

ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Ε' ΕΞΑΜΗΝΟ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Διδάσκων: Χ. Κουντζάκης

Άσκηση 1 Μετοχή με σημερινή τιμή $S_0 = 200$, αύριο ενδέχεται να έχει αξία είτε $S_T(u) = 220$, είτε αξία $S_T = 125$. Επενδυτής σχηματίζει χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από τη long θέση στα εξής αξιόγραφα: σε ένα μερίδιο της μετοχής, σε ένα call-option επί της μετοχής με τιμή εξάσκησης αύριο ίση με $k = 170$, και ένα forward επί της μετοχής με τιμή παράδοσης αύριο ίση με $k_1 = 200$.

1. Να βρεθεί η αξία του χαρτοφυλακίου στη λήξη (αύριο).
2. Χρησιμοποιώντας έναν τραπεζικό λογαριασμό επιτοκίου $r = 0.1$ για κάθε χρονική περίοδο και φτιάχνοντας ένα χαρτοφυλάκιο από μετοχή και δανεισμό, βρείτε πώς μπορεί να αντισταθμιστεί το χαρτοφυλάκιο του επενδυτή.
3. Προσδιορίστε τη (μοναδική) non-arbitrage τιμή του χαρτοφυλακίου του επενδυτή.
4. Ποιο το αποτελεσματικό μέτρο ανόδου της μετοχής και πώς μπορεί να υπολογιστεί διαφορετικά η τιμή του C ;

Λύση:

1. Η αυριανή αξία της μετοχής δίνεται από την τυχαία μεταβλητή S_T που μπορεί να παρασταθεί με το διάνυσμα $(220, 125)$. Η τυχαία μεταβλητή απόδοσης του call-option μπορεί να παρασταθεί με το διάνυσμα $(S_T - k)^+ = (50, 0)$. Παρομοίως η τυχαία μεταβλητή απόδοσης του forward μπορεί να παρασταθεί με το διάνυσμα $S_T - k_1 = (20, -75)$. Άρα το διάνυσμα-τυχαία μεταβλητή που δίνει την απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι το $C = (290, 50)$. Το τελευταίο διάνυσμα είναι παράδειγμα ενός συγκυριακού συμβολαίου.
2. Έστω (a, b) το ζητούμενο χαρτοφυλάκιο, όπου a είναι τα μερίδια της μετοχής και b το ποσό των δανειζόμενων χρημάτων. Τότε ισχύει ότι

$$220a + 1.1b = 290, 125a + 1.1b = 50.$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό έχουμε ότι

$$a = \frac{290 - 50}{220 - 125} = \frac{240}{95}, b = \frac{50 \cdot 220 - 290 \cdot 125}{1.1 \cdot 95} = \frac{-50500}{209}.$$

3. Ισχυρίζομαι ότι η μοναδική τιμή που δεν παρέχει ευκαιρίες arbitrage για το C είναι η $x = a \cdot 200 + b = \frac{2900}{11}$. Ας δούμε πώς μπορεί να κάνει arbitrage ο επενδυτής όταν για την τιμή p του C είναι $p > x$. Ο επενδυτής πουλά σήμερα short το C στην τιμή p και αγοράζει το χαρτοφυλάκιο που αντισταθμίζει το C στην τιμή x . Έτσι κέρδισε $p - x > 0$. Αύριο απλώς κλείνει τη short θέση του στο C με το χαρτοφυλάκιο που αντισταθμίζει το C . Αν τώρα $x > p$, τότε ο επενδυτής αγοράζει το C στην τιμή p και πουλά short σήμερα το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης του C στην τιμή x . Άρα κερδίζει $x - p > 0$. Αύριο κλείνει τη short θέση του στο χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης του C χρησιμοποιώντας το C . Άρα η μοναδική τιμή που δεν παρέχει ευκαιρίες arbitrage είναι η x .

4. Είναι $p = \frac{(1.1) \cdot 200 - 125}{220 - 125} = 1, 1 - p = \frac{220 - 1.1 \cdot 200}{220 - 125} = 0$. $x = a \cdot S_0 + b = \frac{1}{1.1} C(u) = 290 \cdot \frac{10}{11} = \frac{2900}{11}$.

Άσκηση 2 Με τα δεδομένα της προηγούμενης άσκησης σας δίνουν ένα call-option επί της μετοχής με τιμή εξάσκησης αύριο ίση με $k_1 = 140$ που κοστίζει σήμερα $p_1 = 60$ και ένα put-option επί της μετοχής που κοστίζει σήμερα $p_2 = 20$ και έχει τιμή εξάσκησης αύριο $k_2 = 195$. Να φτιάξετε ένα χαρτοφυλάκιο που να περιλαμβάνει τα δύο αυτά παράγωγα και να κάνετε arbitrage.

Λύση: Τα διανύσματα-τυχαίες μεταβλητές απόδοσης των αντίστοιχων παραγώγων είναι $(S_T - k_1 \mathbf{1})^+ = (80, 0)$ και $(k_2 \mathbf{1} - S_T)^+ = (0, 70)$. Με τον τρόπο που υποδείξαμε στην προηγούμενη άσκηση, τα χαρτοφυλάκια αντιστάθμισης των παραγώγων αυτών αποτελούμενα από μερίδια μετοχής και δανεισμό είναι $(a_1, b_1) = (\frac{16}{19}, -95.6938)$ για το δικαίωμα αγοράς και $(a_2, b_2) = (\frac{14}{19}, -83.7321)$ για το δικαίωμα πώλησης. Άρα οι αντίστοιχες non-arbitrage τιμές είναι $x_1 = 72.7273$ για το δικαίωμα αγοράς και $x_2 = 63.6364$ για το δικαίωμα πώλησης. Αφού για τις τιμές p_1, p_2 είναι $x_1 < p_1, x_2 < p_2$, τότε μπορούμε να κάνουμε arbitrage ως εξής: Η τιμή του χαρτοφυλακίου που περιλαμβάνει τη long θέση στο call και τη long στο put παράγωγα είναι $p_1 + p_2 = 80$. Το χαρτοφυλάκιο έχει απόδοση $(80, 70)$ άρα το χαρτοφυλάκιο από μετοχή και δανεισμό που το αντισταθμίζει είναι $(a_3, b_3) = (\frac{150}{95}, -243.062)$. Άρα η non-arbitrage τιμή του χαρτοφυλακίου παραγώγων είναι $x_3 = 200a_3 + b_3 = 72.7275$. Άρα $p_3 > x_3$ συνεπώς σήμερα πουλάμε short το χαρτοφυλάκιο παραγώγων και αγοράζουμε το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης αυτού. Έτσι κερδίζουμε το ποσό $p_3 - x_3 > 0$. Αύριο κλείνουμε την ανοικτή μας θέση στο χαρτοφυλάκιο των παραγώγων με το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισής του.