ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
Ε′ ΕΞΑΜΗΝΟ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Διδάσκων: Χ. Κουντζάκης

Άσκηση 1 *Αν υποθέσουμε ότι ο αρχικός σας πλούτος είναι 500 ευρώ, ενώ αύριο τα έσοδά σας θα είναι 220 ευρώ, ενώ το επιτόκιο μεταξύ των δύο χρονικών περιόδων είναι $r = 0.1$. Αν υποθέσουμε ότι καταρτίζουμε ένα πρόγραμμα για το τι θα καταναλώσουμε σήμερα και αύριο, υπολογίζοντας σε κάθε περίπτωση τη σημερινή παρούσα αξία, ποιες είναι οι εφικτές επιλογές κατανάλωσης ; Αν το σημερινό διαθέσιμο ποσό αποταμιεύεται για αύριο, ποιες είναι τότε οι εφικτές επιλογές κατανάλωσης ;*

Λύση
Το πρόγραμμα κατανάλωσης έχει τη μορφή (x_0, x_1) όπου x_0 η σημερινή και x_1 η αυριανή κατανάλωση. Είναι $0 \leq x_0 \leq 500$ και $0 \leq \frac{220}{1.1} = 200$. Επίσης αν θεωρήσουμε ότι το διαθέσιμο ποσό αποταμιεύεται τότε αύριο θα έχουμε $500 \cdot 1.1 = 550$ ευρώ και επιπλέον 220 ευρώ σύνολο 770 ευρώ διαθέσιμα. Άρα οι εφικτές επιλογές κατανάλωσης είναι $0 \leq x_1 \leq 770$.

Άσκηση 2 *Στην προηγούμενη άσκηση να βρεθεί ποιο πρόγραμμα κατανάλωσης μεγιστοποιεί την συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x_0, x_1) = \sqrt{x_0} + \frac{1}{2}x_1^2$.*

Λύση Η πιο πάνω συνάρτηση ωφελιμότητας είναι διαχωρίσιμη ως προς το χρόνο και αύξουσα ως προς την κατανάλωση κάθε χρονικής περιόδου. Άρα μεγιστοποιείται στο συνδυασμό $(500, 200)$, δηλαδή τέτοιες συναρτήσεις χαρακτηρίζουν ′γενναιόδωρους ′ καταναλωτές.

Άσκηση 3 *Επενδυτής μπορεί να επενδύσει κεφάλαιο από 0 μέχρι x. Αν το κεφάλαιο y που έχει επενδυθεί ενδέχεται να αποτελέσει σίγουρο εισόδημα ή να χαθεί για τον επενδυτή με πιθανότητα p ή $1 - p$, πόσο πρέπει να επενδύσει ένας επενδυτής με $u(x) = logx$;*

Λύση Ας υποθέσουμε ότι η ποσότητα που επενδύεται είναι $ax, 0 \leq a \leq 1$. Τότε ο πλούτος του επενδυτή είναι η τυχαία μεταβλητή με αποτελέσματα είτε $x + ax$, είτε $x - ax$ με πιθανότητες p και $1 - p$ αντίστοιχα. Η αναμενόμενη ωφελιμότητα του επενδυτή θα είναι

$$plog((1 + a)x) + (1 - p)log((1 - a)x).$$

Η αναμενόμενη ωφελιμότητα είναι με τη σειρά της ίση με

$$logx + plog(1 + a) + (1 - p)log(1 - a).$$

Για να βρούμε το βέλτιστο a βρίσκουμε την παράγωγο ως προς a που είναι $\frac{p}{1+a} - \frac{1-p}{1-a}$. Το $2p - 1$ είναι θέση ολικού μεγίστου.

Άσκηση 4 *Επενδυτής μπορεί να επενδύσει κεφάλαιο x. Αν το κεφάλαιο y που έχει επενδυθεί είναι κλάσμα του x και ενδέχεται να αποτελέσει σίγουρο εισόδημα ή να χαθεί για τον επενδυτή με πιθανότητα p ή $1 - p$, ποιο είναι το βέλτιστο κεφάλαιο που πρέπει να επενδύσει ένας επενδυτής με $u(x) = x - bx^2$;*

Λύση Ας υποθέσουμε ότι η ποσότητα που επενδύεται είναι $ax, 0 \leq a \leq 1$ για δεδομένο a. Τότε ο πλούτος του επενδυτή είναι η τυχαία μεταβλητή με αποτελέσματα είτε $x + ax$, είτε $x - ax$ με πιθανότητες p και $1 - p$ αντίστοιχα. Η αναμενόμενη ωφελιμότητα του επενδυτή θα είναι

$$p[(1 + a)x - b((1 + a)x)^2] + (1 - p)[(1 - a)x - b((1 - a)x)^2].$$

Η αναμενόμενη ωφελιμότητα είναι με τη σειρά της ίση με

$$f(x) = x + 2apx - ax - 2bpx^2 - 4apbx^2 - bx^2 + 2a^2x^2 - ba^2x^2.$$

Η παράγωγος ως προς το κεφάλαιο είναι

$$f'(x) = 2x(2a^2 - b^2a^2 + 2pb - 4apb - b) + (1 - 2ap - a).$$

Άρα το κεφάλαιο $x = \frac{a-2ap-1}{2\cdot(2a^2-b^2a^2+2pb-4apb-b)}$ είναι θέση ολικού μεγίστου.

Άσκηση 5 *Επενδυτής με αρχικό πλούτο $w = 100$ που έχει συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = x - x^2$ και ατομικό μέτρο πιθανότητας $p = \frac{1}{4}, 1 - p = \frac{3}{4}$ σχετικά με τα ενδεχόμενα ανόδου και πτώσης μετοχής με αρχική αξία $S_0 = 100$ και συντελεστή ανόδου $u = 1.1$ και καθόδου $d = 0.8$, σκέπτεται να μοιράσει τον πλούτο του μεταξύ ενός δικαιώματος αγοράς επί της μετοχής με τιμή εξάσκησης αύριο $k = 60$ και του τραπεζικού λογαριασμού, που έχει επιτόκιο $r = 0.1$. Βρείτε το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο.*

Λύση Η αξία της μετοχής στη λήξη δίνεται από την τυχαία μεταβλητή $S_T = (110, 80)$, όπου το διάνυσμα αντιστοιχεί στα δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου. Το δικαίωμα έχει αντίστοιχα αξία στη λήξη $C = (50, 30)$. Αντίστοιχα αν τοποθετήσω τα χρήματά μου στον τραπεζικό λογαριασμό, θα πάρω $(110, 110)$ σε οποιαδήποτε περίπτωση. Αν υποτεθεί ότι $(a, 1-a)$ είναι το χαρτοφυλάκιό μας -όπου a το ποσοστό που επενδύεται στον τραπεζικό λογαριασμό τότε η απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι η τυχαία μεταβλητή $a(110, 110) + (1 - a)(50, 30) = (60a + 50, 80a + 30)$. Η αναμενόμενη ωφελιμότητα είναι ίση με $\frac{1}{4}[(60a+150) - (60a+150)^2] + \frac{3}{4}[(80a+30) - (80a+30)^2]$. Για να βρούμε το άριστο επίπεδο επένδυσης στον τραπεζικό λογαριασμό, πρέπει να βρούμε το πρόσημο της $f'(a)$.