Πανεπιστήμιο Αιγαίου - Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

Ακαδημαϊκό έτος 2007-8

Μαθηματικό Παράρτημα Ι στο μάθημα "Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά ΙΙ" (ΣΤ΄ Εξάμηνο)

Διδάσκων: Χ. Κουντζάκης

Θεωρήματα Διαχωρισμού Κυρτών Συνόλων σε Ευκλείδειους χώρους και η μη ύπαρξη arbitrage στο μοντέλο αγοράς δύο περιόδων.

Υποθέτουμε ότι ζούμε σε έναν κόσμο όπου οι συναλλαγές λαμβάνουν χώρα σε δύο χρονικές περιόδους $t = 0, 1$ και το σύνολο των καταστάσεων του κό - σμου είναι το πεπερασμένο σύνολο $\{1, 2, ..., S\}$. Κατά τη χρονική περίοδο 0 οι επενδυτές δεν γνωρίζουν ποια κατάσταση επικρατεί στον κόσμο, ενώ κατά τη χρονική περίοδο 1 αυτή η κατάσταση αποκαλύπτεται. Έπίσης υποθέτουμε ότι το σύνολο των (βασικών) χρηματοοικονομικών συμβολαίων της αγοράς είναι το πεπερασμένο σύνολο $\mathbf{J} = \{1, 2, ..., J\}$, οι αποδόσεις των συμβολαίων αυτών κατά την περίοδο 1 δίνονται από τον $S \times J$ πίνακα V και οι τιμές στις οποίες πραγματοποιούνται οι αγορές και οι πωλήσεις των συμβολαίων αυτών κατά την περίοδο 0 δίνονται από το διάνυσμα τιμών $q \in \mathbb{R}^J$. Υποθέτουμε επίσης ότι το σύνολο των χαρτοφυλακίων είναι $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^J$. Με W συμβολίζουμε τον $(S+1) \times J$ πίνακα $\begin{bmatrix} -q \\ V \end{bmatrix}$.

Υπενθυμίζουμε το Θεώρημα Χαρακτηρισμού της Μη - Ύπαρξης arbitrage για την αγορά $(\mathbf{J}, V, q)$.

Θεώρημα 1. *Έστω επενδυτής με αρχικό διαθέσιμο αγαθό $\omega \in \mathbb{R}_+^{S+1}$ και συνάρτηση ωφελιμότητας $u : \mathbb{R}_+^{S+1} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και αυστηρά μονότονη. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το πρόβλημα του επενδυτή

$$\text{Μεγιστοποίησε } u(x) \text{ υπό τον περιορισμό } x \in B(q, V, \omega) \qquad (1)$$

έχει λύση.

(*ii*) *Στην αγορά χρηματοοικονομικών συμβολαίων* $(\boldsymbol{J}, V, q)$ *δεν υπάρχει arbitrage.*

(*iii*) *Υπάρχει διάνυσμα* $\pi \in \mathbb{R}^{S+1}_{++}$ *τέτοιο ώστε* $\pi_0 = 1$ *και* $\pi \cdot W = 0$

(*iv*) *Το σύνολο προϋπολογισμού* $B(V, q, \omega)$ *του επενδυτή είναι ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του* $\mathbb{R}^{S+1}$.

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος και πιο συγκεκριμένα η συνεπα - γωγή $(ii) \Rightarrow (iii)$ βασίζεται στο Θεώρημα Διαχωρισμού Κυρτών Συνόλων σε Ευκλείδειους χώρους, που αποτελεί και το θέμα του παραρτήματος αυτού.

Ένα υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^d$ της μορφής

$$H(f, a) = \{x \in \mathbb{R}^d | f \cdot x = a\},$$

για κάποιο $f \in \mathbb{R}^d$ και κάποιο $a \in \mathbb{R}$, ονομάζεται **υπερεπίπεδο**. Επίσης ένα υποσύνολο C του $\mathbb{R}^d$ ονομάζεται **κυρτό**, αν για κάθε $x, y \in C$ και κάθε $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$. Τα υποσύνολα K, M του $\mathbb{R}^d$ λέγεται ότι **διαχωρίζονται** από το υπερεπίπεδο $H(f, a)$ αν για κάθε $x \in K, y \in M$ ισχύει

$$f \cdot x \leq a \leq f \cdot y.$$

Επίσης, τα υποσύνολα K, M του $\mathbb{R}^d$ λέγεται ότι **διαχωρίζονται γνήσια** από το υπερεπίπεδο $H(f, a)$ αν για κάθε $x \in K, y \in M$ υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f \cdot x \leq a < a + \epsilon \leq f \cdot y.$$

Ένα υποσύνολο K του $\mathbb{R}^d$ ονομάζεται **κλειστό** αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ που συγκλίνει στο $x \in \mathbb{R}^d$, ισχύει $x \in A$. Επίσης ένα υποσύνολο $B \subseteq \mathbb{R}^d$ ονομάζεται φραγμένο, αν και μόνο αν για κάθε $i = 1, 2, ..., d$ υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί m_i, M_i τέτοιοι ώστε για κάθε $x \in B$ να ισχύει $m_i \leq x_i \leq M_i$, όπου x_i είναι η i- συντεταγμένη του διανύσματος x. Επίσης συμβολίζουμε με $\|x\|$ τον πραγματικό αριθμό $\sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$. Αυτός ο πραγματικός αριθμός δεν είναι άλλος από την Ευκλείδεια απόσταση του διανύσματος x από το 0 στον $\mathbb{R}^d$ ($\|x - y\|$ είναι η Ευκλείδεια απόσταση του x από το y στον $\mathbb{R}^d$). Υπενθυμίζουμε ότι η Ευκλείδεια απόσταση έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(*i*) $\|x - y\| \geq 0$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^d$ και $\|x - y\| = 0$ αν και μόνο αν $x = y$.

(*ii*) $\|x - y\| = \|y - x\|$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^d$.

(iii) $\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$, για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}^d$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ και $a \geq 0$ το σύνολο

$$B(x,a) = \{y \in \mathbb{R}^d | \|x-y\| \leq a\}$$

ονομάζεται **κλειστή μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα a**. Η κλειστή μπάλα στον $\mathbb{R}^d$ είναι το ανάλογο του κλειστού διαστήματος στο $\mathbb{R}$. Κάθε κλειστή μπάλα είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Επίσης κάθε κλειστή μπάλα είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Επίσης η συνάρτηση $d(x,y) = \|x-y\|$ είναι συνεχής συνάρτηση των x, y (συνεχής στο $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$), όπως επίσης αν σταθεροποιήσουμε το y η συνάρτηση $d_x(y) = \|x-y\|$ είναι συνεχής συνάρτηση του y (συνεχής στο $\mathbb{R}^d$). Επίσης αν C είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, τότε $\overline{C}$ είναι το ακόλουθο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$:

$$\overline{C} = \{y \in \mathbb{R}^d | \text{ υπάρχει } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C \text{ τέτοια ώστε } lim_n x_n = y\}.$$

Το σύνολο C είναι κλειστό, αν και μόνο αν $\overline{C} = C$. Επίσης αν το C είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ τότε και το $\overline{C}$ είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Αυτό ισχύει διότι αν $x, y \in \overline{C}$ τότε υπάρχουν ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ τέτοιες ώστε $lim_n x_n = x, lim_n y_n = y$. Για να δείξουμε ότι το $\overline{C}$ είναι κυρτό, αρκεί να δείξουμε ότι $ax + (1-a)y \in \overline{C}$ για κάθε $a \in (0,1)$. Αυτό όμως έπεται από το γεγονός ότι το C είναι κυρτό και άρα κάθε όρος της ακολουθίας $ax_n + (1-a)y_n, n \in \mathbb{N}$ είναι στοιχείο του C, όπου $a \in (0,1)$. Αλλά η ακολουθία αυτή συγκλίνει στο $ax+(1-a)y$ και άρα το $ax+(1-a)y$ είναι για κάθε $a \in (0,1)$ στοιχείο του $\overline{C}$, δηλαδή το $\overline{C}$ είναι κυρτό σύνολο.

Αποδεικνύουμε κατ' αρχήν το ακόλουθο

Λήμμα 2. *Έστω C μη κενό, κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Αν $x \notin C$, τότε υπάρχει διάνυσμα $y \in C$ τέτοιο ώστε*

$$\|x-y\| = min\{\|x-z\|, z \in C\}.$$

Αν το C είναι κυρτό, τότε το y είναι μοναδικό.

Απόδειξη. Έστω $z \in C$ και έστω η κλειστή μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα $r = \|z-x\|$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $C \cap B(x,r)$ είναι κλειστό και φραγμένο και επειδή η συνάρτηση $d_x(y) = \|x-y\|$ είναι συνεχής συνάρτηση ως προς y, από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής συμπεραίνουμε ότι λαμβάνει ελάχιστο στο σύνολο $C\cap B(x,r)$. Αν το C είναι κυρτό σύνολο και υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο σημεία $y, y' \in C$ με $y \neq y'$ στα οποία λαμβάνεται το ελάχιστο, δηλαδή $\|x-y\| = \|x-y'\|$, τότε έχουμε:

$$\|y-x\|^2 = \|y - \frac{1}{2}(y+y')\|^2 + \|x - \frac{1}{2}(y+y')\|^2$$

από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, επειδή το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία x, y, y' είναι ισοσκελές διότι ισχύει $\|x-y\| = \|x-y'\|$. Αυτό σημαίνει ότι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία x και $\frac{1}{2}(y+y')$ είναι διάμεσος αλλά και ύψος στο τρίγωνο αυτό. Όμως στο δεύτερο μέλος της ισότητας ο όρος $\|y - \frac{1}{2}(y+y')\|^2$ είναι μη μηδενικός θετικός πραγματικός αριθμός, διότι ισχύει $y \neq y'$. Άρα ισχύει $\|y - \frac{1}{2}(y+y')\|^2 + \|x - \frac{1}{2}(y+y')\|^2 > \|x - \frac{1}{2}(y+y')\|^2$, άτοπο διότι εφ' όσον το C είναι κυρτό και άρα $\frac{1}{2}(y+y') \in C$, η τελευταία γνήσια ανισότητα σημαίνει ότι προσδιορίσαμε ένα σημείο του C του οποίου η απόσταση από το x είναι μικρότερη από την απόσταση του y από το x, που είναι στοιχείο του C το οποίο επιτυγχάνει την ελάχιστη απόσταση από το x.

□

Λήμμα 3. *Έστω C μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Αν $x \notin C$ και $y \in C$ το διάνυσμα για το οποίο ισχύει*

$$\|x-y\| = min\{\|x-z\|, z \in C\},$$

τότε το υπερεπίπεδο $H(x-y, (x-y)\cdot y)$ διαχωρίζει γνήσια το σημείο x και το σύνολο C.

Απόδειξη. Για κάθε $z \in C$, έστω η συνάρτηση $\phi_z : [0,1] \to \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως εξής: $\phi_z(t) = \|x - (tz + (1-t)y)\|^2$. Από τον ορισμό του σημείου y, η ϕ_z λαμβάνει ελάχιστο στο σημείο $t=0$ και επειδή είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, ισχύει ότι $\phi_z'(0) \geq 0$ για κάθε $z \in C$. Όμως ισχύει ότι $\phi_z(t) = \|x-y\|^2 + 2t(x-y)\cdot(y-z) + t^2\|y-z\|^2$. Άρα $\phi_z'(0) = 2(x-y)\cdot(y-z) \geq 0$ για κάθε $z \in C$. Αφού ισχύει $x \notin C$, είναι $(x-y)\cdot(x-y) = \|x-y\|^2 > 0$. Άρα $(x-y)\cdot z \leq (x-y)\cdot y < (x-y)\cdot x$ για κάθε $z \in C$ και έπεται το ζητούμενο.

□

Βασιζόμενοι στα προηγούμενα δύο Λήμματα, μπορούμε να δείξουμε το παρακάτω θεώρημα το οποίο είναι γνωστό ως θεώρημα Διαχωρισμού Κυρτών Συνόλων σε Ευκλείδειους χώρους.

Θεώρημα 4. *Έστω K, M μη κενά, κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ τέτοια ώστε $K \cap M = \oslash$. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς:*

(i) *Υπάρχει $\pi \in \mathbb{R}^d, \pi \neq 0$ τέτοιο ώστε τα σύνολα K, M να διαχωρίζονται από ένα υπερεπίπεδο $H(\pi, a), a \in \mathbb{R}$*

(ii) *Αν το K είναι κλειστό και φραγμένο, ενώ το M είναι κλειστό, τότε υπάρχει $\pi \in \mathbb{R}^d, \pi \neq 0$ τα σύνολα K, M διαχωρίζονται γνήσια από ένα υπερεπίπεδο $H(\pi, a), a \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Έστω C το σύνολο $M - K = \{y \in \mathbb{R}^d | y = x - x', x \in M, x' \in K\}$. Το σύνολο αυτό είναι μη κενό και κυρτό, ενώ ισχύει ότι $0 \notin C$ διότι $M \cap K = \oslash$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

(a) Αν $0 \notin \overline{C}$ τότε από το προηγούμενο Λήμμα υπάρχει $\pi \in \mathbb{R}^d, \pi \neq 0$ τέτοιο ώστε $\pi \cdot z > 0 = \pi \cdot 0$ για κάθε $z \in \overline{C}$, απ' όπου έπεται ότι τα σύνολα K, M διαχωρίζονται. Το γεγονός ότι το K και το M διαχωρίζονται έπεται από το ότι αφού $\pi \cdot z > 0$ για κάθε $z \in \overline{C}$, τότε και για κάθε $z \in C$ ισχύει $\pi \cdot z > 0$ όμως $z = x - x', x \in M, x' \in K$ και άρα είναι $\pi \cdot x > \pi \cdot x'$ για κάθε $x \in M, x' \in K$. Για να εφαρμόσουμε όμως το προηγούμενο Λήμμα πρέπει το $\overline{C}$ να είναι κυρτό, το οποίο ισχύει διότι το C είναι κυρτό σύνολο. Άρα στην περίπτωση αυτή ισχύει το συμπέρασμα (i) του θεωρήματος για κάποιο a τέτοιο ώστε $inf\{\pi \cdot x | x \in M\} \leq a \leq sup\{\pi \cdot x' | x' \in K\}$. Έτσι λοιπόν και στην περίπτωση όπου το M είναι κλειστό και το K είναι κλειστό και φραγμένο, τότε το C είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ επομένως ισχύει $C = \overline{C}$. Έστω $s = inf\{\pi \cdot z | z \in C\} > 0$. Τότε ισχύει $\pi \cdot (x - x') \geq s > 0$, για κάθε $x \in M, x' \in K$. Επομένως ισχύει $inf\{\pi \cdot x | x \in M\} \geq sup\{\pi \cdot x' | x' \in K\} + s > sup\{\pi \cdot x' | x' \in K\}$. Επομένως στην περίπτωση αυτή από τα προηγούμενα έπεται το συμπέρασμα (ii) του θεωρήματος για $a = sup\{\pi \cdot x' | x' \in K\}$.

(b) Αν ισχύει ότι $0 \in \overline{C}$, τότε έστω $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ ένα μεγιστικό υποσύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του C (μεγιστικό υποσύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων είναι ένα σύνολο ανεξάρτητων διανυσμάτων που είναι στοιχεία του C τέτοιο ώστε δεν υπάρχει σύνολο ανεξάρτητων διανυσμάτων του C το οποίο να είναι γνήσια μεγαλύτερο από αυτό, δηλαδή κάθε στοιχείο του C γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων αυτού του συνόλου). Άρα για κάθε $x \in C$ τα στοιχεία του συνόλου $\{x, e_1, e_2, ..., e_m\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα και επομένως

$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $a > 0$ ισχύει $-a\sum_{i=1}^m e_i \notin \overline{C}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει τέτοιο $a > 0$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Αφού $-a\sum_{i=1}^m e_i \in \overline{C}$ τότε υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του C η οποία συγκλίνει στο $-a\sum_{i=1}^m e_i$. Αν $x_n = \sum_{i=1}^m \lambda_i^n e_i$ τότε από τη γραμμική ανεξαρτησία των $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ προκύπτει ότι $\lambda_i^n \to -a, i = 1, 2, ..., m$. Τότε για αρκετά μεγάλο n ισχύει $\lambda_i^n < 0, i = 1, 2, ..., m$. Τότε από την κυρτότητα του C έπεται ότι

$$0 = (\frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i^n})x_n - \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i^n}{1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i^n} e_i \in C,$$

το οποίο είναι άτοπο, διότι υποθέσαμε ότι $0 \notin C$. Επομένως για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^m e_i \notin \overline{C}$. Τότε από το προηγούμενο Λήμμα για κάθε $k \in \mathbb{N}$, υπάρχει $\pi_k \in \mathbb{R}^d, \pi_k \neq 0$ το οποίο μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε $\|\pi_k\| = 1$ τέτοιο ώστε $\pi_k \cdot z < \pi_k \cdot (-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^m e_i)$, για κάθε $z \in \overline{C}$. Όμως αφού για την ακολουθία $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ισχύει $\|\pi_k\| = 1$ για κάθε k, η ακολουθία αυτή είναι φραγμένη και άρα υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία της την οποία συμβολίζουμε επίσης με $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ και έστω $\pi = lim_k \pi_k$. Άρα για τα όρια των ακολουθιών πραγματικών αριθμών στην τελευταία ανισότητα, ισχύει $\pi \cdot z \leq 0$, για κάθε $z \in \overline{C}$ και επομένως και για κάθε $z \in C$. Επομένως προκύπτει ότι $\pi \cdot x \leq \pi \cdot x'$ για κάθε $x \in M$ και για κάθε $x' \in K$, απ΄ όπου έπεται το συμπέρασμα (i) του θεωρήματος για κάποιο a τέτοιο ώστε $inf\{\pi \cdot x | x \in M\} \leq a \leq sup\{\pi \cdot x' | x' \in K\}$.

□

Αναφορές

[1] C.D.Aliprantis, K.C.Border, *Infinite Dimensional Analysis, A Hitchhiker's Guide* (second edition), Springer(1999)

[2] M.Magill, M.Quinzii, *Theory of Incomplete Markets: Volume 1*, MIT Press (1996)