* Ασκήσεις *

1] Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n > 1$, να βρείτε την n-οστή δύναμη του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2] Να βρεθεί ο αντίστροφος (αν υπάρχει) του πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3] Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε:

$$A^4 - A^3 + A^2 - A + I_n = O_{n \times n}$$

Να αποδείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = -A^4$.

1] Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Υποθέτουμε ότι ο B είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A. Να αποδείξετε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε και ο B είναι αντιστρέψιμος

] Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Να εξετασθεί αν ο A είναι αντιστρέψιμος. Στην περίπτωση που ο A είναι αντιστρέψιμος, να βρεθεί ο A^{-1} και να γραφεί ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

6] Έστω J_n ο $n \times n$ πίνακας κάθε στοιχείο του οποίου ισούται με 1. Να αποδείξετε ότι αν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, τότε:

$$(I_n - J_n)^{-1} = I_n - \frac{1}{n-1} J_n$$

όπου I_n ο $n \times n$ ταυτοτικός πίνακας.

7] Να αποδειχθεί ότι ένας $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $r(A) = n$, όπου $r(A)$ ο βαθμός του A (= το πλήθος των ηγετικών μονάδων του R_A).

8] Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ και έστω ότι ο B είναι αντιστρέψιμος. Να αποδείξετε ότι $AB^{-1} = B^{-1}A$ αν και μόνο αν $AB = BA$.

9] Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τον 3×3 πίνακα

$$V(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Να αποδείξετε ότι: $V(x)\cdot V(y) = V(x+y)$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$
2. Να υπολογισθεί ο πίνακας $V(x)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
3. Να αποδείξετε ότι: $\forall x \in \mathbb{R}$, ο πίνακας $V(x)$ είναι αντιστρέψιμος.
4. Να υπολογισθεί ο $V(x)^{-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
5. Να γραφεί $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\forall x \in \mathbb{R}$ ο πίνακας $(V(x))^n$ ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

10] Σωστό ή λάθος; Αν $A\cdot B = \Gamma$ και δύο από τους πίνακες δεν είναι αντιστρέψιμοι, τότε και ο τρίτος είναι μη αντιστρέψιμος.

11] Να βρεθούν όλα τα $w \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & w & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

να είναι αντιστρέψιμος.

12] Αν $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ τότε $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} \left(= \frac{1}{a} \cdot (a+b) \cdot \frac{1}{b} \right)$.

Βρείτε μια ανάλογη ισότητα για αντιστρέψιμους πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.
Επίσης, να αποδείξετε ότι αν ο $A+B$ είναι αντιστρέψιμος (για αντιστρέψιμους A και B), τότε ο $A^{-1} + B^{-1}$ είναι αντιστρέψιμος και $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = B \cdot (A+B)^{-1} \cdot A$.

13] Αν A, B αντιστρέψιμοι, τότε (όπως στην ισότητα $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$ για $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$) ισχύει ότι $A^{-1} + B^{-1} = (AB)^{-1}(A+B)$;

14] Να υπολογίσετε τον αντίστροφο (αν υπάρχει) του γινομένου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$ και $c \neq 0$, χωρίς να υπολογίσετε τον A.

5] Αν ο $\nu \times \nu$ πίνακας A επαληθεύει την ισότητα $A^2 + A + I_\nu = O_{\nu\times\nu}$ να αποδείξετε ότι:

i) ο A είναι αντιστρέψιμος

ii) $A^{41} + A^{22} + I_\nu = O_{\nu\times\nu}$ και ii) $(I_\nu + A)^{11} = I_\nu + A^{53}$

16] Αν οι $\nu \times \nu$ τετραγωνικοί πίνακες $A, B, A+B$ είναι αντιστρέψιμοι με $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$ Ν.Δ.Ο.:

i) $\Gamma + \Gamma^{-1} + I_\nu = O_{\nu\times\nu}$ και ii) $\Gamma^3 = I_\nu$, όπου $\Gamma = A \cdot B^{-1}$

17] Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

i) Για κάθε θετικό ακέραιο ν, να δείξετε ότι $A^{\nu+2} = A^\nu + A^2 - I_3$

ii) Να βρείτε τον πίνακα A^{100}.
