Πανεπιστήμιο Αιγαίου - Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

Ακαδημαϊκό έτος 2007-8

Λύσεις 3ου φύλλου ασκήσεων στο μάθημα "Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά ΙΙΙ" (Ζ' Εξάμηνο)

Διδάσκων: Χ. Κουντζάκης

Άσκηση 1. *Στο μοντέλο Black-Scholes υπολογίστε την τιμή κατά τη χρονική περίοδο $t = 0$ που δεν παρέχει arbitrage για τα ακόλουθα παράγωγα:*

(i) $F = S_T I_{\{S_T > K\}}, K > 0$ *(asset-or- nothing option)*

(ii) $F = \frac{S_T}{K_1} I_{\{K_1 < S_T \leq K_2\}}, K_1, K_2 > 0$ *(supershare)*

S_T είναι η τυχαία μεταβλητή που δείχνει την τιμή της μετοχής κατά τη χρονική περίοδο T.

Λύση

(i) Για το παράγωγο του οποίου η απόδοση κατά την χρονική περίοδο T είναι $F = S_T I_{\{S_T > K\}}, K > 0$ ισχύει ότι η τιμή του κατά την περίοδο $t = 0$ είναι

$$e^{-rT} E_Q(S_T I_{\{S_T > K\}})$$

όπου Q είναι το μοναδικό ισοδύναμο μέτρο martingale για την αγορά και r το επιτόκιο με το οποίο ανατοκίζεται η χρηματική μονάδα στο $[0, T]$. Αν $S_0 = \xi$, Q-σχεδόν βεβαίως, τότε η παραπάνω μέση τιμή είναι ίση με

$$\int_d^{\infty} \xi e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma x} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx,$$

όπου ο πρώτος παράγοντας της ολοκληρωτέας συνάρτησης αντιστοιχεί στην τυχαία μεταβλητή S_T η οποία υπό το μέτρο Q και το Brownian motion $(\hat{B}_t)_{t \in [0,T]}$ που προσδιορίζονται από το Θεώρημα του Girsanov είναι ίση με $\xi e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma \hat{B}_T}$, ενώ ο δεύτερος παράγοντας είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $\hat{B}_T$ που ακολουθεί κανο
νική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά T

(σ είναι ο συντελεστής πτητικότητας στη στοχαστική διαφορική εξίσωση που περιγράφει την ανέλιξη που ακολουθεί η μετοχή στο μοντέλο Black-Scholes). Το σημείο d είναι η τιμή της $\hat{B}_T$ πάνω από την οποία η τυχαία μεταβλητή της οποίας θέλουμε να βρούμε τη μέση τιμή δεν είναι ίση με μηδέν. Για να συμβαίνει αυτό, πρέπει η δείκτρια τυχαία μεταβλητή $I_{\{S_T>K\}}$ να παίρνει την τιμή 1. Αυτό συμβαίνει αν $S_T > K$ δηλαδή αν $\xi e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\hat{B}_T} > K$ ισοδύναμα δηλαδή αν $\hat{B}_T > \frac{ln\frac{K}{\xi}-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma}$. Τότε κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $\eta = \frac{x}{\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T}$ το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται

$$\xi e^{rT}\int_{\frac{d}{\sqrt{T}}-\sigma\sqrt{T}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\eta^2}{2}}d\eta$$

και επομένως η τιμή του παραγώγου είναι ίση με $\xi(1-\Phi(\frac{d}{\sqrt{T}}-\sigma\sqrt{T})) = \xi\Phi(-\frac{d}{\sqrt{T}}+\sigma\sqrt{T}) = \xi\Phi(\frac{ln\frac{\xi}{K}+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}})$, όπου Φ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

(ii) Για το παράγωγο του οποίου η απόδοση κατά τη χρονική περίοδο T είναι $F = \frac{S_T}{K_1}I_{\{K_1<S_T\leq K_2\}}, K_1, K_2 > 0$ ισχύει ότι η τιμή του κατά την χρονική περίοδο $t=0$ είναι ίση με

$$e^{-rT}E_Q(\frac{S_T}{K_1}I_{\{K_1<S_T\leq K_2\}})$$

όπου Q είναι το μοναδικό ισοδύναμο μέτρο martingale για την αγορά και r το επιτόκιο με το οποίο ανατοκίζεται η χρηματική μονάδα στο $[0,T]$. Αν $S_0=\xi$, Q-σχεδόν βεβαίως, τότε η παραπάνω μέση τιμή είναι ίση με

$$\frac{1}{K_1}\int_{d_1}^{d_2}\xi e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma x}\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{x^2}{2T}}dx,$$

όπου ο πρώτος παράγοντας της ολοκληρωτέας συνάρτησης αντιστοιχεί στην τυχαία μεταβλητή S_T η οποία υπό το μέτρο Q και το Brownian motion $(\hat{B}_t)_{t\in[0,T]}$ που προσδιορίζονται από το Θεώρημα του Girsanov είναι ίση με $\xi e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\hat{B}_T}$, ενώ ο δεύτερος παράγοντας είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $\hat{B}_T$ που ακολουθεί κανο

νική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά T

(σ είναι ο συντελεστής πτητικότητας στη στοχαστική διαφορική εξίσωση που περιγράφει την ανέλιξη που ακολουθεί η μετοχή στο μοντέλο Black-Scholes). Τα σημεία d_1, d_2 είναι οι τιμές της $\hat{B}_T$ μεταξύ των οποίων η τυχαία μεταβλητή της οποίας θέλουμε να βρούμε τη μέση τιμή δεν είναι ίση με μηδέν. Για να συμβαίνει αυτό, πρέπει η δείκτρια τυχαία μεταβλητή $I_{\{K_1 < S_T \leq K_2\}}$ να παίρνει την τιμή 1. Αυτό συμβαίνει αν $K_1 < S_T \leq K_2$ δηλαδή αν $K_1 < \xi e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\hat{B}_T} \leq K_2$ ισοδύναμα δηλαδή αν $d_1 = \frac{ln\frac{K_1}{\xi}-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma} < \hat{B}_T \leq \frac{ln\frac{K_2}{\xi}-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma} = d_2$. Τότε κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $\eta = \frac{x}{\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T}$ το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται

$$\xi e^{rT}\frac{1}{K_1}\int_{\frac{d_1}{\sqrt{T}}-\sigma\sqrt{T}}^{\frac{d_2}{\sqrt{T}}-\sigma\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\eta^2}{2}}d\eta$$

και επομένως η τιμή του παραγώγου είναι ίση με

$$\frac{\xi}{K_1}(\Phi(\frac{d_2}{\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T}) - \Phi(\frac{d_1}{\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T})),$$

όπου Φ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Άσκηση 2. *Στο μοντέλο Black-Scholes υπολογίστε την τιμή κατά τη χρονική περίοδο $t = 0$ που δεν παρέχει arbitrage για το ακόλουθο παράγωγο (gap call-option):*

$$F = (S_T - D)I_{\{S_T > K\}}, K, D > 0.$$

S_T είναι η τυχαία μεταβλητή που δείχνει την τιμή της μετοχής κατά τη χρονική περίοδο T.

Λύση

Για το παράγωγο με απόδοση $F = (S_T - D)I_{\{S_T>K\}}, K, D > 0$ κατά τη χρονική περίοδο T, ισχύει ότι η τιμή του κατά την χρονική περίοδο $t = 0$ είναι ίση με

$$e^{-rT}E_Q((S_T - D)I_{\{S_T>K\}})$$

όπου Q είναι το μοναδικό ισοδύναμο μέτρο martingale για την αγορά και r το επιτόκιο με το οποίο ανατοκίζεται η χρηματική μονάδα στο $[0, T]$. Η παραπάνω τιμή όμως είναι ίση με $e^{-rT}E_Q(S_T I_{\{S_T>K\}}) - e^{-rT}E_Q(DI_{\{S_T>K\}})$. Ο πρώτος όρος της διαφοράς είναι η τιμή του asset-or-nothing option που υπολογίσαμε στην προηγούμενη άσκηση. Ο δεύτερος όρος είναι ίσος με $De^{-rT}Q(S_T > K)$, όμως όπως έχουμε υπολογίσει στην Άσκηση 5 του προηγούμενου φυλλαδίου η πιθανότητα $Q(S_T > K)$ είναι ίση με

$$1 - \Phi(\frac{ln\frac{K}{\xi} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}) = \Phi(\frac{ln\frac{\xi}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}),$$

όπου $S_0 = \xi$. Επομένως η τιμή του παραγώγου είναι

$$\xi\Phi(\frac{ln\frac{\xi}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}) - De^{-rT}\Phi(\frac{ln\frac{\xi}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}),$$

όπου Φ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανο
μής.

Άσκηση 3. *Στο μοντέλο Black-Scholes υπολογίστε την τιμή κατά τη χρονική περίοδο t όπου $0 < t < T$ που δεν παρέχει arbitrage για τα παράγωγα της άσκησης 1.*

Λύση

(i) Η ζητούμενη τιμή του παραγώγου είναι

$$e^{-r(T-t)}E_Q(S_T I_{\{S_T > K\}}|\mathcal{F}_t),$$

όπου $\mathcal{F}_t$ είναι η σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω που παράγεται από τις τυχαίες μεταβλητές $B_s, 0 \leq s \leq t$ της κίνησης Brown του μοντέλου και Q είναι το μοναδικό ισοδύναμο μέτρο martingale της αγοράς. Αν η τιμή S_t της μετοχής κατά τη χρονική περίοδο t είναι ίση με y, τότε η ζητούμενη τιμή γράφεται ισοδύναμα

$$e^{-r(T-t)}E_Q(ye^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(\hat{B}_T - \hat{B}_t)}I_{\{S_T > K\}}|\mathcal{F}_t),$$

όπου $(\hat{B}_t)_{t\in[0,T]}$ η κίνηση Brown ως προς το μέτρο Q και το filtration της αρχικής κίνησης Brown μετά την αλλαγή του μέτρου. Η αντικατάσταση $S_T = ye^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(\hat{B}_T - \hat{B}_t)}$ προκύπτει θέτοντας $u = T$ στη λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$S_u = y + \int_t^u rX_s ds + \int_t^u \sigma X_s d\hat{B}_s$$

ως προς το μέτρο Q και την κίνηση Brown $(\hat{B}_t)_{t\in[0,T]}$ που περιγράφει την εξέλιξη της τιμής της μετοχής κατά το χρονικό διάστημα $[t,T]$ αν ισχύει $S_t = y$. Παρατηρούμε ότι για την τυχαία μεταβλητή S_T ισχύει $S_T = g(\hat{B}_T - \hat{B}_t)$ και για την τυχαία μεταβλητή $I_{\{S_T>K\}}$ ισχύει $I_{\{S_T>K\}} = h(\hat{B}_T - \hat{B}_t)$, όπου $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμες συναρτήσεις. Άρα και το γινόμενό τους είναι Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Όμως η προσαύξηση $\hat{B}_T - \hat{B}_t$ είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_t$, επομένως και η τυχαία μεταβλητή της οποίας λαμβάνουμε τη δεσμευμένη μέση τιμή είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_t$. Επομένως η ζητούμενη τιμή γράφεται ισοδύναμα

$$e^{-r(T-t)}E_Q(ye^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(\hat{B}_T-\hat{B}_t)}I_{\{S_T>K\}})$$

και η παραπάνω μέση τιμή ισούται με το ολοκλήρωμα

$$\int_d^{\infty} ye^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma x}\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}dx,$$

όπου ο πρώτος παράγοντας της ολοκληρωτέας συνάρτησης αντιστοιχεί στην τυχαία μεταβλητή S_T η οποία υπό το μέτρο Q και το Brownian motion $(\hat{B}_t)_{t\in[0,T]}$ που προσδιορίζονται από το Θεώρημα του Girsanov είναι ίση με $ye^{(r-\frac{1}{2}\sigma)(T-t)+\sigma(\hat{B}_T-\hat{B}_t)}$, ενώ ο δεύτερος παράγοντας είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $\hat{B}_T - \hat{B}_t$ που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά $T-t$ (σ είναι ο συντελεστής πτητικότητας στη στοχαστική διαφορική εξίσωση που περιγράφει την ανέλιξη που ακολουθεί η μετοχή). Το σημείο d είναι η τιμή της προσαύξησης $\hat{B}_T - \hat{B}_t$ πάνω από την οποία η τυχαία μεταβλητή της οποίας θέλουμε να βρούμε τη μέση τιμή δεν είναι ίση με μηδέν. Για να συμβαίνει αυτό, πρέπει η δείκτρια τυχαία μεταβλητή $I_{\{S_T>K\}}$ να παίρνει την τιμή 1. Αυτό συμβαίνει αν $S_T > K$ δηλαδή αν $ye^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(\hat{B}_T-\hat{B}_t)} > K$ ισοδύναμα δηλαδή αν $\hat{B}_T - \hat{B}_t > \frac{ln\frac{K}{y}-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma}$. Τότε κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $\eta = \frac{x}{\sqrt{T-t}} - \sigma\sqrt{T-t}$ το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται

$$ye^{r(T-t)}\int_{\frac{d}{\sqrt{T-t}}-\sigma\sqrt{T-t}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\eta^2}{2}}d\eta$$

και επομένως η τιμή του παραγώγου είναι ίση με

$$y(1-\Phi(\frac{d}{\sqrt{T-t}}-\sigma\sqrt{T-t})) = y\Phi(-\frac{d}{\sqrt{T-t}}+\sigma\sqrt{T-t}) =$$

$$= y\Phi(\frac{ln\frac{y}{K} + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}),$$

όπου Φ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

(ii) Με αιτιολόγηση παρόμοια με αυτή του προηγούμενου ερωτήματος, προκύπτει ότι η ζητούμενη τιμή $e^{-r(T-t)}E_Q(\frac{S_T}{K_1}I_{\{K_1<S_T\leq K_2\}}|\mathcal{F}_t)$ είναι ίση με

$$e^{-r(T-t)}E_Q(\frac{y}{K_1}e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(\hat{B}_T-\hat{B}_t)}I_{\{K_1<S_T\leq K_2\}}).$$

Η παραπάνω μέση τιμή είναι ίση με το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{K_1}\int_{d_1}^{d_2} ye^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma x}\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}dx,$$

όπου ο πρώτος παράγοντας της ολοκληρωτέας συνάρτησης αντιστοιχεί στην τυχαία μεταβλητή S_T τυχαία μεταβλητή S_T η οποία υπό το μέτρο Q και το Brownian motion $(\hat{B}_t)_{t\in[0,T]}$ που προσδιορίζονται από το Θεώρημα του Girsanov είναι ίση με $ye^{(r-\frac{1}{2}\sigma)(T-t)+\sigma(\hat{B}_T-\hat{B}_t)}$ ενώ ο δεύτερος παράγοντας είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $\hat{B}_T-\hat{B}_t$ που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά $T-t$ (σ είναι ο συντελεστής πτητικότητας στη στοχαστική διαφορική εξίσωση που περιγράφει την ανέλιξη που ακολουθεί η μετοχή).

Τα σημεία d_1, d_2 είναι οι τιμές της $\hat{B}_T-\hat{B}_t$ μεταξύ των οποίων η τυχαία μεταβλητή της οποίας θέλουμε να βρούμε τη μέση τιμή δεν είναι ίση με μηδέν. Για να συμβαίνει αυτό, πρέπει η δείκτρια τυχαία μεταβλητή $I_{\{K_1<S_T\leq K_2\}}$ να παίρνει την τιμή 1. Αυτό συμβαίνει αν $K_1 < S_T \leq K_2$ δηλαδή αν $K_1 < ye^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(\hat{B}_T-\hat{B}_t)} \leq K_2$ ισοδύναμα δηλαδή αν

$$d_1 = \frac{ln\frac{K_1}{y} - (r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma} < \hat{B}_T-\hat{B}_t \leq \frac{ln\frac{K_2}{y} - (r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma} = d_2.$$

Τότε κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $\eta = \frac{x}{\sqrt{T-t}} - \sigma\sqrt{T-t}$ το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται

$$ye^{r(T-t)}\frac{1}{K_1}\int_{\frac{d_1}{\sqrt{T-t}}-\sigma\sqrt{T-t}}^{\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}-\sigma\sqrt{T-t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\eta^2}{2}}d\eta$$

και επομένως η τιμή του παραγώγου είναι ίση με

$$\frac{y}{K_1}(\Phi(\frac{d_2}{\sqrt{T-t}} - \sigma\sqrt{T-t}) - \Phi(\frac{d_1}{\sqrt{T-t}} - \sigma\sqrt{T-t})),$$

όπου Φ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Άσκηση 4. *Στο μοντέλο Black-Scholes ποια ανέλιξη χαρτοφυλακίου αναπαράγει το break forward, δηλαδή το Ευρωπαϊκού τύπου παράγωγο με απόδοση $F = max\{S_T, K\} - L, K, L > 0$, όπου S_T είναι η τυχαία μεταβλητή που δείχνει την τιμή της μετοχής κατά τη χρονική περίοδο T ;*

Λύση Είναι $\max\{S_T, K\} = \frac{S_T+K+|S_T-K|}{2}$ και $|S_T-K| = (S_T-K)^+ + (K-S_T)^+$, καθώς επίσης και $(S_T-K) = (S_T-K)^+ - (K-S_T)^+$. Από τη δεύτερη και τρίτη σχέση έχουμε ότι $|S_T-K| = 2(S_T-K)^+ + (K-S_T)$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη σχέση προκύπτει ότι $F = (S_T-K)^+ + K - L$. Αν $c(t, S_t), t \in [0,T]$ είναι η ανέλιξη αξίας του δικαιώματος αγοράς της μετοχής με τιμή εξάσκησης K είναι γνωστό ότι το χαρτοφυλάκιο που αναπαράγει το δικαίωμα αγοράς είναι το $\theta_t = (\theta_0(t), \theta_1(t)), t \in [0,T]$, όπου $\theta_1(t) = \frac{\partial c(t,S_t)}{\partial x}, t < T$ (υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση $c : [0,T] \times \mathbb{R}_+, (t,x) \mapsto c(t,x)$ είναι κλάσης $C^{1,2}$ στο $[0,T) \times \mathbb{R}_+$, δηλαδή υπάρχουν και είναι συνεχείς οι μερικές παράγωγοι μέχρι πρώτης τάξης ως προς την πρώτη μεταβλητή και μέχρι δεύτερης τάξης ως προς τη δεύτερη μεταβλητή) είναι το πλήθος των μεριδίων της μετοχής στα οποία επενδύει ο επενδυτής κατά τη χρονική περίοδο t και $\theta_0(t) = \frac{c(t,S_t) - S_t \frac{\partial c(t,S_t)}{\partial x}}{e^{rt}}$ είναι το πλήθος των μεριδίων του numeraire στα οποία επενδύει ο επενδυτής κατά τη χρονική περίοδο t.

Επομένως η ανέλιξη αξίας του παραγώγου είναι $c(t, S_t) + (K-L)e^{-r(T-t)}, t \in [0,T]$. Για να υπολογίσουμε πόσα επιπλέον μερίδια $\phi_1(t)$ από το numeraire πρέπει να επιλέγουμε σε κάθε χρονική περίοδο t πέραν των μεριδίων που απαιτούνται για την αντιστάθμιση του δικαιώματος αγοράς, παρατηρούμε ότι αν $(z_0(t), z_1(t))$ το ζητούμενο χαρτοφυλάκιο είναι $z_0(t) = \theta_0(t), z_1(t) = \theta_1(t) + \phi_1(t)$. Τότε ισχύει $\phi_1(t)e^{rt} = (K-L)e^{-r(T-t)}$. Επομένως $\phi_1(t) = (K-L)e^{-rT}, t \in [0,T]$. Παρατηρούμε ότι το χαρτοφυλάκιο z είναι αυτοχρηματοδοτούμενο, διότι σύμφωνα με το Λήμμα του Ito ισχύει

$$d(\phi_1(t)e^{rt}) = \phi_1(t)d(e^{rt}) + e^{rt}d\phi_1(t) + d(e^{rt})d\phi_1(t)$$

και επειδή η στοχαστική ανέλιξη ϕ_1 είναι σταθερή, ισχύει $d\phi_1(t) = 0$.

Άσκηση 5. *Στο μοντέλο Black-Scholes προσδιορίστε την ανέλιξη αξίας υπό το μοναδικό ισοδύναμο μέτρο martingale της αγοράς, για το παράγωγο* $F = max\{S_T, K\}, K > 0$.

Λύση

Από την προηγούμενη άσκηση, η απόδοση του παραγώγου κατά την περίοδο $t = T$ είναι ίση με

$$K + (S_T - K)^+.$$

Επομένως η ανέλιξη αξίας του παραγώγου είναι $d(t, S_t) = c(t, S_t) + Ke^{-r(T-t)}$, όπου $t \in [0, T]$ και $c(t, S_t), t \in [0, T]$ η ανέλιξη αξίας του δικαιώματος αγοράς της μετοχής με τιμή εξάσκησης K. Όπως είναι γνωστό η ανέλιξη αξίας του δικαιώματος αγοράς της μετοχής με τιμή εξάσκησης K είναι η ακόλουθη:

$$c(t, S_t) = S_t \Phi(\frac{ln\frac{S_t}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}) -$$

$$Ke^{-r(T-t)}\Phi(\frac{ln\frac{S_t}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}), t < T$$

και

$$c(T, S_T) = (S_T - K)^+.$$