УДК 517.977
MSC 2000 60K25

© Г.Ш. Цициашвили, Д.Г. Константинидис*

Сверххвосты в теории риска

Вводится понятие тяжести хвоста распределения ущерба страховой компании. Исследуется поведение вероятности разорения, когда параметр тяжести стремится к предельным значениям. Рассматриваются наиболее распространенные семейства распределений страховых ущербов. *Ключевые слова и фразы: тяжелые хвосты, субэкспоненциальные распределения, вероятность разорения.*

1. Формулировка основных результатов

В математической теории риска (см., например, [1], [2]) одной из наиболее распространенных сейчас является формула (ЭГВ) Эмбрехтса-Голди-Вераверберке, дающая асимптотику вероятности разорения $\mathbf{P}(x)$ при начальном капитале $x \to \infty$. Если обозначить $B(y)$ распределение ущербов и положить

$$\overline{B}(y) = 1 - B(y), \quad \overline{G}(x) = \int_x^\infty \overline{B}(t)dt,$$

то формула (ЭГВ), в частности, дает при некотором $c > 0$ асимптотику

$$\mathbf{P}(x) \sim c\overline{G}(x), \quad x \to \infty.$$

Асимптотика $\mathbf{P}(x)$ справедлива при пуассоновском потоке ущербов и выражается через асимптотику тяжелого (убывающего к 0 много медленнее экспоненты) хвоста распределения ущерба $B(y)$. Точнее предполагается, что функция $\overline{G}(x)$ при единичном среднем распределения $B(y)$ удовлетворяет условию субэкспоненциальности $\overline{G}_2(x)/\overline{G}(x) \to 2, \ x \to \infty$, широко используемому в современной теории риска (здесь $\overline{G}_2(x)$ означает хвост двукратной свертки $(G * G)(x)$ распределения $G(x)$). Особенностью этого подхода является то, что в нем игнорируется информация о поведении $\overline{B}(y)$ на конечных отрезках. В результате для распределений с тяжелыми хвостами $\overline{B}(y)$, убывающих к нулю очень медленно и представляющих наибольший практический интерес, относительная ошибка асимптотической формулы (ЭГВ), как показывают вычисления [3], [4], при небольших x велика и убывает очень медленно, в то время как вероятности разорения $\mathbf{P}(x)$ ведут себя достаточно закономерно.

Поэтому естественно исследовать предельное поведение $\mathbf{P}(x)$ не при $x \to \infty$, а при устремлении показателя тяжести хвоста к своему минимальному или максимальному значениям. Однако точная формулировка этого вопроса упирается в неразработанность самого понятия тяжести хвоста $\overline{B}(y)$. В настоящей работе это понятие вводится не через асимптотику хвоста $\overline{B}(y), \ y \to \infty$, а через параметры семейства распределений, содержащего $B(y)$.

* Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7, Department of Mathematics, University of the Aegean, Samos, 83200,Greece. Электронная почта: guram@iam-mail.febras.ru, konstant@aegean.gr

Таким образом, получаются новые предельные соотношения, объясняющие результаты известных вычислений и позволяющие решить ряд актуальных для страховой и финансовой математики задач расчета вероятности разорения при меняющемся курсе валюты.

Далее считаем, что за единичное время работы в компанию поступает единичная сумма денег, а случайные ущербы независимы и имеют распределение B со средним E_B. Обозначим $\mathbf{P}(M,B;x)$, $\mathbf{P}(D,B;x)$ вероятности разорения за бесконечное время страховой компании с начальным капиталом x, в которую поступает пуассоновский — M или детерминированный — D поток ущербов интенсивности $\lambda < 1$. Обозначим $\mathbf{P}^{(n)}(D,B;x)$ — вероятность разорения компании, определяемой индексами D, B, за n тактов работы, — т.е. до поступления $(n+1)$-го ущерба.

Приведем теперь формулировки основных результатов работы для паретовского семейства хвостов распределений

$$\overline{B}(y) = \begin{cases} 1, & 0 \le y < k, \\ (k/y)^a, & k \le y < \infty, \end{cases} \tag{1}$$

$1 < a$, $0 < k$, параметром тяжести в котором считается a. Выделим в семействе (1) подмножества распределений, параметризованные a с помощью естественного для теории риска условия $E_B = \mathrm{const}$. Без ограничения общности всюду дальше считаем эту константу равной 1, т.е.

$$E_B = 1, \tag{2}$$

а хвост $\overline{B}(y)$, соответствующий при выполнении (2) параметру a, обозначаем $\overline{B}_a(y)$, $a_* < a < a^*$, где $a_* = 1$, $a^* = \infty$. Всюду ниже для краткости нижний индекс a опускаем: $\overline{B}_a(y) = \overline{B}(y)$. Положим

$$F_0(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & 0 < y < \infty, \end{cases} \qquad F_1(y) = \begin{cases} 1, & 0 \le y < 1, \\ d, & y = 1, \ \ 0 \le d \le 1, \\ 0, & 1 < y < \infty, \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 1. *Для паретовского распределения* (1), *справедливы предельные соотношения:*

$$\lim_{a \to a_*} \overline{B}(y) = F_0(y), \tag{3}$$

$$\lim_{a \to a^*} \overline{B}(y) = F_1(y), \quad d = e^{-1}; \tag{4}$$

$$\lim_{a \to a^*} \int_0^\infty |\overline{B}(t) - F_1(t)| dt = 0. \tag{5}$$

Обозначим

$$F_2(x) = \lambda e^{-(1-\lambda)x}, \quad F_3 = 1 - (1-\lambda) \sum_{n=0}^{[x]} \frac{[-\lambda(x-n)]^n e^{-\lambda(x-n)}}{n!}, \quad F_4 = pe^{-(1-p)x},$$

где $[x]$ — целая часть числа x, $p \in (0,1)$ является наименьшим корнем уравнения

$$p = e^{-(1-p)/\lambda}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Для паретовского распределения* (1) *справедливы предельные соотношения:*

$$\lim_{a \to a_*} \mathbf{P}(M,B;x) = \lambda, \quad \lim_{a \to a^*} \mathbf{P}(M,B;x) = F_3(x), \tag{6}$$

$$\lim_{a \to a_*} \mathbf{P}^{(n)}(D,B;x) = 0, \quad \lim_{a \to a^*} \mathbf{P}(D,B;x) = 0. \tag{7}$$

Рассмотрим модель работы страховой компании с меняющимся в соответствие со случайной последовательностью ξ_n, $n \geq 0$, курсом валюты и детерминированным потоком ущербов D интенсивности λ:

$$S_0 = x, \;\; S_{n+1} = \xi_n S_n + \left(\frac{1}{\lambda} - \eta_{n+1}\right), \;\; n \geq 0. \tag{8}$$

Здесь S_n — капитал компании после поступления n-го ущерба, η_n — его величина, $\mathbf{P}(\eta_n > t) = \overline{B}(t)$, $\mathbf{P}(\xi_n > 0) = 1$, (ξ_n, η_n), $n \geq 0$, — последовательность независимых и одинаково распределенных случайных векторов с независимыми компонентами. Обозначим

$$\Psi^{(n)}(x) = \mathbf{P}(\inf_{0\leq k\leq n} S_k < 0), \;\; \Psi(x) = \mathbf{P}(\inf_{0\leq k<\infty} S_k < 0), \tag{9}$$

вероятности разорения компании после n тактов работы и после бесконечного числа тактов, соответственно.

ТЕОРЕМА 3. 1. *Для паретовского распределения* (1), *если среднее* $\mathbf{E}\xi_n^{-1} < 1$, *то выполняется равенство*

$$\lim_{a\to a^*} \Psi(x) = 0, \;\; 0 < x < \infty. \tag{10}$$

2. *При любом* $n > 0$ *справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{a\to a_*} \Psi^{(n)}(x) = 0, \;\; 0 < x < \infty, \;\; 0 < n < \infty. \tag{11}$$

Замечание 1. Зададим семейство распределений Парето не формулой (1), как это сделано в [2], а формулой

$$\overline{B}(y) = (k/(k+y))^a, \;\; 0 \leq y < \infty, \;\; 0 < k < \infty, \;\; 1 < a < \infty, \tag{12}$$

используемой в [1]. Тогда при $a_* = 1$, $a^* = \infty$ по аналогии с доказательством теоремы 1 нетрудно получить равенства

$$\lim_{a\to a^*} \overline{B}_a(y) = e^{-y}, \;\; \lim_{a\to a^*} \int_0^\infty \left|\overline{B}_a(t) - e^{-t}\right| dt = 0, \;\; y \geq 0. \tag{13}$$

Следствие 1. Для семейства распределений Парето, заданного равенством (12),

$$\lim_{a\to a_*} \mathbf{P}(M, B; x) = \lambda, \;\; \lim_{a\to a^*} \mathbf{P}(M, B; x) = F_2(x),$$
$$\lim_{a\to a_*} \mathbf{P}^{(n)}(D, B; x) = 0, \;\; \lim_{a\to a^*} \mathbf{P}(D, B; x) = F_4(x).$$

Приступим теперь к формулировке аналогичных результатов для других параметрических семейств распределений:

– распределений Вейбулла, задаваемых формулой $\overline{B}(y) = \exp(-(ky)^a)$, $0 \leq y < \infty$, $0 < k < \infty$, $0 < a < 1$,

– логнормальных распределений, имеющих плотности

$$b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, at} \exp\left(-\frac{(\ln t - k)^2}{2a^2}\right), \;\; 0 < t < \infty,$$

$-\infty < k < \infty$, $0 < a < \infty$,

– логгамма распределений, имеющих плотности

$$b(t) = \frac{k^a}{\Gamma(a)} (\ln(1+t))^{a-1} (1+t)^{-k-1}, \;\; 0 < t < \infty,$$

$0 < k < \infty$, $0 < a < \infty$, где $\Gamma(a)$ — гамма функция;

– распределений Бурра, определяемых соотношениями

$$\overline{B}(y) = \overline{B}^{(\alpha,r,k)}(y) = \left(\frac{k}{k+y^r}\right)^{\alpha}, \quad y \geq 0,$$

$\alpha > 0$, $r > 0$, $k > 0$,

– гамма распределений, имеющих плотности

$$b(t) = \frac{k^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-kt}, \quad 0 < t < \infty,$$

$0 < k < \infty$, $0 < a < \infty$.

Замечание 2. Утверждение теоремы 1 справедливо при некоторых d для семейства логнормальных распределений, если положить $a_* = \infty$, $a^* = 0$, а также для семейств логгамма и гамма распределений, если положить $a_* = 0$, $a^* = \infty$.

Замечание 3. Для семейства распределений Бурра, если зафиксировать r и положить $a = \alpha$, $a_* = 1/r$, то справедливо равенство (3). Если же положить $a = (\alpha, r)$, $a^* = (\infty, \infty)$ и понимать предел $\lim\limits_{a \to a^*}$ как повторный: $\lim\limits_{r \to \infty} \lim\limits_{\alpha \to \infty}$, то справедливы равенства (4), (5).

Замечание 4. Утверждение теоремы 2 справедливо для семейств логнормального, логгамма, гамма, а также для распределения Бурра (с учетом сделанных в замечании 3 оговорок, касающихся предельных точек a_*, a^*).

ТЕОРЕМА 4. *Для семейства вейбулловских распределений при* $a_* = 0$, $a^* = 1$, *выполняются равенства* (3), (13).

Следствие 2. Для семейства вейбулловских распределений

$$\lim_{a \to a_*} \mathbf{P}(M, B; x) = \lambda, \quad \lim_{a \to a^*} \mathbf{P}(M, B; x) = F_2(x),$$
$$\lim_{a \to a_*} \mathbf{P}^{(n)}(D, B; x) = 0, \quad \lim_{a \to a^*} \mathbf{P}(D, B; x) = F_4(x).$$

Замечание 5. Нетрудно проверить, что утверждение 1 теоремы 3 справедливо для семейств распределений логнормального, логгамма, Бурра, гамма.

Замечание 6. Легко установить, что утверждение 2 теоремы 3 справедливо для семейств распределений вейбулловского, логнормального, логгамма, Бурра, гамма.

Это утверждение показывает, что малые вероятности разорения при меняющемся курсе валюты и конечном начальном капитале можно получить на конечных интервалах времени даже в случае сверхтяжелых хвостов, если предположить входной поток детерминированным D, т.е. внести в модель некоторую упорядоченность. Существенную роль играет возникшая здесь возможность рассматривать вероятности разорения на конечных интервалах времени, практически отсутствующая в классической теории риска. Результаты утверждения 2 являются естественным дополнением к результатам работы [8], где, наоборот, найдены условия, при которых вероятность разорения имеет степенной хвост.

Таким образом, сначала для паретовского распределения в теореме 1 выводятся предельные соотношения для хвостов распределений ущербов и определяются сверхтяжелые и сверхлегкие хвосты, а затем в теоремах 2, 3 строятся предельные соотношения для вероятностей разорения. После детального исследования паретовского распределения полученные результаты распространяются на другие типы распределений.

2. Доказательства

Доказательство теоремы 1. Равенство $E_B = 1$ и формула (1) (см., например, [2], (1.31)) приводят к очевидному соотношению

$$k = (a-1)/a, \tag{1}$$

из которого формулы (3), (4) получаются с помощью следующих цепочек равенств:

$$\lim_{a\longrightarrow 1} \overline{B}(y) = \lim_{a\longrightarrow 1} \left(\frac{a-1}{a}\right)^a \frac{1}{y^a} = \lim_{a\longrightarrow 1} (a-1)^a \frac{1}{y} = 0, \;\; y > 0;$$

$$\lim_{a\longrightarrow\infty} \overline{B}(y) = \lim_{a\longrightarrow\infty} \left(\frac{a-1}{a}\right)^a \frac{1}{y^a} = \lim_{a\longrightarrow\infty} \left(\frac{a-1}{a}\right)^a \lim_{a\longrightarrow\infty} \frac{1}{y^a} = 0, \;\; y > 1;$$

$$\lim_{a\longrightarrow\infty} \overline{B}(y) = \begin{cases} 1, & 0 \le y < 1, \\ e^{-1}, & y = 1, \\ 0, & 1 < y < \infty. \end{cases}$$

Формула (5) следует из равенства (1) и цепочки соотношений

$$\int_0^\infty \left|\overline{B}(y) - F_1(y)\right| dy = \int_0^1 \left(1 - \overline{B}(y)\right) dy + 1 - \int_0^1 \overline{B}(y) dy =$$

$$= 2\int_0^1 \left(1 - \overline{B}(y)\right) dy = 2\int_{(a-1)/a}^1 dy = \frac{2}{a} \longrightarrow 0, \;\; a \longrightarrow \infty$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. В силу равенства (2) функция $\overline{G}(u)$ является хвостом распределения $G(u) = 1 - \overline{G}(u)$. В свою очередь из хорошо известной формулы Бэкмана (см., например, [2], равенство (5.16)), легко получить, что

$$\mathbf{P}(M, B; x) = q\sum_{k=1}^{\infty} (1-q)^k \overline{G}_k(u), \;\; q = 1 - \lambda,$$

где $\overline{G}_k$ является хвостом k-кратной свертки распределения G, откуда следует:

$$\lambda = 1 - q = \mathbf{P}(M, B; 0) \ge \mathbf{P}(M, B; u) \ge (1-q)\,\overline{G}(u).$$

В то же время для любых $u > 0, \;\; \varepsilon, \;\; u > \varepsilon > 0$,

$$\overline{G}(u) = 1 - \int_0^\varepsilon \overline{B}(y) dy - \int_\varepsilon^u \overline{B}(y) dy \ge 1 - \varepsilon - (u - \varepsilon)\,\overline{B}(\varepsilon).$$

В силу теоремы 1 для любых $u, \varepsilon > 0$ существует $\delta\,(u, \varepsilon)$ такое, что для любого a, $|a_* - a| < \delta(u, \varepsilon)$ выполняется неравенство $(u-\varepsilon)\overline{B}^{(a)}(\varepsilon) < \varepsilon$, следовательно $\overline{G}(u) \ge 1 - 2\varepsilon$ и, значит, $\lambda = \mathbf{P}(M; 0) \ge \mathbf{P}(M, B; u) \ge \lambda(1 - 2\varepsilon)$, откуда следует первое равенство в (6)

В свою очередь из равенства (5), теоремы устойчивости для предельного распределения времени ожидания в одноканальной системе массового обслуживания $G|G|1|\infty$ (см., например, [7]) и того факта, что функция $\mathbf{P}^*(M; x)$ является предельным распределением в одноканальной системе массового обслуживания $M|D|1|\infty$ с пуассоновским входным потоком интенсивности $\lambda < 1$ и единичным временем обслуживания, следует второе равенство в (6).

Определим теперь $w_1 = 0$, $w_2 = (\eta_1 - \lambda^{-1})^+, \ldots, w_n = (w_{n-1} + \eta_{n-1} - \lambda^{-1})^+$, где для любого вещественного r, $r^+ = \max(0, r)$. Очевидно, что

$$\mathbf{P}^{(n)}(D, B; u) = \mathbf{P}(w_n > u).$$

Докажем по индукции, что для любых $u > 0$, $n > 0$

$$\mathbf{P}^{(n)}(D, B; u) \longrightarrow 0, \ \ a \longrightarrow a_*, \tag{2}$$

действительно,

$$\mathbf{P}^{(1)}(D, B; u) = \mathbf{P}(\eta_1 - \lambda^{-1} > u) \le \mathbf{P}(\eta_1 > u) = \overline{B}(u) \longrightarrow 0,$$

$$\mathbf{P}^{(n)}(D, B; u) \le \mathbf{P}(\eta_1 + \ldots + \eta_n > u) \le \mathbf{P}\left[\bigcup_{k=1}^{n} (\eta_k > u/n)\right] \le n\overline{B}(u/n) \longrightarrow 0; \ \ a \longrightarrow a_*.$$

Практически дословно повторяя доказательство второго равенства в (6), нетрудно для любого $u > 0$ получить формулу

$$\mathbf{P}(D, B; u) \longrightarrow 0, \ \ a \longrightarrow a^*, \tag{3}$$

Из формул (2), (3) получаем равенство (7). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Используя равенство (8), нетрудно по индукции получить соотношение

$$S_0 = x, \ \ S_{n+1} = x\prod_{j=0}^{n}\xi_j + \sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=i+1}^{n}\xi_j\right)(1/\lambda - \eta_{i+1}), \ \ n \ge 0.$$

Обозначим

$$\tilde{S}_n = \left(\prod_{j=0}^{n-1}\xi_j\right)^{-1} S_n, \ \ n \ge 0,$$

тогда

$$\tilde{S}_0 = x, \ \ \tilde{S}_{n+1} = x + \sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=0}^{i}\xi_j^{-1}\right)(1/\lambda - \eta_{i+1}), \ \ n \ge 0, \tag{4}$$

причем в силу (8), (9)

$$\Psi^{(n)}(x) = \mathbf{P}(\inf_{0\le k\le n} \tilde{S}_k < 0), \ \ \Psi(x) = \mathbf{P}(\inf_{0\le k<\infty} \tilde{S}_k < 0). \tag{5}$$

Зададим случайные величины η_i^*, $i > 0$, равенствами $P(\eta_i^* = 1) = 1$, $i > 0$, и по аналогии с формулами (4), (5), определим

$$\tilde{S}_0^* = x, \ \ \tilde{S}_{n+1}^* = x + \sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=0}^{i}\xi_j^{-1}\right)(1/\lambda - \eta_{i+1}^*), \ \ n \ge 0, \tag{6}$$

$$0 = \Psi^*(x) = \mathbf{P}(\inf_{0\le k<\infty} \tilde{S}_k^* < 0), \ \ x > 0. \tag{7}$$

Обозначим

$$Z_n = \sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=0}^{i}\xi_j^{-1}\right)(1/\lambda - \eta_{i+1}), \ \ Z_n^* = \sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=0}^{i}\xi_j^{-1}\right)(1/\lambda - \eta_{i+1}^*), \ \ n \ge 0,$$

$$W = \inf_{0\le n\le\infty} Z_n, \quad W^* = \inf_{0\le n\le\infty} Z_n^*$$

и положим $q = \mathbf{E}\xi_n^{-1} < 1$, тогда из формул (4)–(7) следует, что

$$\mathbf{E}|W| \le \frac{q}{\lambda\,(1-q)} < \infty, \quad \mathbf{E}|W^*| \le \frac{q}{\lambda\,(1-q)} < \infty.$$

Таким образом случайные величины W, W^* с вероятностью единица принимают конечные значения и значит определены функции $\Psi(x) = P(W < -x)$; $\Psi^*(x) = P(W^* < -x)$.

Введем совместное распределение случайных величин η_i, η_i^*, сохраняющее их маргинальные распределения:

$$\eta_i = [\mathbf{P}(\eta_i < t)]^{-1}(\omega_i), \quad \eta_i^* = [\mathbf{P}(\eta_i^* < t)]^{-1}(\omega_i), \quad i = 1, 2, \dots,$$

где ω_i, $i = 1, 2, \dots$, образуют последовательность независимых случайных величин, распределенных равномерно на отрезке $[0,1]$. Поэтому случайные величины W, W^* также распределены на одном вероятностном пространстве и справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{E}\,|W - W^*| = \mathbf{E}\left|\inf_{0\le n<\infty} Z_n - \inf_{0\le n<\infty} Z_n^*\right| \le \mathbf{E}\sup_{0\le n<\infty} |Z_n - Z_n^*| \le$$

$$\le \mathbf{E}\sup_{0\le n<\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=0}^{i}\xi_j^{-1}\right)\left|\eta_{i+1} - \eta_{i+1}^*\right| = \mathbf{E}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{i}\xi_j^{-1}\right)\left|\eta_{i+1} - \eta_{i+1}^*\right| =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\mathbf{E}\xi_j^{-1}\right)^{i+1}\mathbf{E}\left|\eta_{i+1} - \eta_{i+1}^*\right| = \frac{q}{1-q}\mathbf{E}\,|\eta_i - \eta_i^*| = \frac{q}{1-q}\int_0^\infty \left|\overline{B}(t) - F_1(t)\right| dt \longrightarrow 0, \quad a \to a^*.$$

Из сходимости $\mathbf{E}\,|W - W^*| \to 0$, $a \to a^*$ немедленно следует сходимость по вероятности $W \to W^*$, $a \to a^*$ и значит слабая сходимость $\Psi(x)$ к $\Psi^*(x)$ при $a \to a^*$. В свою очередь при $x > 0$

$$\Psi^*(x) = \mathbf{P}\left(\inf_{0\le n<\infty} Z_n^* < -x\right) = \mathbf{P}\left(\inf_{0\le n<\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=0}^{i}\xi_j^{-1}\right)(1/\lambda - \eta_{i+1}^*) < -x\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\inf_{0\le n<\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=0}^{i}\xi_j^{-1}\right)\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) < -x\right) = 0.$$

Тем самым формула (10) доказана.

Из утверждения теоремы 1 (см. формулу (3)) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|a_* - a| < \gamma(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\mathbf{P}\,(1/\lambda - \eta_1 > 0) \ge 1 - \frac{\varepsilon}{k}. \tag{8}$$

Из (8) автоматически следует:

$$\mathbf{P}\,(1/\lambda - \eta_1 > 0, \dots, 1/\lambda - \eta_n > 0) \ge \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)^n,$$

откуда находим что для любого a, $|a_* - a| < \gamma(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\Psi^{(n)}(x) \le 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)^n < \varepsilon.$$

Таким образом, формула (11) а с ней и теорема 3 доказаны.

Доказательства утверждений, содержащихся в замечаниях 2, 3, используют стандартные предельные переходы и приведены в [5], [6].

Доказательство следствия 1 почти дословно повторяет доказательство теоремы 2.

Доказательство теоремы 4. Используя формулу (1.35) в [2], получаем из равенства $E_B = 1$ соотношение

$$1 = \frac{\Gamma(1+1/a)}{k}.$$

Исследуем $\lim\limits_{a\to 0} \overline{B}(y)$, применяя формулу Стирлинга для гамма функции:

$$\Gamma^a\left(1+\frac{1}{a}\right) \sim \left[(1/a)^{1/a} e^{-1/a}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\right]^a \sim \frac{1}{ae} \longrightarrow \infty, \; a \longrightarrow 0;$$

и следующие соотношения:

$$\lim_{a\longrightarrow 0}(ky)^a = \lim_{a\longrightarrow 0}\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right)y\right]^a = \lim_{a\longrightarrow 0}\Gamma^a\left(1+\frac{1}{a}\right) = \infty, \quad y > 0.$$

Отсюда автоматически следует равенство (3). Исследуем теперь предел $\lim\limits_{a\to 1}\overline{B}(y)$ с помощью равенства:

$$\lim_{a\longrightarrow 1}\Gamma^a\left(1+\frac{1}{a}\right)y^a = y, \quad y \geq 0,$$

из которого автоматически следует соотношение

$$\lim_{a\longrightarrow 1}\overline{B}(y) = e^{-y}, \quad y \geq 0,$$

причем

$$\left|\overline{B}(y) - e^{-y}\right| = \Delta(y), \quad \Delta(y) = e^{-y}\left|\exp\left\{-\Gamma^a\left(1+\frac{1}{a}\right)y^a + y\right\} - 1\right|.$$

С другой стороны для любого $T > 1$, $a > 1/2$

$$\int_0^\infty \left|\overline{B}(y) - e^{-y}\right| dy = \int_0^T \left|\overline{B}(y) - e^{-y}\right| dy + \int_T^\infty \left|\overline{B}(y) - e^{-y}\right| dy \leq$$

$$\leq \int_0^T \Delta(y)\,dy + \int_T^\infty \left(\overline{B}(y) + e^{-y}\right) dy \leq T \sup_{0\leq y\leq T}\Delta(y) +$$

$$+e^{-T} + \int_T^\infty \exp\left\{-\overline{\Gamma}y^{1/2}\right\}dy, \quad \overline{\Gamma} = \inf_{1/2\leq a\leq 1}\Gamma^a\left(1+\frac{1}{a}\right) > 0.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем T_ε так, чтобы

$$e^{-T_\varepsilon} + \int_{T_\varepsilon}^\infty \exp\left\{-\overline{\Gamma}y^{1/2}\right\}dy < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как y^a сходится к y при $a \longrightarrow 1$ равномерно на отрезке $[0, T_\varepsilon]$ и $\lim_{a\longrightarrow 1}\Gamma^a(1+1/a) = 1$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует a_ε, $1/2 < a_\varepsilon < 1$, такое, что для любого a, $a_\varepsilon < a < 1$,

$$\sup_{0\leq y\leq T_\varepsilon}\Delta(y) < \frac{\varepsilon}{2T_\varepsilon}.$$

Следовательно, для любого a, $a_\varepsilon < a < 1$,

$$\int_0^\infty \left|\overline{B}(y) - e^{-y}\right| dy < \varepsilon.$$

Таким образом, справедливо равенство (5). Теорема 4 доказана.

Доказательство следствия 2 опирается на утверждение теоремы 4 и почти дословно повторяет доказательство теоремы 2.

Авторы благодарят В.В. Калашникова за большую помощь в постановке задачи.

Список литературы

[1] *Embrechts P., Kluppelberg C., Mikoch T.* Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, Springer, Berlin, 1997.

[2] *Kalashnikov V.V.* Mathematical Methods In The Ruin Probability Theory. Lecture Notes, University of Copenhagen, 1999.

[3] *Kalashnikov V.V. and Tsitsiashvili G.Sh.* Tails of waiting times and their bounds. *Queueing Systems, 32*, 1999, *p.p. 257-283.*

[4] *Konstantinidis D. G.* Comparison of Ruin Probability Estimates in the Presence of Heavy Tails. *Journal of Mathematical Sciences - New York*, 1999, vol. 93, No 4, p.p. 552-562.

[5] *Tsitsiashvili G.Sh. and Konstantinidis D.* Superlight and superheavy tails in insurance and queueing models. Dept. Mathematics, Univ. Aegean, Samos, Greece. Technical report 00-03, 2000, 31 p.

[6] *Tsitsiashvili G.Sh. and Konstantinidis D.* Superlight and superheavy tails under interest force models. Dept. Mathematics, Univ. Aegean, Samos, Greece. Technical report 00-05, 2000, 13 p.

[7] *Kalashnikov V.V. and Tsitsiashvili G.Sh.* On the stability of queueing systems with respect to disturbances of their distribution functions. *Engineering Cybernetics.* **10**, 1973, p.p. 211-217.

[8] *Kalashnikov V. and Norberg R.* Ruin probability under random interest rate. Working paper, Lab. of Actuarial Math., University of Copenhagen, 1999.

Представлено в Дальневосточный математический журнал в окончательном виде 14 февраля 2001 г.

ИНТАС (INTAS), проект 97–1625, NATO Science Fellowship Programme

---

Tsitsiashvili G.Sh, Konstantinides D.G., Supertails in Risk Theory. Far Eastern Mathematical Journal, 2001. v 2, № 1.

SUMMARY

The parameter of heaviness of claim distribution tail is introduced. The ruin probility behaviour when the parameter of heaviness tends to limit is studied. The most popular distribution families are examined.