

ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Ε' ΕΞΑΜΗΝΟ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Διδάσκων: Χ. Κουντζάκης

Άσκηση 1 Βάσει του CRR μοντέλου, να παραχθεί το διωνυμικό δένδρο δύο περιόδων για μετοχή με $S_0 = 100$ ευρώ, αν το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο του τραπεζικού λογαριασμού είναι $r = 10$ τοις εκατό και η πτητικότητα της μετοχής είναι $\sigma = 0.8$ (ετησίως). Έπειτα βρείτε την τυχαία μεταβλητή απόδοσης του δικαιώματος αγοράς επί της μετοχής με τιμή εξάσκησης $k = 50$ ευρώ στη λήξη. Ποια είναι η τιμή του δικαιώματος σήμερα ;

Η ίδια άσκηση μπορεί να διατυπωθεί ως εξής

Άσκηση 2 Έστω μετοχή με $S_0 = 100$ ευρώ, το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο του τραπεζικού λογαριασμού είναι $r = 10$ τοις εκατό και η πτητικότητα της μετοχής είναι $\sigma = 0.8$ (ετησίως). Ποια είναι κατά προσέγγιση η τιμή του δικαιώματος αγοράς επί της μετοχής με τιμή εξάσκησης $k = 50$ ευρώ στη λήξη του έτους ;

Λύση Είναι $u = e^{0.8\sqrt{\frac{1}{2}}} \cong 1 + 0.8\sqrt{\frac{1}{2}} + 0.64\frac{1}{4} = 1.7257$ και $d = e^{-0.8\sqrt{\frac{1}{2}}} \cong 1 - 0.8\sqrt{\frac{1}{2}} + 0.64\frac{1}{4} = 0.5943$. Έχουμε ότι η risk-neutral πιθανότητα ανόδου είναι $p = \frac{1+0.05-0.5943}{1.7257-0.5943} = \frac{0.4557}{1.1314} = 0.4028$. Η πιθανότητα καθόδου είναι $1 - p = 0.5972$. Το διωνυμικό δένδρο είναι $\{S_0, S_0u, S_0d, S_0uu, S_0ud, S_0du, S_0dd\}$. Δηλαδή

$$\{100, 172.57, 59.43, 297.804049, 102.558351, 102.558351, 35.319249\}.$$

Η τυχαία μεταβλητή που υποδεικνύει την αξία της μετοχής στη λήξη είναι

$$S_T = (297.804049, 102.558351, 102.558351, 35.319249).$$

Η τυχαία μεταβλητή της απόδοσης του δικαιώματος είναι $(S_T - 50)^+ = (247.804049, 52.558351, 52.558351, 0)$. Για να βρεθεί η αξία του δικαιώματος στην αρχή του έτους, πρέπει να κατασκευάσουμε ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισής του από μετοχή και δανεισμό. Έστω (a_0, b_0) , (a_u, b_u) , (a_d, b_d) τα αντίστοιχα επιμέρους χαρτοφυλάκια αν βρεθούμε στους αντίστοιχους κόμβους του διωνυμικού δένδρου. Οι σχέσεις που πρέπει να ικανοποιούνται είναι

$$297.804049a_u + 1.05b_u = 247.804049, 102.558351a_u + 1.05b_u = 52.558351,$$

$$102.558351a_d + 1.05b_d = 52.558351, 35.319249a_d + 1.05b_d = 0,$$

$$172.57a_0 + 1.05b_0 = 172.57a_u + b_u, 59.43a_0 + 1.05b_0 = 59.43a_d + b_d.$$

Είναι $a_u = 1, b_u = -47.619, a_d = 0.781663, b_d = -1$. Άρα έχουμε ότι

$$172.57a_0 + 1.05b_0 = 124.951, 59.43a_0 + 1.05b_0 = 45.4543.$$

Επομένως, $a_0 = 0.70264, b_0 = 5.01$. Άρα η τιμή του δικαιώματος είναι $100a_0 + b_0 = 70.264 + 5.01 = 75.274$.