Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε το πρόβλημα της βελτιστοποίησης ενός χαρτοφυλακίου στην περίπτωση που αυτό αποτελείται από δυο και περισσότερες μετοχές. Για να αναπτύξουμε την κατάλληλη θεωρία θα παρουσιάσουμε αρχικά τα βασικά μαθηματικά εργαλεία που προέρχονται κυρίως από τη θεωρία πιθανοτήτων.

Ξεκινάμε με την έννοια της συνδιακύμανσης δυο τυχαίων μεταβλητών X, Y η οποία περιγράφει τον τρόπο που αλλάζει η μια τυχαία μεταβλητή σε σχέση με την άλλη. Ορίζεται ως εξής,

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για τη συνδιακύμανση.

- $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$,

- $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$,
- $\mathrm{Cov}(X+Y,Z)=\mathrm{Cov}(X,Z)+\mathrm{Cov}(Y,Z)$,
- $\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{m} Y_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} Cov(X_i,Y_i)$,
- $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$.

Έστω ότι μπορούμε να επενδύσουμε το ποσό V σε n το πλήθος μετοχές. Δηλαδή, θέλουμε να αγοράσουμε k_i μετοχές από την S_i όπου $i=1,\cdots,n$. Συμβολίζουμε με

$$w_i=\frac{k_i S_i^0}{\sum_{j=1}^{n} k_j S_j^0}$$

όπου ισχύει προφανώς ότι

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

δηλαδή θα ξοδέψουμε το ποσό $w_i V$ για αγορά k_i μετοχών της S_i. Ψάχνουμε να βρούμε τα w_i τέτοια ώστε το κέρδος μας στο χρόνο T να είναι το μέγιστο με το ελάχιστο δυνατόν ρίσκο.

Η απόδοση της κάθε μετοχής μ_i στη χρονική περίοδο $[0, T]$ είναι μια τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε

$$\frac{S_i^T}{S_i^0} = 1 + \mu_i$$

όπου S_i^0 και S_i^T είναι η τιμή της μετοχής στο χρόνο 0 και στο χρόνο T αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε από ιστορικά δεδομένα τη μέση τιμή m_i της απόδοσης μ_i, τη διακύμανση σ_i της απόδοσης καθώς και την συνδιακύμανση σ_{ij} των αποδόσεων των μετοχών S_i και S_j. Θα υποθέσουμε ότι οι ίδιες τιμές θα ισχύουν και στη χρονική περίοδο $[0, T]$. Σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε χαρτοφυλάκιο τη χρονική στιγμή 0 έτσι ώστε τη χρονική στιγμή T να έχει τη μέγιστη απόδοση κατά μέση τιμή m και τη μικρότερη δυνατή διακύμανση.

Η απόδοση μ του χαρτοφυλακίου συνολικά θα είναι τ.ω.

$$\frac{V^T}{V} = 1 + \mu$$

οπότε

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n k_i(S_i^T - S_i^0)}{V} = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i k_i S_i^0}{V} = \sum_{i=1}^n \mu_i w_i$$

Επομένως, η μέση τιμή της απόδοσης του χαρτοφυλακίου θα

$$m = \mathbb{E}(\mu) = \sum_{i=1}^n w_i \mathbb{E}(\mu_i)$$

Η διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου θα είναι ίση με

$$\sigma = \mathrm{Var}(\mu) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n w_i \mu_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}$$

Αν θέσουμε $\mathbf{w}^t = (w_1, \cdots, w_n)$, $\mathbf{\Sigma} = [\sigma_{ij}]$ και

$\mathbf{m}^t = (m_1, \cdots, m_n)$ τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^t\mathbf{w} &= 1, \\ \mathbf{w}^t\mathbf{m} &= m, \\ \mathbf{w}^t\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} &= \sigma \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{1}^t = (1, \cdots, 1)$ και $\mathbf{w}^t$ είναι ο ανάστροφος του $\mathbf{w}$. Σημειώστε ότι, αφού η διακύμανση του χαρτοφυλακίου είναι πάντοτε θετικός αριθμός τότε, ο πίνακας συνδιακυμάνσεων Σ είναι θετικά ορισμένος.

Το πρόβλημά μας έχει αναχθεί σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης με προϋποθέσεις. Θεωρούμε ως m_0 μια απαιτούμενη μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου μας και θέλουμε να υπολογίσουμε τα w_i έτσι ώστε να έχουμε την ελάχιστη δυνατή διακύμανση του χαρτοφυλακίου, δηλαδή επίλυση του παρακάτω προβλήματος

$$\min \quad \mathbf{w}^t\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}$$

κάτω από τις προϋποθέσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^t\mathbf{w} &= 1, \\ \mathbf{w}^t\mathbf{m} &= m_0 \end{aligned} \tag{1}$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange λαμβάνουμε τις παρακάτω εξισώσεις,

$$\begin{aligned} 2\mathbf{\Sigma w} &= \lambda_1 \mathbf{1} + \lambda_2 \mathbf{m}, \\ \mathbf{1}^t \mathbf{w} &= 1, \\ \mathbf{w}^t \mathbf{m} &= m_0 \end{aligned}$$

Αν ο πίνακας $\mathbf{\Sigma}$ είναι αντιστρέψιμος τότε λύνουμε ως προς $\mathbf{w}$ την πρώτη εξίσωση και έχουμε

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}\mathbf{\Sigma}^{-1}\left(\lambda_1 \mathbf{1} + \lambda_2 \mathbf{m}\right) = \frac{1}{2}\Sigma^{-1}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Οι εξισώσεις $\mathbf{1}^t \mathbf{w} = 1$ και $\mathbf{w}^t \mathbf{m} = m_0$ γράφονται και ως

$$[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]^t \mathbf{w} = \begin{pmatrix} m_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας την 2 με τον $[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]^t$ προκύπτει ότι

$$[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]^t \mathbf{w} = \frac{1}{2}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]^t \mathbf{\Sigma}^{-1}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Θέτουμε $\mathbf{A} = [\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]^t \mathbf{\Sigma}^{-1} [\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]$ και εύκολα αποδεικνύουμε ότι είναι θετικά ορισμένος. Πράγματι,

$$[y_1 \quad y_2]\mathbf{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = [y_1\mathbf{m} + y_2\mathbf{1}]^t \mathbf{\Sigma}^{-1} [y_1\mathbf{m} + y_2\mathbf{1}]^t$$

οπότε προκύπτει το ζητούμενο λόγω του ότι ο πίνακας $\mathbf{\Sigma}^{-1}$ είναι θετικά ορισμένος. Σημειώστε ότι ο $\mathbf{\Sigma}$ είναι αντιστρέψιμος αν $\mathbf{w}^t \mathbf{\Sigma} \mathbf{w} = \sigma > 0$ διότι από το θεώρημα ;; προκύπτει ότι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{\Sigma}$ είναι αυστηρά θετικές και από τις ανάλογες ιδιότητες των ιδιοτιμών (δες ;;) προκύπτει ότι είναι αντιστρέψιμος. Επίσης, ο αντίστροφος του θα έχει ως ιδιοτιμές τις $\frac{1}{\lambda_i}$ οι οποίες θα είναι όλες θετικές και επομένως πάλι από το θεώρημα (από το αντίστροφο του τώρα) ;; προκύπτει ότι είναι και αυτός θετικά ορισμένος.

Αντικαθιστώντας τον πίνακα $\mathbf{A}$ προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2}\mathbf{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Αντιστρέφοντας τον $\mathbf{A}$ υπολογίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{w}$

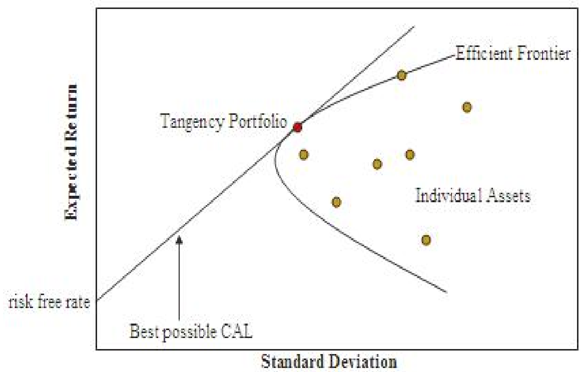
και έχουμε

$$\mathbf{w} = \mathbf{\Sigma}^{-1}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} m_0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την διακύμανση έχοντας το διάνυσμα $\mathbf{w}$. Έχουμε ότι

$$\sigma^2 = \mathbf{w}^t\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} = \frac{A_{11} - 2A_{12}m_0 + A_{14}m_0^2}{|A|}$$

όπου $\mathbf{A}$ ο 2×2 που ορίσαμε παραπάνω. Λύνοντας ως προς m_0 παίρνουμε δυο λύσεις. Το γράφημα του m_0 συναρτήσει της σ^2 είναι στο σχήμα 1.



Σχήμα 1: Μπορούμε να σχεδιάσουμε την μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου συναρτήσει της διακύμανσης του οπότε θα έχουμε το παραπάνω σχήμα. Τα χαρτοφυλάκια τα οποία βρίσκονται στο πάνω μέρος της καμπύλης είναι χαρτοφυλάκια ελάχιστης διακύμανσης και ονομάζονται αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια ενώ η καμπύλη ονομάζεται αποτελεσματική μεθόριος.

Επιπλέον μπορεί να αποδειχθεί το παρακάτω θεώρημα, δείτε [;] το οποίο αναφέρεται σε χαρτοφυλάκια με τον ίδιο πίνακα συνδιακυμάνσεων και τις ίδιες μέσες τιμές των αποδόσεων των μετοχών.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 (Θεώρημα διαχωρισμού δυο κεφαλαίων) *Έστω x_1 και x_2 δυο χαρτοφυλάκια ελάχιστης διακύμανσης με μέσες αποδόσεις m_1 και m_2 αντίστοιχα και τέτοιες ώστε $m_1 \neq m_2$. Τότε*

(i) *κάθε χαρτοφυλάκιο* x_3 *ελάχιστης διακύμανσης θα είναι γραμμικός συνδυασμός των χαρτοφυλακίων* x_1 *και* x_2.

(ii) *κάθε χαρτοφυλάκιο* x_3 *το οποίο είναι γραμμικός συνδυασμός των* x_1 *και* x_2*, δηλαδή* $x_3 = ax_1+(1-a)x_2$*, είναι χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διακύμανσης.*

(iii) *κάθε χαρτοφυλάκιο* x_3 *τέτοιο ώστε* $x_3 = ax_1 + (1-a)x_2$ *όπου* $a \in [0,1]$ *και* x_1, x_2 *αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια είναι επίσης αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα χρησιμοποιήσουμε την μορφή της λύσης του προβλήματος βελτιστοποίησης.

(i) Έστω ότι m_3 είναι η μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου x_3. Διαλέγουμε κάποιο $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$m_3 = am_1 + (1-a)m_2$$

Θα αποδείξουμε ότι $x_3 = ax_1+(1-a)x_2$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x_3 &= \mathbf{\Sigma}^{-1}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} m_3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{\Sigma}^{-1}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} am_1 + (1-a)m_2 \\ a + (1-a) \end{pmatrix} \\ &= a\mathbf{\Sigma}^{-1}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} m_1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-a)\mathbf{\Sigma}^{-1}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} m_2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= ax_1 + (1-a)x_2 \end{aligned}$$

(ii) Η απόδειξη γίνεται με την αντίστροφη λογική όπως στο πρώτο μέρος.

(iii) Παρόμοια με το (ii) με την επιπλέον παρατήρηση ότι $m_1 \leq m_3 \leq m_2$ όταν $m_1 \leq m_2$ και $a \in [0, 1]$.

□

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2 *Λύνοντας το παραπάνω πρόβλημα βελτιστοποίησης ορισμένα από τα w_i μπορεί να προκύψουν αρνητικά. Αυτό σημαίνει ότι ο επενδυτής θα δανεισθεί πλήθος μετοχών της i μετοχής, θα τις πουλήσει στην σημερινή τιμή της αγοράς αλλά θα είναι υποχρεωμένος* *να τις επιστρέψει στο μέλλον στον δανειστή του (short selling). Η κίνηση αυτή μπορεί να έχει απεριόριστη ζημιά στον επενδυτή, αφού η αξία της μετοχής μπορεί (θεωρητικά) να αυξηθεί απεριόριστα στο μέλλον ενώ ο επενδυτής θα είναι υποχρεωμένος να αγοράσει ακριβά τις μετοχές τις οποίες δανείστηκε και πρέπει να επιστρέψει. Προκειμένου η πιθανή ζημιά του επενδυτή να είναι άνω φραγμένη θα πρέπει να αγοράσει και ένα συμβόλαιο αγοράς (**call option**) ανά μετοχή προκειμένου να εξασφαλιστεί. Τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης έχουν κυρίως τον ρόλο της εξασφάλισης του επενδυτή. Παρόλα αυτά όμως μπορεί κάποιος να τα χρησιμοποιήσει για λόγους κερδοσκοπίας ακριβώς όπως τις μετοχές, ειδικά όταν αυτά τα συμβόλαια είναι διαπραγματεύσιμα στην χρηματιστηριακή αγορά. Για παράδειγμα μπορεί κάποιος να αγοράσει ένα συμβόλαιο αγοράς ή πώλησης με την προσδοκία ότι θα ανέβει η αξία του συμβολαίου και θα το πουλήσει ακριβότερα, πριν την λήξη του προφανώς.* □

Στην περίπτωση που επιπλέον απαιτήσουμε τα $w_i \geq$

0 τότε αυτό πρέπει να συμπεριληφθεί στις προϋποθέσεις 1 (δείτε [;]).

Στην συνέχεια θα δώσουμε τρεις οπτικές βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου με την επιπλέον προϋπόθεση ότι $w_i \geq 0$ θεωρώντας χαρτοφυλάκια με μικρό πλήθος μετοχών έτσι ώστε οι υπολογισμοί να είναι εφικτοί.

0.0.1 Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου ελάχιστης διακύμανσης με τρεις μετοχές

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διακύμνανσης το οποίο να αποτελείται από τρεις μετοχές. Η διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου είναι ως εξής

$$\begin{aligned} \sigma &= f(w_1, w_2, w_3) \\ &= w_1^2\sigma_1 + w_2^2\sigma_2 + w_3^2\sigma_3 + 2w_1w_2\sigma_{12} + 2w_1w_3\sigma_{13} + 2w_2w_3\sigma_{23} \end{aligned}$$

όπου $\sigma_i = \sigma_{ii}$. Η μέση τιμή της απόδοσης του χαρτοφυλακίου είναι ίση με

$$m_1w_1 + m_2w_2 + m_3w_3 = m_0 \tag{4}$$

Δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε τίποτε όταν ισχύει $m_1 = m_2 = m_3$ οπότε θα υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $m_1 \neq m_2$.

Προφανώς θα πρέπει να ισχύει ότι

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1 \tag{5}$$

Από τις 4 και 5 προκύπτει ότι

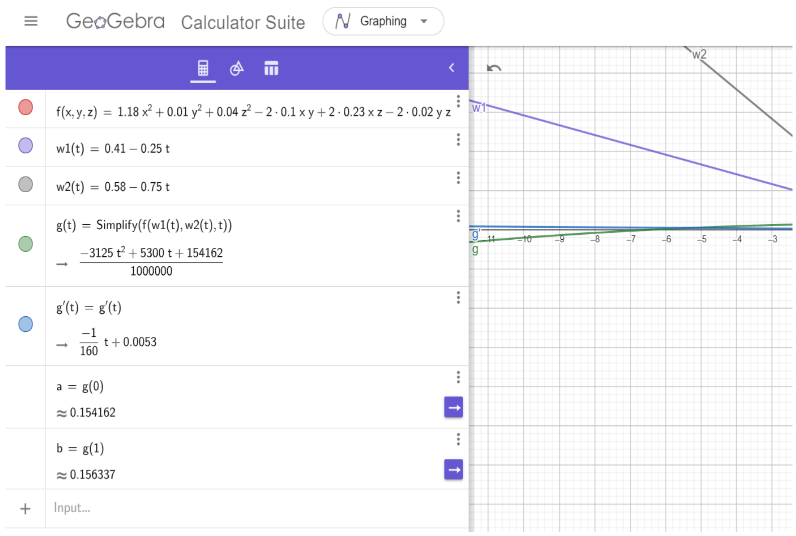
$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{t(m_2 - m_3) + m_0 - m_2}{m_1 - m_2} \\ w_2 &= \frac{t(m_3 - m_1) + m_1 - m_0}{m_1 - m_2} \end{aligned}$$

όπου $t = w_3$. Στην συνέχεια αντικαθιστούμε τα w_1, w_2 στην $f(w_1, w_2, w_3)$ οπότε προκύπτει συνάρτηση μιας μεταβλητής, της μεταβλητής t. Δηλαδή θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση ως προς t σε όλο το $\mathbb{R}$ αν δεν έχουμε κάποια επιπλέον απαίτηση για τα w_1, w_2, w_3.

Αν επιπλέον θέλουμε τα w_1, w_2, w_3 να είναι θετικά τότε θα πρέπει να απαιτήσουμε το t να κινείται στο κατάλληλο υποσύνολο του $[0, 1]$ στο οποίο τα w_1, w_2 να είναι θετικά και άρα να ελαχιστοποίησουμε την διακύμανση ορισμένη στο διάστημα αυτό. Αν $m_1 - m_2 > 0$ τότε η απαίτηση $w_1 \geq 0$ σημαίνει ότι $t(m_2 - m_3) +$

$m_0 - m_2 \geq 0$ και η απαίτηση $w_2 \geq 0$ σημαίνει ότι $t(m_3 - m_1) + m_1 - m_0 \geq 0$. Διαλέγουμε το διάστημα στο οποίο θα κινείται το t έτσι ώστε να είναι υποσύνολο του $[0, 1]$ και ταυτόχρονα να ικανοποιούνται και οι δυο απαιτήσεις. Αν αυτό δεν γίνεται τότε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης δεν έχει λύση. Παρόμοια και στην περίπτωση που $m_1 - m_2 < 0$.

Στο επόμενο σχήμα δείτε πως μπορούμε να υπολογίσουμε μέσω του Geogebra την συνάρτηση $g(t) = f(w_1, w_2, t)$ θέτοντας $w_3 = t$ και αντικαθιστώντας τα w_1, w_2.



Σχήμα 2

0.0.2 Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου μέγιστης απόδοσης με δυο μετοχές

Μια άλλη οπτική βελτιστοποίησης είναι να βρεθεί το διάνυσμα $w = (w_1, w_2)$ έτσι ώστε η διακύμανση του χαρτοφυλακίου να είναι ίση με ένα δοσμένο αριθμό σ_0 και να μεγιστοποιηθεί η μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου. Δηλαδή το μαθηματικό πρόβλημα είναι ως εξής:

$$\max_{(w_1,w_2)} (w_1 m_1 + w_2 m_2)$$

δεδομένου

$$\sigma = \sigma_1 w_1^2 + \sigma_2 w_2^2 + 2\sigma_{12} w_1 w_2 = \sigma_0$$

$$w_1 + w_2 = 1$$

$$w_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0$$

Για να επιλύσουμε το πρόβλημα μπορούμε να θέσουμε $w_2 = t$ και άρα $w_1 = 1 - t$ οπότε αντικαθιστούμε στην ισότητα της διακύμανσης. Τελικά θα έχουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$\max_{t \in [0,1]} (m_1(1-t) + m_2 t)$$

$$\sigma_1(1-t)^2 + \sigma_2 t^2 + 2\sigma_{12}(1-t)t - \sigma_0 = 0$$

Η δεύτερη ισότητα θα έχει πιθανόν δυο λύσεις, έστω t_1, t_2. Θα διαλέξουμε εκείνη η οποία ανήκει στο διάστημα $[0,1]$ (αν υπάρχει) και ταυτόχρονα μεγιστοποιεί την ζητούμενη ποσότητα.

0.0.3 Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου μέγιστης διαφοράς απόδοσης και διακύμανσης

Μια ακόμη οπτική είναι να μεγιστοποιήσουμε την διαφορά της μέσης τιμής και της διακύμανσης. Δηλαδή

$$\max_{(w_1,w_2)} \big(m_1 w_1 + m_2 w_2 - \lambda(\sigma_1 w_1^2 + \sigma_2 w_2^2 + 2\sigma_{12} w_1 w_2)\big)$$
$$\text{δεδομένου } w_1 + w_2 = 1$$
$$w_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0$$

για κάποιο δοσμένο $\lambda > 0$. Για να επιλύσουμε το πρόβλημα αυτό μπορούμε να θέσουμε $w_2 = t$ και άρα $w_1 = 1 - t$. Οπότε το αρχικό μας πρόβλημα ανάγεται στο

$$\max_{t \in [0,1]} (m_1(1-t) + m_2 t - \lambda(\sigma_1(1-t)^2 + \sigma_2 t^2 + 2\sigma_{12}(1-t)t))$$

0.0.4 Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου αποτελούμενου από μετοχές και χωρίς ρίσκο επένδυση

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις μπορούμε να κατασκευάσουμε κατάλληλα χαρτοφυλάκιο το οποίο να αποτελείται από μετοχές αλλά και από μια επένδυση χωρίς ρίσκο με γνωστή απόδοση $\hat{m}$. Προφανώς από μαθηματικής άποψης δεν θα αλλάξει τίποτε αφού μπορούμε να δούμε την χωρίς ρίσκο επένδυση ως μια επένδυση η οποία είναι τέτοια ώστε η διακύμανση της θα είναι ίση με το μηδέν καθώς και η συνδιακύμανση με οποιαδήποτε άλλη μετοχή θα είναι μηδέν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3 *Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις μπορούμε να βελτιστοποιήσουμε χαρτοφυλάκια αποτελούμενα από περισσότερες μετοχές αλλά τότε θα πρέπει να στραφούμε σε κατάλληλο μαθηματικό λογισμικό· ειδικά στην περίπτωση όπου απαιτούμε τα βάρη $w_1, \cdots, w_n$ να είναι θετικά. Παρατηρήστε ότι τα χαρτοφυλάκια ελάχιστης διακύμανσης με την επιπλέον προϋπόθεση $w_i \geq 0$ δεν είναι, εν γένει, αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια.*

Στο βιβλίο [;] μπορεί κανείς να δει περισσότερα για τη βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου σε συνεχή χρόνο.

0.0.5 Κίνδυνος Χρεοκοπίας

Έστω ότι έχουμε κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο του οποίου έχουμε υπολογίσει την μέση τιμή και την διακύμανση της απόδοσης. Τα στοιχεία αυτά αναφέρονται σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο, π.χ. ανά ημέρα, ανά μήνα κ.τ.λ.

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι: σε μια ημέρα, ποια είναι η μέγιστη ζημιά (σε Ευρώ) με πιθανότητα a;

Αν συμβολίσουμε με V_0 την σημερινή αξία του χαρτοφυλακίου και με V_t την αυριανή τότε το παραπάνω ερώτημα μετατρέπεται σε μαθηματικό πρόβλημα ως εξής: ποιο είναι το $x > 0$ (ποσό σε Ευρώ) έτσι ώστε

$$P(V_t - V_0 \leq -x) = 1 - a$$

Χρησιμοποιώντας την απόδοση του χαρτοφυλακίου, η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$P\left(\frac{V_t - V_0}{V_0} \leq -\frac{x}{V_0}\right) = 1 - a$$

όπου $\mu_t = \frac{V_t - V_0}{V_0}$ είναι η ημερήσια απόδοση του χαρτοφυλακίου.

Γνωρίζουμε την μέση τιμή m_0 και την διακύμανση σ^2 της απόδοσης και υποθέτουμε ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή m_0 και διακύμανση

σ^2. Με την υπόθεση αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε το κατάλληλο $x > 0$ το οποίο συνήθως συμβολίζεται με $VaR_a(t)$ όπου t είναι η χρονική περίοδος που μας ενδιαφέρει, π.χ. ανά ημέρα.

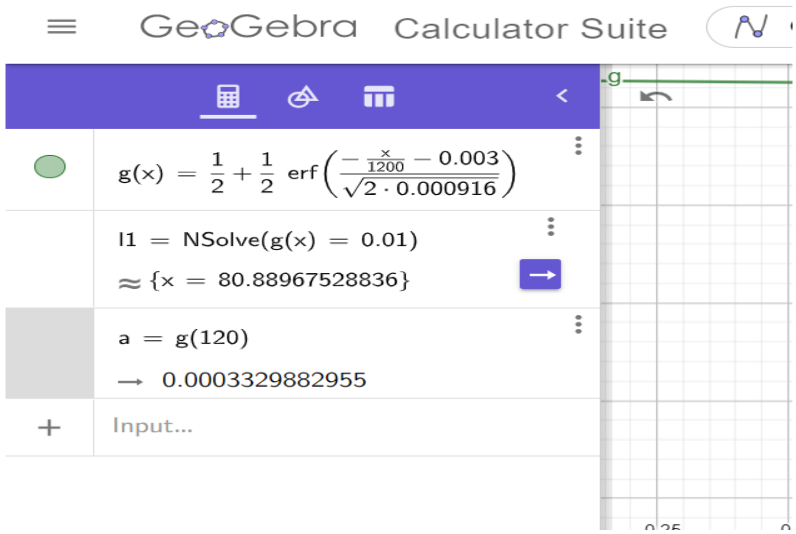
Εφόσον η απόδοση ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή m_0 και διακύμανση σ^2 τότε

$$P\left(\frac{V_t - V_0}{V_0} \leq -\frac{x}{V_0}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{V_0}} e^{-\frac{(t-m_0)^2}{2\sigma^2}} dt \quad (6)$$

Μπορούμε να συσχετίσουμε τα παραπάνω με την συνάρτηση σφάλματος $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ μέσω της σχέσης

$$P(Y \leq x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{x - m_0}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

όπου η Y ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή m_0 και διακύμανση σ^2.



Σχήμα 3: Θέτουμε την συνάρτηση $g(x)$ όπως περιγράψαμε. Για την ερώτηση ποια είναι η ελάχιστη ζημιά με πιθανότητα 0.01 δίνουμε την εντολή $NSolve(g(x) = 0.01)$ ενώ για την ερώτηση ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε ζημιά τουλάχιστον 120 Ευρώ γράφουμε $g(120)$.

Θα αποδείξουμε την σχέση αυτή με τον εξής τρόπο

$$
\begin{aligned}
P(Y \leq x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m_0)^2}{2\sigma^2}} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m_0}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-y^2} \sigma\sqrt{2} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m_0}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-y^2} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{\substack{22\\-y^2}} dy + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{x-m_0}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-y^2} dy \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x-m_0}{\sigma\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}
$$

Ξαναγυρνώντας στην 6 έχουμε

$$g(x) = P\left(\frac{V_t - V_0}{V_0} \leq -\frac{x}{V_0}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{-\frac{x}{V_0} - m_0}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

Στο σχήμα ;; φαίνεται πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Geogebra για τους παραπάνω υπολογισμούς.

Μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή της ζημιάς δεδομένου ότι η ζημιά θα ξεπεράσει ένα δεδομένο ποσό $p < 0$. Θα ισχύει

$$\mathbb{E}(V_t - V_0|\{V_t - V_0 < p\}) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi V^2\sigma^2}}\int_{-\infty}^{p} xe^{-\frac{(x-m_0V)^2}{2V^2\sigma^2}}dx}{\frac{1}{\sqrt{2\pi V^2\sigma^2}}\int_{-\infty}^{p} e^{-\frac{(x-m_0V)^2}{2V^2\sigma^2}}dx}$$