ΜΑΘΗΜΑ: “Εισαγωγή στον Προγραμματισμό"

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ 7: Επανάληψη

Άσκηση 1 (Ντζούφρας & Καρλής (2016), σελ. 308). Έστω τα διανύσματα x<-c(3,2,8,6,-1,-2,-5), y<-c(-4,3,5,3,2,7,6). Ποια θα είναι τα αποτελέσματα των παρακάτω πράξεων:

(i). x[y>0]
(ii). rbind(x,y)
(iii). x[-(y>0)]
(iv). x^2+y[1]/10 – 2
(v). matrix(c(x,y),2,8,byrow=T)
(vi). dim(cbind(x))[1]*length(y)
(vii). sum(x<y)
(viii). t<-(x>0)*(y<0);x[-t]

<u>Παρατήρηση:</u> Κάθε πράξη είναι ανεξάρτητη από τις προηγούμενες, δηλαδή δεν χρησιμοποιεί τα αποτελέσματα από τυχόν προηγούμενες πράξεις/εντολές.

Άσκηση 2 (Ντζουφρας & Καρλής (2016), σελ. 310). Να δώσετε τις εντολές (με σύντομη περιγραφή) για την κατασκευή μιας λίστας που θα περιέχει:

(α) ένα διάνυσμα με τους φυσικούς αριθμούς από το 1 εως το 1000.

(β) Τον πίνακα $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(γ) Το παρακάτω data frame

AA	Age	Weight
1	21	70
2	23	65
3	27	66
4	20	78

(δ) Δώστε τις εντολές εισαγωγής ενός τρισδιάστατου πίνακα (διάστασης $3 \times 2 \times 2$) στην παραπάνω λίστα με στοιχεία $B[\,,\ ,1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ και $B[\,,\ ,2] = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 20 \\ 1 & 30 \end{bmatrix}$

Άσκηση 3 (Ντζουφρας & Καρλής (2016), σελ. 317). Να γράψετε εντολές οι οποίες:

(i). Για δοθέν ακέραιο αριθμό x να βρίσκουν όλους τους ακεραίους που τον διαιρούν ακριβώς. Εφαρμογή για x = 6, 9, 14, 20 (ii). Για κάθε ζεύγος αριθμών x και y να βρίσκουν το μέγιστο κοινό διαιρέτη. Εφαρμογή για (x, y) = (8, 12), (5, 30), (16, 40)

(iii). Να εξετάζουν αν ο αριθμός είναι πρώτος. Πρώτος είναι κάθε ακέραιος αριθμός που διαιρείται μόνο από το ένα (1) και τον εαυτό του. Εφαρμογή για 12, 13, 18, 29

Άσκηση 4 (Ντζούφρας & Καρλής (2016), σελ. 321). Έστω οι πίνακες

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 7 & 11 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Να υπολογιστούν οι ποσότητες:

(i). $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$

(ii). $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$

(iii). $\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$

(iv). $(\mathbf{I} - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})\mathbf{X}'$

(v). Να βρείτε τις ιδιοτιμές του πίνακα $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ και να επαληθεύσετε τη φασματική του ανάλυση.

Υπενθύμιση: **Φασματική Ανάλυση (Spectral Decomposition)**

- Αν ο (πραγματικός) συμμετρικός πίνακας $\mathbf{A}_{p\times p}$ έχει ζεύγη ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων $(\lambda_1, \mathbf{e}_1), \dots, (\lambda_p, \mathbf{e}_p)$ τότε μπορεί να αναλυθεί ως

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1' + \cdots + \lambda_1 \mathbf{e}_p \mathbf{e}_p' = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}'$$

όπου $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_p)$ είναι ο $p \times p$ πίνακας με στήλες τα p ιδιοδιανύσματα και $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$. Η παραπάνω έκφραση ονομάζεται *φασματική ανάλυση* του πίνακα $\mathbf{A}$.

Άσκηση 5 (Ντζούφρας & Καρλής (2016), σελ. 321). Αρχικά τρέξτε τις παρακάτω εντολές στην R για να δημιουργήσετε ένα διάνυσμα x0 με 1000 τιμές.

```
> set.seed(1932)
> x0<-rnorm(1000,5,2)
```

(i). Τοποθετήστε τα στοιχεία του x0 σε έναν πίνακα, έστω αυτός **B**, με 10 στήλες όπου κάθε στήλη θα περιέχει 100 τιμές.

(ii). Φτιάξτε έναν καινούργιο πίνακα, έστω αυτός B1, ο οποίος να έχει ως πρώτη στήλη τη στήλη του B με τη μικρότερη διακύμανση, ως 2η στήλη τη στήλη του B με τη 2η μικρότερη διακύμανση κλπ.

Άσκηση 6: Εκτελέστε τις παρακάτω εντολές στην R και δημιουργήστε έναν πίνακα με 6 γραμμές και 10 στήλες.

```
> set.seed(55)
> A1<-matrix(sample(1:10,size=60,replace=T),nrow=6)
```

(i). Βρείτε το πλήθος των θέσεων σε κάθε γραμμή οι οποίες είναι >4.

(ii). Ποιές γραμμές περιέχουν ακριβώς δύο φορές τον αριθμό 3;

(iii). Να βρεθούν τα ζεύγη στηλών για τα οποία το άθροισμα (στις τιμές και των 2 στηλών) είναι μεγαλύτερο από 75. Το αποτέλεσμα πρέπει να είναι πίνακας με 2 στήλες όπου π.χ. η γραμμή (1,2) σημαίνει ότι το άθροισμα των τιμών στις στήλες 1 και 2 του πίνακα A1 είναι μεγαλύτερο από το A1. Σημειώστε πως επιτρέπονται οι επαναλήψεις (δηλ. ο πίνακας που θα φτιάξετε μπορεί να έχει τις γραμμές (1,2), (2,1) και (2,2)). Αν δεν επιτρέπονται οι επαναλήψεις, τότε από τα (1,2), (2,1) και (2,2) επιτρέπεται μόνο το (1,2).