Πανεπιστήμιο Αιγαίου - Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

Ακαδημαϊκό έτος 2007-8

Λύσεις 2ου φύλλου ασκήσεων στο μάθημα "Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά ΙΙΙ" (Ζ' Εξάμηνο)

Διδάσκων: Χ. Κουντζάκης

Άσκηση 1. *Ποια μορφή παίρνει το στοχαστικό διαφορικό της ανέλιξης πλούτου του επενδυτή της Άσκησης 4 του προηγούμενου φυλλαδίου ως προς το Brownian motion $\hat{B}$ που προσδιορίζεται από το Θεώρημα Girsanov;*

Λύση

Δείξαμε ότι ισχύει

$$dZ_t = aZ_t \frac{dS_t^1}{S_t^1}.$$

Όμως το στοχαστικό διαφορικό της S^1 υπό το μέτρο πιθανότητας Q που καθιστά την S^1 martingale προσαρμοσμένο στο $\mathbf{F}^B$ είναι $dS_t^1 = \sigma S_t^1 d\hat{B}_t$ όπου $\hat{B}_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t, t \in [0, T]$. Άρα η αντίστοιχη έκφραση του διαφορικού της Z είναι $dZ_t = a\sigma Z_t d\hat{B}_t$.

Άσκηση 2. *Εξετάστε αν στις ακόλουθες αγορές*

(*i*)

$$\begin{aligned} dS_0(t) &= 0, \\ dS_1(t) &= 3dt + 2dB_t^1 + 3dB_t^2, \\ dS_2(t) &= 2dt + 2dB_t^1 + 3dB_t^2 \end{aligned}$$

(*ii*)

$$\begin{aligned} dS_0(t) &= 0, \\ dS_1(t) &= dt + dB_t^1 + 3dB_t^2, \\ dS_2(t) &= 2dt + 2dB_t^1 + 5dB_t^2 \end{aligned}$$

όπου $(B_t^1, B_t^2), t \in [0,T]$ *είναι 2-διάστατο Brownian motion σε χώρο πιθανότητας* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *υπάρχει arbitrage. Σε περίπτωση καταφατικής απάντησης, προσδιορίστε ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο, ενώ σε περίπτωση αρνητικής απάντησης, προσδιορίστε σύμφωνα με το Θεώρημα Girsanov μέτρο πιθανότητας* Q *ισοδύναμο με το* P, *σύμφωνα με το οποίο η* S^* *να είναι martingale προσαρμοσμένο στο* $\mathbf{F}^B$.

Λύση

(i) Παρατηρώ ότι το γραμμικό σύστημα

$$\sigma u = \mu$$

όπου

$$\sigma = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \mu = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

δεν έχει λύση, άρα στην αγορά υπάρχει arbitrage. Αν ένας επενδυτής επιλέξει το χαρτοφυλάκιο $\theta_t = (k, 1, -1), t \in [0,T]$ τότε

$$V_T^\theta = V_0^\theta + \int_0^T \theta_t dS_t = V_0^\theta + \int_0^T 3dt + 2dB_t^1 + 3dB_t^2 - (2dt + 2dB_t^1 + 3dB_t^2) =$$

$$= V_0^\theta + \int_0^T dt = V_0^\theta + T.$$

Αν το k επιλεγεί ώστε να ισχύει $kS^0(0) + S^1(0) + S^2(0) = 0$ τότε το θ είναι arbitrage.

(ii) Παρατηρώ ότι το γραμμικό σύστημα

$$\sigma u = \mu$$

όπου

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

έχει λύση, η οποία είναι

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Επομένως το μέτρο πιθανότητας Q που καθιστά την S martingale ως προς το $\mathbf{F}^B$ είναι εκείνο του οποίου η Radon-Nikodym παράγωγος ως προς το μέτρο P είναι $M_T = e^{-\int_0^T u_t dB_t^1 - \frac{1}{2}\int_0^T u_t^2 dt}$ δηλαδή ίση με

$$e^{-B_T^1 + \frac{1}{2}T},$$

όπου B_T^1 είναι η τυχαία μεταβλητή που προκύπτει για $t = T$ στην πρώτη συντεταγμένη της διδιάστατης Brownian motion $B_t = (B_t^1, B_t^2), t \in [0, T]$.

Άσκηση 3. *Εξετάστε αν η αγορά (ii) της προηγούμενης άσκησης καθώς και η αγορά*

$$dS_0(t) = 0,$$
$$dS_1(t) = 2dt + dB_t^1 + dB_t^2 + dB_t^3,$$
$$dS_2(t) = 6tdt + 3dB_t^1 + 4dB_t^2 + 5dB_t^3,$$

όπου $(B_t^1, B_t^2, B_t^3), t \in [0, T]$ είναι 3-διάστατο Brownian motion στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, είναι πλήρεις.

Λύση

Για την αγορά της (ii) της προηγούμενης άσκησης στην οποία δεν υπάρχει arbitrage παρατηρούμε ότι το πλήθος των μετοχών στην αγορά είναι $m = 2$ και η διάσταση της Brownian motion στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ είναι $n = 2$, άρα από το θεώρημα χαρακτηρισμού των πλήρων αγορών επειδή είναι $rank\sigma(t, S(t, \omega)) = 2 = n$ για κάθε $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$, η αγορά είναι πλήρης. Για τη δεύτερη αγορά παρατηρούμε ότι το σύστημα $\sigma u = \mu$ όπου

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \mu = \begin{bmatrix} 2 \\ 6t \end{bmatrix},$$

έχει λύση και επομένως στην αγορά αυτή δεν υπάρχει arbitrage. Άρα επειδή το πλήθος των μετοχών στην αγορά είναι $m = 2$ και η διάσταση της Brownian motion στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ είναι $n = 3$ από το θεώρημα χαρακτηρισμού των πλήρων αγορών επειδή είναι $rank\sigma(t, S(t, \omega)) = 2 = m < 3 = n$ για κάθε $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$, η αγορά δεν είναι πλήρης.

Άσκηση 4. *Έστω χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και $(B_t)_{t \in [0,T]}$ μονοδιάστατο Brownian motion σε αυτόν. Αφού εξηγήσετε γιατί η αγορά*

$$dS_0(t) = 0,$$

$$dS_1(t) = kdt + adB_t$$

όπου $k, a > 0$ δεν έχει arbitrage, προσδιορίστε σύμφωνα με το Θεώρημα Girsanov μέτρο πιθανότητας Q ισοδύναμο με το P, σύμφωνα με το οποίο η S να είναι martingale προσαρμοσμένο στο $\mathbf{F}^B$. Είναι η αγορά πλήρης και γιατί ; Ποια η μορφή του στοχαστικού διαφορικού της S_1 υπό το μέτρο Q ;

Λύση

Η γενική μορφή της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει την εξέλιξη της τιμής της μετοχής είναι

$$dS_1(t) = \mu(t, S_1(t))dt + \sigma(t, S_1(t))dB_t.$$

Στην προκειμένη περίπτωση ισχύει $\mu(t, S_1(t)) = k, \sigma(t, S_1(t)) = a$. Επομένως υπάρχει στοχαστική ανέλιξη $u : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\sigma(t, S_1(t, \omega))u(t, \omega) = \mu(t, S_1(t, \omega)),$$

για κάθε $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ εκτός από ένα σύνολο $\lambda \otimes P$ -μέτρου μηδέν, η οποία είναι προσαρμοσμένη στο $\mathbf{F}^B$ και μετρήσιμη ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{B}_{[0,T]} \otimes \mathcal{F}$, όπου $\mathcal{B}_{[0,T]}$ είναι η σ-άλγεβρα των συνόλων Borel στο $[0, T]$. Επιπλέον ισχύει $\int_0^T E(u_t^2)dt < +\infty$. Όλες αυτές οι συνθήκες ικανοποιούνται διότι ισχύει $u(t, \omega) = \frac{k}{a}$, για κάθε $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$. Η ανέλιξη u ικανοποιεί επίσης τη συνθήκη Novikov. Άρα η αγορά δεν έχει arbitrage. Το μέτρο Q που καθιστά την S_1 martingale προσαρμοσμένο στο $\mathbf{F}^B$ (η S_1 είναι η προεξοφλημένη ανέλιξη των τιμών της μετοχής διότι $dS_0(t) = 0$) είναι εκείνο του οποίου η Radon-Nikodym παράγωγος του Q ως προς το μέτρο P είναι

$$\frac{dQ}{dP} = e^{-\frac{k}{a}B_T - \frac{1}{2}(\frac{k}{a})^2 T}.$$

Το μέτρο αυτό είναι μοναδικό γιατί η ανέλιξη u που προσδιορίστηκε παραπάνω είναι η μοναδική που ικανοποιεί τη

$$\sigma(t, S_1(t, \omega))u(t, \omega) = \mu(t, S_1(t, \omega)),$$

για κάθε $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ εκτός από ένα σύνολο $\lambda \otimes P$ -μέτρου μηδέν. Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Harrison-Pliska η αγορά είναι πλήρης. Η ανέλιξη $\hat{B}_t = B_t + \frac{k}{a}t, t \in [0, T]$ είναι μια κίνηση Brown υπό το μέτρο πιθανότητας Q, προσαρμοσμένη στο $\mathbf{F}^B$. Εφαρμόζοντας το Θ. Girsanov προκύπτει ότι το στοχαστικό διαφορικό της S_1 υπό το μέτρο Q και την $\hat{B}$ είναι $dS_1(t) = ad\hat{B}_t$.

Άσκηση 5. *Στο μοντέλο Black-Scholes υπολογίστε υπό το μέτρο Q που καθιστά την S^* martingale την πιθανότητα η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή t να ξεπερνά έναν θετικό πραγματικό αριθμό A (Υπόδειξη: Αφού θυμηθείτε ποια ανέλιξη Ito περιγράφει την εξέλιξη της τιμής της μετοχής υπό το μέτρο Q και την κίνηση Brown που προσδιορίζεται από το Θεώρημα Girsanov, λύστε τη σχετική στοχαστική διαφορική εξίσωση και θυμηθείτε ότι οι προσαυξήσεις μιας κίνησης Brown ακολουθούν κανονική κατανομή).*

Λύση Έστω

$$dS_1(t) = \mu S_1(t)dt + \sigma S_1(t)dB_t$$

η στοχαστική διαφορική εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη της τιμής της μετοχής στο μοντέλο Black-Scholes ($\mu, \sigma > 0$) υπό το μέτρο P. Η στοχαστική διαφορική εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη της τιμής της μετοχής υπό το μέτρο Q είναι

$$dS_1(t) = (\mu - r)S_1(t)dt + \sigma S_1(t)d\hat{B}_t,$$

όπου $r > 0$ το σταθερό επιτόκιο με το οποίο ανατοκίζεται η χρηματική μονάδα και $\hat{B}_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t, t \in [0, T]$. Υπενθυμίζουμε ότι η Radon-Nikodym παρά - γωγος του Q ως προς το μέτρο P είναι

$$\frac{dQ}{dP} = e^{-\frac{\mu-r}{\sigma}B_T - \frac{1}{2}(\frac{\mu-r}{\sigma})^2 T}$$

και ότι η $\hat{B}$ είναι κίνηση Brown ως προς το μέτρο Q (και το φιλτράρισμα που παράγει η αρχική κίνηση Brown B). Η τελευταία στοχαστική διαφορική εξίσωση είναι γραμμική και επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα Ito έχει μοναδική ισχυρή λύση. Η λύση της είναι

$$S_1(t) = S_1(0)e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\hat{B}_t}, t \in [0, T].$$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η

$$Q(S_t > A) = Q(S_1(0)e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\hat{B}_t} > A).$$

Η πιθανότητα αυτή όμως είναι ίση με

$$Q((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\hat{B}_t > ln\frac{A}{S_1(0)}) = Q(\frac{\hat{B}_t}{\sqrt{t}} > \frac{ln\frac{A}{S_1(0)} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}).$$

Όμως η τυχαία μεταβλητή $\frac{\hat{B}_t}{\sqrt{t}}$ ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή υπό το μέτρο πιθανότητας Q και άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$1 - \Phi(\frac{ln\frac{A}{S_1(0)} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}),$$

όπου Φ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.