

Ασκήσεις

1] Έστω
$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 1 & 1 \\ 0 & a & 2 & b \end{pmatrix}$$
 ο επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος.

Να βρεθεί για ποιές τιμές των a, b το σύστημα έχει (α) μοναδική λύση (να δοθεί σε κάθε περίπτωση), (β) άπειρο πλήθος λύσεων (να δοθούν σε κάθε περίπτωση) και (γ) καμία λύση. Επίσης, για όλες τις τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ να βρεθεί ο βαθμός του δοθέντος πίνακα.

2] Αληθές ή ψευδές; (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας, είτε με απόδειξη, είτε με αντιπαράδειγμα, είτε με λεπτομερή αναφορά σε πεδίο της θεωρίας).

Αν ο ανηγμένος κλιμακωτός του επαυξημένου πίνακα ενός γραμμικού συστήματος έχει μια μηδενική γραμμή, τότε το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

3] Να βρεθεί ο βαθμός του πίνακα για κάθε $k \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & k & -1 & -2 \\ 1 & 2 & k & 1 \end{pmatrix}$$

7] Να υπολογισθεί (αν υπάρχει) το $\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t)$ όπου η συνάρτηση $x_2(t)$ ορίζεται από το σύστημα

$$x_1 + t \cdot x_2 + t^2 \cdot x_3 = t^4$$

$$t^2 \cdot x_1 + x_2 + t \cdot x_3 = t^3$$

$$t \cdot x_1 + t^2 \cdot x_2 + x_3 = 0$$

5] Έστω $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $ad - bc \neq 0$. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε επιλογή πραγματικών αριθμών k και l , το παρακάτω 2×2 γραμμικό σύστημα με αγνώστους x και y δέχεται μοναδική λύση.

$$ax + by = k$$

$$cx + d \cdot y = l$$

6] Ένα ζευδοχείο έχει x_1 μονόκλινα, x_2 δικλινα και x_3 τρικλινα δωμάτια. Αν το πλήθος των δωματίων είναι 22, το πλήθος των κλινών 39 και το πλήθος των δικλινών δωματίων είναι ίσο με το πλήθος των μονόκλινων και τρικλινών δωματίων μαζί, τότε να βρεθεί ο αριθμός των μονόκλινων, δικλινών και τρικλινών δωματίων.

7] Ένας ιδιώτης τοποθετεί ένα ποσό 4.000 € σε μια τράπεζα χωρίζοντας το σε δύο μέρη. Το ένα μέρος του ποσού τοκίζεται με επιτόκιο 10% και το δεύτερο με επιτόκιο 8%. Αν ο συνολικός ετήσιος τόκος είναι 370 €, τότε να βρεθούν τα δύο μέρη του ποσού.

8] Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα :

$$x + y + 3z = 3$$

$$y + az = -1$$

$$2x + 3y + a^2z = a + 2$$

Για ποιά τιμή του a έχει το σύστημα άπειρο πλήθος λύσεων;

A. $a = 0$

B. $a = 2$

Γ. $a = -2$

Δ. $a = 3$

Ε. Δεν υπάρχει a με αστήν την ιδιότητα.

9] Έστω $m \geq 1$ και $n \geq 1$ δύο φυσικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $m > n$.
Ποιο (α) από τα παρακάτω είναι αληθές;

(α) Ένα γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους είναι πάντα συμβατό.

(β) Ένα γρ. σύστημα n εξισώσεων με m αγνώστους είναι πάντα συμβατό.

(γ) Ένα ομογενές γρ. σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους πάντοτε έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

(δ) Ένα ομογενές γρ. σύστημα n εξισώσεων με m αγνώστους πάντοτε έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

A. (β) μόνο

B. (δ) μόνο

Γ. (β) και (δ) μόνο

Δ. (β), (γ) και (δ) μόνο

E. (α), (β), (γ) και (δ)
