ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Ε΄ ΕΞΑΜΗΝΟ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Διδάσκων: Χ. Κουντζάκης

Άσκηση 1 *Μετοχή με σημερινή τιμή $S_0 = 200$, εξελίσσεται σύμφωνα με μοντέλο μίας περιόδου που αποτελείται από τρεις καταστάσεις του κόσμου $\Omega = (u, m, d)$ και αξία αύριο $S_T = (240, 225, 180)$. Θεωρούμε επίσης έναν τραπεζικό λογαριασμό επιτοκίου $r = 0.1$ για κάθε χρονική περίοδο. Έστω δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης αύριο $k = 225$ και φτιάχνουμε χαρτοφυλάκιο με δύο μερίδια μετοχής και μια θέση ανοικτής πώλησης του δικαιώματος.*

1. *Να βρεθούν τα risk-neutral μετρα πιθανότητας για την αγορά που αποτελείται από τη μετοχή και τον τραπεζικό λογαριασμό.*
2. *Προσδιορίστε το σύνολο των non-arbitrage τιμών του χαρτοφυλακίου με τη βοήθεια των μέτρων αυτών και διαπιστώστε ότι συμπίπτει με το σύνολο που βρήκατε με τη μέθοδο της υπερ-αντιστάθμισης.*

Λύση:

1. Έστω (p_1, p_2, p_3) ένα τέτοιο διάνυσμα πιθανοτήτων. Για να είναι risk-neutral μέτρο πιθανότητας, πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1,$$
$$1.1p_1 + 1.1p_2 + 1.1p_3 = 1.1,$$
$$240\cdot_1 + 225\cdot_2 + 180 \cdot p_3 = 200 \cdot 1.1 = 220,$$
$$p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0.$$

Άρα το γραμμικό σύστημα που δίνει τις risk -neutral πιθανότητες είναι

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1,$$
$$240 \cdot p_1 + 225 \cdot p_2 + 180 \cdot p_3 = 220,$$
$$p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0.$$

Θέτοντας $p_1 = u, p_2 = v, p_3 = t$, οι λύσεις του συστήματος θα βρεθούν ως εξής. Προκύπτει το σύστημα

$$240u + 225v = 220 - 180t,$$
$$u + v = 1 - t.$$

Λύνοντας έχουμε $\frac{-5+45t}{15}, v = \frac{20-60t}{15}$, αλλά τότε αυτό σημαίνει ότι $0 < \frac{-5+45tt}{15} < 1$, $0 < \frac{20-60t}{15} < 1$ και τέλος προφανώς $0 < t < 1$. Η πρώτη ανισότητα συνεπάγεται $\frac{1}{9} < t < \frac{4}{9}$. Η δεύτερη, συνεπάγεται $\frac{1}{12} < t < \frac{1}{3}$. Οι ανισότητες αυτές συναληθεύουν στο $(\frac{1}{9}, \frac{1}{3})$. Επομένως τα risk neutral μέτρα της αγοράς είναι τα διανύσματα

$$(\frac{45t-5}{15}, \frac{20-60t}{15}, t), t \in (\frac{1}{9}, \frac{1}{3}).$$

Παρατηρώ ότι αν έχω το χαρτοφυλάκιο $C = (465, 450, 360)$, τότε

$$\frac{1}{1.1}\mathbb{E}_p(C) = \frac{6675 - 675t}{16.5}.$$

Η ελάχιστη τιμή έπιτυγχάνεται για $t = \frac{1}{3}$ και είναι ίση με 309.909 που είναι ίση με την τιμή του αγοραστή όπως αναμέναμε, ενώ η τιμή του πωλητή επιτυγχάνεται για $t = \frac{1}{9}$ και είναι ίση με 400. Όλες οι non-arbitrage τιμές είναι στο ανοικτό διάστημα

$$(\inf\{\frac{1}{1.1}\mathbb{E}_p(C)|p \in M\}, \sup\{\{\frac{1}{1.1}\mathbb{E}_p(C)|p \in M\}),$$

όπου $M =(\frac{45t-5}{15}, \frac{20-60t}{15}, t), t \in (\frac{1}{9}, \frac{1}{3})$ είναι το σύνολο των risk-neutral μέτρων.