Ασκήσεις

1] Να βρεθούν οι ανηγμένοι κλιμακωτοί πίνακες των παρακάτω πινάκων:

α) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, β) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

γ) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, δ) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

2] Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις, να εξετασθεί αν ο πίνακας B είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον πίνακα A. Για κάθε περίπτωση, αν ο B είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A, να δείξετε πώς προκύπτει από τον A.

α) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

β) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

γ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 6 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3] Να αποδείξετε ότι αν $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, τότε ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ είναι ο I_2, δηλ. ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4] Σωστό ή λάθος;

α) Αν σε έναν κλιμακωτό πίνακα εφαρμόσουμε ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών, τότε ο πίνακας που προκύπτει είναι κλιμακωτός.

β) Όλα τα ηγετικά 1 σε έναν κλιμακωτό πίνακα πρέπει να εμφανίζονται σε διαφορετικές στήλες.

γ) Αν κάθε στήλη ενός κλιμακωτού πίνακα έχει ηγετικό 1, τότε όλες οι θέσεις του πίνακα που δεν είναι ηγετικά 1 είναι μηδέν.

5] Έστω $A \in M_{m\times n}(k)$ (όπου $k=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Να δείξετε ότι:

$$A=(A^t)^t.$$

6] Έστω $A \in M_n(k)$ (δηλαδή A είναι τετραγωνικός $n\times n$ με στοιχεία στο k). Να αποδειχθεί ότι:

(i) Αν ο A είναι διαγώνιος, τότε ο A είναι συμμετρικός.

(ii) Ο A είναι άνω τριγωνικός, αν και μόνο αν, ο ανάστροφος του A^t είναι κάτω τριγωνικός

7] Ο παρακάτω πίνακας εκφράζει την απόσταση σε χιλιόμετρα μεταξύ των ακόλουθων πόλεων:

Αθήνα (ΑΘ), Κόρινθος (ΚΟ), Κιάτο (ΚΙ), Πάτρα (ΠΑ)

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} \text{ΑΘ} & \text{ΚΟ} & \text{ΚΙ} & \text{ΠΑ} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{ΑΘ} \\ \text{ΚΟ} \\ \text{ΚΙ} \\ \text{ΠΑ} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 83 & 108 & 215 \\ 83 & 0 & 25 & 132 \\ 108 & 25 & 0 & 107 \\ 215 & 132 & 107 & 0 \end{pmatrix}
\end{array} = A$$

Τι ιδιαίτερο χαρακτηριστικό έχει ο παραπάνω τετραγωνικός 4×4 πίνακας;