $L = max\{2m^2, 2k^2 + \sigma^2\}$. Λύνοντας με τη μέθοδο των εκθετικών πολλαπλασιαστών την παραπάνω εξίσωση (δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση εφαρμόζοντας το Λήμμα του Ito στην ανέλιξη $F_tX_t, t \in [0,T]$ όπου $F_t = e^{-mt}, t \in [0,T]$), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} X_t &= X_0e^{mt} - ke^{mt}\int_0^t e^{-ms}ds + \sigma e^{mt}\int_0^t e^{-ms}dB_s \\ &= X_0e^{mt} - \frac{k}{m}e^{mt} + \frac{k}{m} + \sigma e^{mt}\int_0^t e^{-ms}dB_s \end{aligned}$$

και επειδή ο τελευταίο στοχαστικό ολοκλήρωμα είναι καλά ορισμένο διότι $\int_0^T e^{-2mt}dt < +\infty$ η μέση τιμή $E(X_t)$ είναι η ντετερμινιστική συνάρτηση $X_0e^{mt} - \frac{k}{m}e^{mt} + \frac{k}{m}$ τς οποίας ο ρυθμός μεταβολής είναι η πρώτη παράγωγος $\frac{d}{dt}E(X_t)$.