Πανεπιστήμιο Αιγαίου - Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

Ακαδημαϊκό έτος 2007-8

Μαθηματικό Παράρτημα ΙΙ στο μάθημα "Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά ΙΙ" (ΣΤ' Εξάμηνο)

Διδάσκων: Χ. Κουντζάκης

Ύπαρξη λύσης στα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού που σχετίζονται με την τιμολόγηση συγκυριακών συμβολαίων στο μοντέλο αγοράς δύο περιόδων.

Υποθέτουμε ότι ζούμε σε έναν κόσμο όπου οι συναλλαγές λαμβάνουν χώρα σε δύο χρονικές περιόδους $t = 0, 1$ και το σύνολο των καταστάσεων του κό - σμου είναι το πεπερασμένο σύνολο $\{1, 2, ..., S\}$. Κατά τη χρονική περίοδο 0 οι επενδυτές δεν γνωρίζουν ποια κατάσταση επικρατεί στον κόσμο, ενώ κατά τη χρονική περίοδο 1 αυτή η κατάσταση αποκαλύπτεται. Επίσης υποθέτουμε ότι το σύνολο των (βασικών) χρηματοοικονομικών συμβολαίων της αγοράς είναι το πεπερασμένο σύνολο $\mathbf{J} = \{1, 2, ..., J\}$, οι αποδόσεις των συμβολαίων αυτών κατά την περίοδο 1 δίνονται από τον $S \times J$ πίνακα V και οι τιμές στις οποίες πραγματοποιούνται οι αγορές και οι πωλήσεις των συμβολαίων αυτών κατά την περίοδο 0 δίνονται από το διάνυσμα τιμών $q \in \mathbb{R}^J$. Υποθέτουμε επίσης ότι το σύνολο των χαρτοφυλακίων είναι $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^J$. Ο υπόχωρος αποδόσεων των αξιογράφων της αγοράς κατά τη χρονική περίοδο 1 είναι

$$M = \{y \in \mathbb{R}^S | y = V \cdot z \text{ για κάποιο } z \in \mathbb{R}^J\}.$$

Στο μοντέλο αγοράς δύο περιόδων και στην περίπτωση που ένα συγκυριακό συμβόλαιο $c \in \mathbb{R}^S$ δεν ανήκει στον υπόχωρο αποδόσεων των αξιογράφων -στην περίπτωση που η αγορά δεν είναι πλήρης - τότε το σύνολο των υποψήφιων τιμών που δεν παρέχουν arbitrage είτε για τη short position ως προς το c είτε για την long position ως προς το c, είναι το ανοικτό διάστημα $(\pi_0^b(q, c), \pi_0^s(q, c))$ όπου

$$\pi_0^s(q, c) = inf\{q \cdot z | z \in \mathbb{R}^J : V \cdot z \geq c\},$$

$$\pi_0^b(q, c) = -inf\{q \cdot z | z \in \mathbb{R}^J : V \cdot z \geq -c\}$$

το οποίο στην περίπτωση που ισχύει $\mathbf{1} \in M$, $c \in \mathbb{R}_+^S$ και η τιμή q δεν παρέχει arbitrage, είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}_+$ που δεν περιέχει το 0. Ο πραγματικός αριθμός $\pi_0^s(q,c)$ ονομάζεται **τιμή του πωλητή για το** c και είναι το ελάχιστο κόστος επένδυσης σε ένα χαρτοφυλάκιο που αντισταθμίζει τέλεια την short position ως προς το c. Αντίστοιχα, ο πραγματικός αριθμός $\pi_0^b(q,c)$ ονομάζεται **τιμή του αγοραστή για το** c και είναι το μέγιστο κόστος επένδυσης σε ένα χαρτοφυλάκιο που αντισταθμίζει τέλεια την long position ως προς το c. Αν η τιμή για το c είναι μεγαλύτερη από $\pi_0^s(q,c)$ τότε υπάρχει arbitrage από τη μεριά του πωλητή, ενώ αν η τιμή για το c είναι μικρότερη από $\pi_0^b(q,c)$, τότε υπάρχει arbitrage από τη μεριά του αγοραστή. Επομένως μια τιμή για το c στην οποία θα συμφωνήσουν ο αγοραστής και ο πωλητής και είναι δίκαιη και για τους δύο, δεν μπορεί παρά να ανήκει στο διάστημα $(\pi_0^b(q,c), \pi_0^s(q,c))$. Επίσης παρατηρούμε ότι $\pi_0^b(q,c) = sup\{q \cdot z | z \in \mathbb{R}^J : V \cdot z \leq c\}$.

Παρακάτω θα δείξουμε ότι τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού που σχετίζονται με τον προσδιορισμό είτε του $\pi_0^b(q,c)$, είτε του $\pi_0^s(q,c)$ έχουν λύση υπό τις προϋποθέσεις που αναφέραμε, δηλαδή όταν ισχύει $\mathbf{1} \in M$, $c \in \mathbb{R}_+^S$ και η τιμή q δεν παρέχει arbitrage. Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη, παρατηρούμε ότι τα σύνολα χαρτοφυλακίων $W_c = \{z \in \mathbb{R}^J | V \cdot z \geq c\}, B_c = \{z \in \mathbb{R}^J | V \cdot z \leq c\}$ που αποτελούν τα σύνολα των περιορισμών για τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού που σχετίζονται με τον προσδιορισμό της τιμής του αγοραστή και της τιμής του πωλητή είναι πολυεδρικά σύνολα. Για παράδειγμα, το W_c είναι πολυεδρικό σύνολο διότι είναι η τομή των ημιχώρων $\{z \in \mathbb{R}^J | V_s \cdot z \geq c_s\}$ του $\mathbb{R}^J$, όπου $s = 1, 2, ..., S$. Για τα πολυεδρικά σύνολα σε Ευκλείδειους χώρους, ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1. *(Πεπερασμένης Βάσης) Έστω K πολυεδρικό σύνολο ενός Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$. Τότε το K γράφεται στη μορφή $K = G + C$ όπου G πολύτοπο και C πεπερασμένα παραγόμενο κωνοειδές.*

Ένα πολύτοπο G του $\mathbb{R}^n$ είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ της μορφής

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i,\ \text{όπου}\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \lambda_i \in [0,1], i = 1, 2, ..., k\}.$$

Τα $a_1, a_2, ..., a_k$ ονομάζονται **κορυφές** του G. Το πολύτοπο είναι η γενίκευση της έννοιας του πολυγώνου στο επίπεδο, σε Ευκλειδείους χώρους μεγαλύτερης διάστασης. Κάθε πολύτοπο είναι ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Ένα πεπερασμένα παραγόμενο κωνοειδές είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ της μορφής

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i d_i,\ \text{όπου}\ \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, ..., m\}.$$

Παράδειγμα πεπερασμένα παραγόμενου κωνοειδούς στο επίπεδο είναι το σύνολο $\mathbb{R}^2_+$ το οποίο μπορεί να γραφεί στην παραπάνω μορφή ως εξής $\mathbb{R}^2_+ = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x = x_1 e_1 + x_2 e_2, x_1, x_2 \geq 0\}$.

Επίσης με το άθροισμα $G + C$ στη διατύπωση του Θεωρήματος Πεπερασμένης Βάσης, εννοούμε το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^n | x = g + c, g \in G, c \in C\}$. Το θεώρημα αυτό το χρησιμοποιούμε για να δείξουμε ότι το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού που σχετίζεται με τον προσδιορισμό της τιμής του πωλητή έχει λύση.

Πρόταση 2. *Αν ισχύει* $\mathbf{1} \in M$, $c \in \mathbb{R}^S_+$ *και η τιμή* q *δεν παρέχει arbitrage, τότε το πρόβλημα: Ελαχιστοποίησε* $q \cdot z$ *αν* $z \in \mathbb{R}^J : V \cdot z \geq c$, *έχει λύση.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Πεπερασμένης Βάσης το σύνολο W_c ως πολυεδρικό σύνολο στον $\mathbb{R}^J$ γράφεται στη μορφή $G + C$, όπου G πολύτοπο και C πεπερασμένα παραγόμενο κωνοειδές. Το q παίρνει θετικές τιμές στο W_c διότι $q \cdot z = \pi_1 \cdot (V \cdot z) \geq \pi_1 \cdot c > 0$ για κάθε $\pi_1 \in \mathbb{R}^S_+$ τέτοιο ώστε το $(1, \pi_1) \in \mathbb{R}^{S+1}_{++}$ είναι ορθογώνιο στον υπόχωρο $\langle W \rangle$. Επίσης το q παίρνει θετικές τιμές στο C διότι αν υποθέσουμε ότι λαμβάνει αρνητική τιμή σε κάποιο $k_0 \in C$, δηλαδή $q \cdot k_0 < 0$, τότε επειδή $\lambda k_0 \in C$ για κάθε $\lambda \geq 0$ (έπεται από τον ορισμό του C) θα έχουμε $q \cdot (\lambda k_0) \to -\infty$ για $\lambda \to \infty$ και άρα αν $g \in G$ τότε $q \cdot (g + \lambda k_0) \to -\infty$ αν $\lambda \to \infty$. Τότε όμως επειδή $g + \lambda k_0 \in G + C = W_c$, θα είχαμε ότι το q λαμβάνει αρνητικές τιμές στο W_c, άτοπο. Συνεπώς ισχύει ότι $q \cdot k \geq 0$ για κάθε $k \in C$ και άρα $q \cdot (g + k) \geq q \cdot g$, για κάθε $g \in G$ και για κάθε $k \in C$. Παρατηρούμε όμως ότι επειδή $0 \in C$ ισχύει $G = \{0\} + G \subseteq W_c = C + G$. Συνεπώς, αν το πρόβλημα της τιμής του πωλητή έχει λύση, αυτή θα είναι κάποιο διάνυσμα του G. Όμως το G είναι κλειστό και φραγμένο και η συνάρτηση $z \mapsto q \cdot z$ είναι συνεχής συνάρτηση του $z \in \mathbb{R}^J$, άρα από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, το πρόβλημα αυτό έχει λύση. $\square$

Η ύπαρξη λύσης στο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού για τον προσδιορισμό της τιμής του αγοραστή, μπορεί να αποδειχθεί βάσει της δυϊκής θεωρίας του γραμμικού προγραμματισμού.

Πρόταση 3. *Αν ισχύει* $\mathbf{1} \in M$, $c \in \mathbb{R}^S_+$ *και η τιμή* q *δεν παρέχει arbitrage, ενώ επιπλέον κάθε γραμμή* $V_s, s = 1, 2, ..., S$ *του πίνακα* V *είναι διάνυσμα με θετικές, μη μηδενικές συντεταγμένες, τότε το πρόβλημα: Ελαχιστοποίησε* $q \cdot z$ *αν* $z \in \mathbb{R}^J : V \cdot z \geq -c$ *έχει λύση.*

Απόδειξη. Το παραπάνω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού σε ημικανονική μορφή γράφεται

$$\text{Ελαχιστοποίησε} \quad \begin{bmatrix} q^T & -q^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

υπό τον περιορισμό

$$\begin{bmatrix} V & -V \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \geq -c,$$

όπου $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^J_+$.

(Ο πίνακας $\begin{bmatrix} V & -V \end{bmatrix}$ είναι ο $S \times 2J$ πίνακας του οποίου οι J πρώτες στήλες είναι οι στήλες του πίνακα V και οι J επόμενες είναι οι αντίθετες των στηλών του V με την ίδια σειρά).

Η ημικανονική μορφή του δυϊκού του παραπάνω προβλήματος είναι

$$\text{Μεγιστοποίησε} \quad -c^T \cdot \xi$$

υπό τον περιορισμό

$$\begin{bmatrix} V^T \\ -V^T \end{bmatrix} \cdot \xi \leq \begin{bmatrix} q \\ -q \end{bmatrix},$$

όπου $\xi \in \mathbb{R}^S_+$. Ο πίνακας $\begin{bmatrix} V^T \\ -V^T \end{bmatrix}$ είναι ο $2J \times S$ πίνακας ο οποίος είναι ο ανάστροφος του πίνακα $\begin{bmatrix} V & -V \end{bmatrix}$. Επίσης ο πίνακας $\begin{bmatrix} q \\ -q \end{bmatrix}$ είναι ο $2J \times 1$ πίνακας στήλη του οποίου τα J πρώτα στοιχεία είναι οι συντεταγμένες του q και τα υπόλοιπα J στοιχεία είναι οι συντεταγμένες του q με αντίθετο πρόσημο.

Το παραπάνω δυϊκό πρόβλημα σε ημικανονική μορφή διατυπώνεται ισοδύναμα:

$$\text{Μεγιστοποίησε} \quad -c^T \cdot \xi$$

υπό τον περιορισμό

$$V^T \cdot \xi = q,$$

όπου $\xi \in \mathbb{R}^S_+$.

Το σύνολο των περιορισμών για το πρόβλημα αυτό είναι δηλαδή το σύνολο $\{\xi \in \mathbb{R}^S_+ | q^T = \xi^T V\}$, όπου το q^T είναι το διάνυσμα τιμών q ως ένας πίνακας - γραμμή και το $\xi \in \mathbb{R}^S_+$ επίσης θεωρούμενο ως πίνακας - γραμμή. Το σύνολο αυτό είναι μη κενό διότι κάθε διάνυσμα $\pi_1 \in \mathbb{R}^S_{++}$ τέτοιο ώστε το $(1, \pi_1) \in \mathbb{R}^{S+1}_{++}$

να είναι ορθογώνιο στον υπόχωρο $\langle W\rangle$ ανήκει στο σύνολο αυτό. Το σύνολο των περιορισμών του προβλήματος αυτού είναι φραγμένο διότι αν το ξ είναι ένα στοιχείο του, τότε ισχύει $q_j = \sum_{s=1}^{S}\xi_s V_s^j \geq \xi_s min\{V_s^j, s=1,2,...,S\}$ για κάθε $j=1,2,...,J$. Επομένως επειδή $min\{V_s^j, s=1,2,...,S\} > 0$ για κάθε j, είναι

$$0 \leq \xi_s \leq \frac{q_j}{min\{V_s^j, s=1,2,...,S\}}$$
$$\leq max\{\frac{q_j}{min\{V_s^j, s=1,2,...,S\}}, j=1,2....,J\}.$$

Επίσης το σύνολο των περιορισμών είναι κλειστό, διότι για κάθε ακολουθία $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του για την οποία ισχύει $\xi_n \to \xi$, έπεται ότι $\xi \in \mathbb{R}_+^S$ και επειδή ισχύει $q = \xi_n \cdot V$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει και $q = \xi \cdot V$. Άρα το σύνολο των περιορισμών του δυϊκού προβλήματος είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^S$ και επομένως επειδή η συνάρτηση $\xi \mapsto -c\cdot\xi$ είναι συνεχής συνάρτηση του ξ από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, λαμβάνει μέγιστο σε αυτό.

Άρα επειδή το δυϊκό του αρχικού προβλήματος έχει λύση, έπεται ότι και το αρχικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού που σχετίζεται με τον προσδιορισμό της τιμής του αγοραστή, έχει επίσης λύση και μάλιστα η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι η ίδια και για τα δύο προβλήματα.

□

Αναφορές

[1] C.D.Aliprantis, K.C.Border, *Infinite Dimensional Analysis, A Hitchhiker's Guide* (second edition), Springer (1999)

[2] St.Le Roy, J.Werner, *Principles of Financial Economics*, Cambridge University Press (2001)

[3] M.Magill, M.Quinzii, *Theory of Incomplete Markets: Volume 1*, MIT Press (1996)

[4] M.Musiela, M.Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer (1998)

[5] I.A.Polyrakis, *Linear optimization in $C(\Omega)$ and portfolio insurance*, Optimization **52** (2003), 221-239

[6] R.Webster, *Convexity*, Oxford University Press (1994)