ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
Ε′ ΕΞΑΜΗΝΟ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Διδάσκων: Χ. Κουντζάκης

Άσκηση 1 *Μετοχή με σημερινή τιμή $S_0 = 100$, εξελίσσεται σύμφωνα με διωνυμικό μοντέλο δύο περιόδων με συντελεστή ανόδου $u = 1.2$ και καθόδου $d = 0.8$.*

1. *Να βρεθεί η αξία της μετοχής στη λήξη.*
2. *Χρησιμοποιώντας έναν τραπεζικό λογαριασμό επιτοκίου $r = 0.1$ για κάθε χρονική περίοδο και φτιάχνοντας ένα χαρτοφυλάκιο από μετοχή και δανεισμό, βρείτε πώς μπορεί να αντισταθμιστεί δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης στη λήξη $k = 70$.*
3. *Προσδιορίστε τη (μοναδική) non-arbitrage τιμή του δικαιώματος.*

Λύση:

1. Είναι $S_T = (S_0uu, S_0ud, S_0du, S_0dd) = 144, 96, 96, 64)$.
2. Η απόδοση του δικαιώματος αγοράς στη λήξη είναι $(S_T - k\mathbf{1})^+ = (74, 26, 26, 0)$. Τη χρονική στιγμή $t = 1$ αν βρεθούμε σε άνοδο, επιλέγουμε το χαρτοφυλάκιο (a_u, b_u) για το οποίο πρέπει να ισχύει $144a_u + 1.1b_u = 74, 96a_u + 1.1b_u = 26$. Δηλαδή $(a_u, b_u) = (1, -\frac{70}{1.1})$. Αν βρεθούμε σε πτώση της μετοχής, επιλέγουμε το χαρτοφυλάκιο (a_d, b_d) για το οποίο πρέπει να ισχύει $96a_d + 1.1b_d = 26, 64a_d + 1.1b_d = 0$. Δηλαδή $(a_d, b_d) = (\frac{13}{16}, -\frac{52}{1.1})$.
3. Ο επενδυτής αγοράζει το χαρτοφυλάκιο (a_0, b_0) τη χρονική στιγμή $t = 0$ στην τιμή $100a_0 + b_0$. Το χαρτοφυλάκιο αυτό έχει απόδοση $120a_0 + 1.1b_0$ αν συμβεί άνοδος της μετοχής και $80a_0 + 1.1b_0$ αν συμβεί κάθοδος της μετοχής. Στην πρώτη περίπτωση πρέπει να ισχύει $120a_0 + 1.1b_0 = 120a_u + b_u = 120 - \frac{70}{1.1} \cong 56.3636$ και στη δεύτερη $80a_0 + 1.1b_0 = 80 \cdot 1316 - \frac{52}{1.1} \cong 17.7273$, δηλαδή το χαρτοφυλάκιο ως στοχαστική διαδικασία είναι αυτοχρηματοδοτούμενο που σημαίνει ότι όσα χρήματα κερδίζει ο επενδυτής σε έναν κόμβο του διωνυμικού δένδρου από την επένδυση στο προηγούμενο χαρτοφυλάκιο, τα επενδύει στο να αγοράσει το τρέχον χαρτοφυλάκιο στον κόμβο αυτόν.
4. Το αρχικό χαρτοφυλάκιο είναι $(a_0, b_0) = (0.965907, -54.1321)$. Η τιμή του δικαιώματος είναι $100a_0 + b_0 = 96.5907 - 54.1321 = 42.4586$.

Άσκηση 2 *Μετοχή με σημερινή τιμή $S_0 = 200$, εξελίσσεται σύμφωνα με μοντέλο μίας περιόδου που αποτελείται από τρεις καταστάσεις του κόσμου $\Omega = (u, m, d)$ και αξία αύριο $S_T = (240, 225, 180)$. Θεωρούμε επίσης έναν τραπεζικό λογαριασμό επιτοκίου $r = 0.1$ για κάθε χρονική περίοδο. Έστω δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης αύριο $k = 225$ και φτιάχνουμε χαρτοφυλάκιο με δύο μερίδια μετοχής και μια θέση ανοικτής πώλησης του δικαιώματος.*

1. *Να βρεθεί η αξία του χαρτοφυλακίου στη λήξη.*
2. *Διαπιστώστε ότι χρησιμοποιώντας και φτιάχνοντας ένα χαρτοφυλάκιο από μετοχή και δανεισμό, το χαρτοφυλάκιο δεν μπορεί να αντισταθμιστεί.*
3. *Χρησιμοποιώντας και φτιάχνοντας ένα χαρτοφυλάκιο από μετοχή και δανεισμό, βρείτε πώς μπορεί να υπεραντισταθμιστεί το χαρτοφυλάκιο αυτό από την πλευρά του αγοραστή και του πωλητή του.*
4. *Προσδιορίστε το σύνολο των non-arbitrage τιμών του δικαιώματος.*

Λύση:

1. Είναι $C = 2S_T - (S_T - k\mathbf{1})^+ = (480, 450, 360) - (15, 0, 0) = (465, 450, 360)$.

2. Ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο πρέπει να είναι λύση του συστήματος

$$240a + 1.1b = 465, 225a + 1.1b = 450, 180a + 1.1b = 360.$$

Τέτοιο χαρτοφυλάκιο (a, b) δεν υπάρχει, διότι αν λύσουμε ένα υποσύστημα 2×2 από αυτά, η λύση του δεν ικανοποιεί την τρίτη εξίσωση. Για παράδειγμα να επιλέξουμε τις δύο πρώτες εξισώσεις, η λύση είναι $(1, 204.545)$ η οποία δεν ικανοποιεί την τρίτη εξίσωση. Ομοίως εργαζόμαστε και στις άλλες περιπτώσεις.

3. Λύνεται το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού Ελαχιστοποίησε $200a + b$ όταν

$$240a + 1.1b \geq 465, 225a + 1.1b \geq 450, 180a + 1.1b \geq 360,$$

για να βρεθεί το ελάχιστο κόστος υπερ-αντιστάθμισης από τη μεριά του πωλητή. Λύνεται το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού Ελαχιστοποίησε $200a + b$ όταν

$$240a + 1.1b \geq -465, 225a + 1.1b \geq -450, 180a + 1.1b \geq -360,$$

και το αντίθετο αυτής της βέλτιστης τιμής προσδιορίζει το ελάχιστο κόστος υπερ-αντιστάθμισης από τη μεριά του αγοραστή του χαρτοφυλακίου. Η βέλτιστη τιμή για το πρώτο πρόβλημα είναι 400 και επιτυγχάνεται για το χαρτοφυλάκιο υπερ-αντιστάθμισης $(2, 0)$. Η βέλτιστη τιμή για το δεύτερο πρόβλημα είναι -309.909 και επιτυγχάνεται για το χαρτοφυλάκιο υπερ-αντιστάθμισης $(-1.75, -40.9091)$.

4. Όλοι οι πραγματικοί αριθμοί μεταξύ του κόστους αντιστάθμισης του αγοραστή και του κόστος αντιστάθμισης του πωλητή είναι τιμές non-arbitrage. Δηλαδή κάθε τιμή $\pi \in (309.909, 400)$ δεν εξασφαλίζει arbitrage ούτε από τη μεριά του αγοραστή του χαρτοφυλακίου C, ούτε από τη μεριά του πωλητή του C. Αυτό διότι στη λήξη ο πωλητής του C αν είχε επενδύσει σε ένα χαρτοφυλάκιο υπερ-αντιστάθμισης για να προστατευθεί από τυχόν απώλειες, αυτό το χαρτοφυλάκιο μαζί με το C θα έχει θετική απόδοση σε κάθε περίπτωση. Αλλά το κόστος ενός χαρτοφυλακίου αυτού είναι σε κάθε πρίπτωση μεγαλύτερο άπό τη βέλτιστη τιμή του προβλήματος γ.π. που αντιστοιχεί στον πωλητή και άρα μεγαλύτερο και από την τιμή του C. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή του τελικού χαρτοφυλακίου που αποτελείται από τη long θέση σε ένα χαρτοφυλάκιο υπερ-αντιστάθμισης της short θέσης του C και στη short θέση του C έχει θετική τιμή, άρα δεν έχουμε arbitrage. Παρομοίως για τον αγοραστή του χαρτοφυλακίου, η τιμή του χαρτοφυλακίου είναι μεγαλύτερη από τη βέλτιστη τιμή του αντίστοιχου γ.π. του αγοραστή του χαρτοφυλακίου που είναι μεγαλύτερη από τα κόστη των χαρτοφυλακίων υπερ-αντιστάθμισης του C. Άρα ούτε στην περίπτωση αυτή έχουμε arbitrage διότι η τιμή του τελικού χαρτοφυλακίου είναι θετική.