Σύγκλιση του Διωνυμικού μοντέλου στην εξίσωση των Black-Scholes και η επίλυση της

Νίκος Χαλιδιάς
Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

1 Δίκαιη τιμή πώλησης δικαιωμάτων μέσω του διωνυμικού μοντέλου

Έστω ένα παράγωγο με χρόνο λήξης T. Διαμερίζουμε το χρονικό διάστημα σε υποδιαστήματα μήκους $\delta > 0$ έτσι ώστε $N\delta = T$ για κάποιο $N \in \mathbb{N}$. Για αρκετά μικρό $\delta > 0$ υποθέτουμε ότι $ud = 1$ και ότι υπάρχει κάποιο $\sigma > 0$ τέτοιο ώστε $u = e^{\sigma\sqrt{\delta}}$. Αν $\hat{r}$ είναι το ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού της χωρίς ρίσκο επένδυσης τότε θεωρούμε το ισοδύναμο επιτόκιο r συνεχούς ανατοκισμού, δηλαδή είναι τέτοιο ώστε $e^r = 1 + \hat{r}$. Αρα 1 Ευρώ σε κάθε χρονική περίοδο δ τοκιζόμενο γίνεται $e^{r\delta}$. Παρατηρήστε ότι για οποιαδήποτε σ, r υπάρχει δ αρκετά μικρό έτσι ώστε $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta}} < e^{r\delta} < e^{\sigma\sqrt{\delta}} = u$. Διαλέγοντας αρκετά μικρό δ προκύπτει ότι στο διωνυμικό μοντέλο χρονικής περιόδου δ δεν υπάρχουν ευκαιρίες σίγουρου κέρδους.

Θεώρημα 1 *Το ποσό $e^{-r\delta}\Big(qV(t+\delta, uS) + (1-q)V(t+\delta, dS)\Big)$ είναι ίσο με την ελάχιστη δυνατή αξία του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή t έτσι ώστε οι αξίες του την χρονική στιγμή $t+\delta$ να είναι τουλάχιστον ίσες με $V(t+\delta, uS)$ και $V(t+\delta, dS)$* αν και μόνο αν *$d \le e^{r\delta} \le u$.*

Απόδειξη. Η $V(t, S)$ είναι η αξία του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή t το οποίο αποτελείται από a το πλήθος μετοχές και b ποσό σε επένδυση χωρίς ρίσκο, δηλαδή $V(t, S) = aS + b$. Οι αξίες του χαρτοφυλακίου, την χρονική στιγμή $t+\delta$, θα είναι $auS + be^{r\delta}$ και $adS + be^{r\delta}$. Σχηματίζουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned} auS + be^{r\delta} &= V(t+\delta, uS) \\ adS + be^{r\delta} &= V(t+\delta, dS) \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα με αγνώστους τα a, b προκύπτει ότι

$$a = \frac{V(t+\delta, uS) - V(t+\delta, dS)}{(u-d)S}, \quad b = \frac{V(t+\delta, dS)u - V(t+\delta, uS)d}{(u-d)e^{r\delta}}$$

Με απλούς υπολογισμούς, αντικαθιστώντας τα a, b, προκύπτει ότι

$$V(t, S) = e^{-r\delta}\Big(qV(t+\delta, uS) + (1-q)V(t+\delta, dS)\Big)$$

Δηλαδή, αν την χρονική στιγμή $t+\delta$ οι αξίες του χαρτοφυλακίου πρέπει να είναι τουλάχιστον ίσες με $V(t+\delta, uS)$ και $V(t+\delta, dS)$, τότε με το ποσό $e^{-r\delta}\Big(qV(t+\delta, uS) + (1-q)V(t+\delta, dS)\Big)$ μπορούμε να κατασκευάσουμε κατάλληλο χαρτοφυλάκιο για να έχουμε τις ζητούμενες τελικές αξίες.

- (Ευθύ) Έστω ότι $d \le e^{r\delta} \le u$. Θα αποδείξουμε ότι το ποσό $V(t, S) = e^{-r\delta}\Big(qV(t+\delta, uS) + (1-q)V(t+\delta, dS)\Big)$ είναι το ελάχιστο δυνατό έτσι ώστε το χαρτοφυλάκιο να έχει αξίες την χρονική στιγμή $t+\delta$ τουλάχιστον ίσες με $V(t+\delta, uS)$ και $V(t+\delta, dS)$. Έστω ότι υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ge 0$ τέτοια ώστε με το ποσό $V(t, S) - \varepsilon$ να μπορούμε να βρούμε κατάλληλα a', b' με $V(t, S) - \varepsilon = a'S + b'$ και $a'uS + b'e^{r\delta} = V(t+\delta, uS) + \varepsilon_1$, $a'dS + b'e^{r\delta} = V(t+\delta, dS) + \varepsilon_2$.

Λύνοντας τις εξισώσεις με αγνώστους τα a', b' προκύπτει ότι

$$
\begin{aligned}
a' &= a + \underbrace{\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{(u-d)S}}_{V_1} \\
b' &= b + \underbrace{\frac{\varepsilon_2 u - \varepsilon_1 d}{(u-d)e^{r\delta}}}_{V_2}
\end{aligned}
$$

Θα πρέπει να ισχύει επίσης ότι

$$V(t,S) - \varepsilon = a'S + b' = aS + b + V_1 S + V_2 = V(t,S) + V_1 S + V_2$$

Αντικαθιστώντας τα V_1 και V_2 προκύπτει η ισότητα

$$\frac{\varepsilon_1(e^{r\delta} - d) + \varepsilon_2(u - e^{r\delta})}{(u-d)e^{r\delta}} = -\varepsilon \tag{1}$$

Η ισότητα αυτή μπορεί να ικανοποιηθεί μόνο αν $e^{r\delta} \notin [d,u]$ οπότε οδηγούμαστε σε άτοπο.

- (Αντίστροφο) Υποθέτουμε ότι το ποσό $e^{-r\delta}\Big(qV(t+\delta,uS) + (1-q)V(t+\delta,dS)\Big)$ είναι το ελάχιστο δυνατό όπως το περιγράψαμε παραπάνω. Θα αποδείξουμε ότι υποχρεωτικά ισχύει η ανισότητα $d \le e^{r\delta} \le u$. Έστω ότι δεν ισχύει και ας υποθέσουμε ότι $e^{r\delta} < d$. Τότε, για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ διαλέγουμε $\varepsilon_2 = 0$ και $\varepsilon_1 = \varepsilon\frac{(u-d)e^{r\delta}}{d-e^{r\delta}}$ και επομένως τα a', b' όπως κατασκευάστηκαν παραπάνω οδηγούν στις ζητούμενες τελικές αξίες οπότε οδηγούμαστε σε άτοπο με την υπόθεση ότι το ποσό $e^{-r\delta}\Big(qV(t+\delta,uS) + (1-q)V(t+\delta,dS)\Big)$ είναι το ελάχιστο δυνατό. Παρόμοια και στην περίπτωση που $u < e^{r\delta}$. $\square$

Ορισμός 1 (Δίκαιη Τιμή Πώλησης Συμβολαίου) *Αν $d \le e^{r\delta} \le u$ τότε η αξία ενός Ευρωπαϊκού συμβολαίου όπως υπολογίζεται από το διωνυμικό μοντέλο ορίζεται ως η δίκαιη τιμή διότι είναι το ελάχιστο ποσό με το οποίο κάποιος μπορεί να κατασκευάσει χαρτοφυλάκιο με τις ζητούμενες τελικές αξίες. Παρόμοια για Αμερικανικά ή Bermudan συμβόλαια η αξία που προκύπτει από τον τύπο*

$$\max\{X(t,S), e^{-r\delta}\Big(qV(t+\delta,uS) + (1-q)V(t+\delta,dS)\Big)\}$$

αν ο αγοραστής έχει δικαίωμα εξάσκησης και από τον τύπο $e^{-r\delta}\Big(qV(t+\delta,uS)+(1-q)V(t+\delta,dS)\Big)$ όταν δεν έχει δικαίωμα εξάσκησης ορίζεται ως η δίκαιη τιμή του συμβολαίου όπου $X(t,S)$ είναι η απολαβή την χρονική στιγμή t και όταν η μετοχή έχει αξία S. Σημειώστε ότι η $X(t,S)$ μπορεί να είναι εξαρτώμενη από το συγκεκριμένο μονοπάτι της μετοχής (path-dependent options). $\square$

Παρατήρηση 1 *Αν $d = e^{r\delta}$ τότε με το ποσό $e^{-r\delta}\Big(qV(t+\delta,uS)+(1-q)V(t+\delta,dS)\Big)$, θέτοντας $\varepsilon = \varepsilon_2 = 0$, μπορούμε να κατασκευάσουμε χαρτοφυλάκιο με τελικές αξίες $V(t+\delta,uS) + \varepsilon_1$ και $V(t+\delta,dS)$ για οποιοδήποτε ε_1. Δηλαδή, ενώ δεν μπορούμε με μικρότερο ποσό να έχουμε τις ζητούμενες τελικές αξίες μπορούμε με το ποσό αυτό να έχουμε μεγαλύτερη αξία στην περίπτωση που η μετοχή ανέβει. Παρόμοια και στην περίπτωση που $u = e^{r\delta}$. Δηλαδή σε αυτές τις δυο περιπτώσεις υπάρχει μονοπάτι (της τιμής της μετοχής) στο οποίο ο αγοραστής δεν μπορεί να εξασκήσει κατάλληλα έτσι ώστε να μην περισσέψουν χρήματα στο αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο.* $\square$

Πρόταση 1 *Αν $d < e^{r\delta} < u$ τότε ο αγοραστής του συμβολαίου (είτε Ευρωπαϊκού είτε Αμερικανικού είτε Bermudan) μπορεί να εξασκήσει κατάλληλα έτσι ώστε να μην περισσέψουν χρήματα στο αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο.*

Απόδειξη. Αν $d < e^{r\delta} < u$ τότε από την ισότητα 1 προκύπτει ότι $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Αν το συμβόλαιο είναι Ευρωπαϊκού τύπου τότε προκύπτει ότι κατά την λήξη του συμβολαίου το αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο θα αξίζει ακριβώς όσο και η απολαβή του αγοραστή. Στην περίπτωση του Αμερικανικού συμβολαίου θα αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποιο $k = 0, 1, 2 \cdots, N$ τέτοιο ώστε

$$V(k\delta, S) = X(k\delta, S)$$

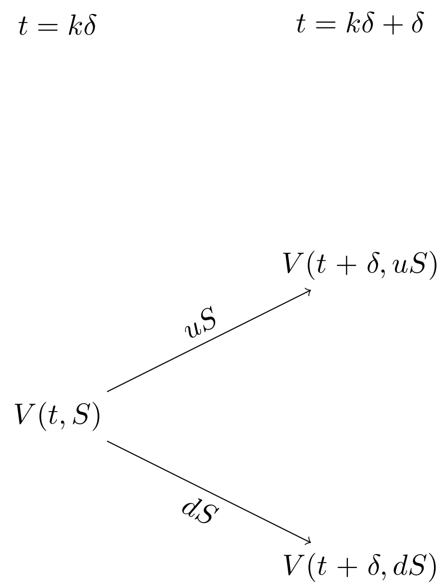
Έστω ότι δεν υπάρχει $k = 0, 1, \cdots, N-1$ τέτοιο ώστε $V(k\delta, S) = X(k\delta, S)$. Τότε θα ισχύει για κάθε $k = 0, 1, \cdots, N-1$

$$V(k\delta, S) = e^{-r\delta}\Big(qV((k+1)\delta, uS) + (1-q)V((k+1)\delta, dS)\Big)$$

Αυτό σημαίνει ότι η αξία του Αμερικανικού θα συμπίπτει με αυτή του Ευρωπαϊκού σε κάθε χρονική στιγμή επομένως στην λήξη του συμβολαίου το αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο θα αξίζει όσο και η απολαβή. Δηλαδή, αν για όλα τα $k = 0, 1, \cdots, N-1$ ισχύει ότι $V(k\delta, S) > X(k\delta, S)$ τότε υποχρεωτικά θα ισχύει $V(N\delta, S) = X(N\delta, S)$. □

Παρατήρηση 2 *Ο ορισμός της δίκαιης τιμής πώλησης όπως ορίσθηκε παραπάνω είναι ανεξάρτητος από την δυνατότητα ο αγοραστής του συμβολαίου να κατασκευάσει αντίθετο ή παρόμοιο χαρτοφυλάκιο. Παρατηρήστε ότι καθώς το $\delta \to 0$ η δίκαιη τιμή αλλάζει. Παρακάτω θα αποδείξουμε ότι συγκλίνει επομένως είναι ίσως λογικότερο να ορίσουμε ως δίκαιη τιμή το όριο της $V(t, S; \delta)$ καθώς $\delta \to 0$. Η παραπάνω οπτική είναι ιδιαίτερα απλή συγκρινόμενη με την αντίστοιχη πιθανοθεωρητική προσέγγιση. Στην περίπτωση των Αμερικανικών συμβολαίων μάλιστα θα λέγαμε ότι η πιθανοθεωρητική προσέγγιση είναι «απαγορευτική» από την άποψη της μαθηματικής πολυπλοκότητας (δείτε για παράδειγμα το [2], Θεώρημα 423).* □

2 Σύγκλιση του Διωνυμικού Μοντέλου στην εξίσωση των Black-Scholes



Σχήμα 1: Διωνυμικό δέντρο μιας περιόδου. Αν οι αξίες την χρονική στιγμή $t = k\delta+\delta$ πρέπει να ίσες με $V(t+\delta, uS)$ και $V(t+\delta, dS)$ τότε η ελάχιστη τιμή του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή $t = k\delta$ είναι ίση με $V(t,S) = e^{-r\delta}\Big(qV(t+\delta, uS) + (1-q)V(t+\delta, dS)\Big)$ όπου $q = \frac{e^{r\delta}-d}{u-d}$ όταν $d < e^{r\delta} < u$. Σημειώστε ότι $V(t,S) = aS + b$ όπου a είναι το πλήθος των μετοχών την χρονική στιγμή t και b το ποσό την χρονική στιγμή t σε επένδυση χωρίς ρίσκο με επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού r. Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι η $V(t,S;\delta)$ συγκλίνει καθώς $\delta \to 0$ σε μια συνάρτηση $V(t,S)$ η οποία ικανοποιεί μια εξίσωση με μερικές παραγώγους παραβολικού τύπου.

Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Taylor στη συνάρτηση $f(x) = e^x$ αναπτύσσοντας γύρω από το μηδέν (δηλαδή $x_0 = 0$) και διαλέγοντας $h = \sigma\sqrt{\delta}$.

Γράφουμε τότε

$$\begin{aligned}
u &= e^{\sigma\sqrt{\delta}} = 1 + \sigma\sqrt{\delta} + \frac{\sigma^2}{2}\delta + o(\delta),\\
d &= e^{-\sigma\sqrt{\delta}} = 1 - \sigma\sqrt{\delta} + \frac{\sigma^2}{2}\delta + o(\delta),\\
e^{r\delta} &= 1 + r\delta + o(\delta),\\
q &= \frac{e^{r\delta} - d}{u-d} = 1/2 + \frac{1}{2\sigma}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\delta} + o\left(\sqrt{\delta}\right)
\end{aligned}$$

όπου με $o(\delta)$ εννοούμε μια ποσότητα η οποία αν διαιρεθεί με το δ συγκλίνει στο μηδέν καθώς $\delta \to 0$.

Συμβολίζουμε με $V(t,S)$ την αξία ενός Ευρωπαϊκού συμβολαίου την χρονική στιγμή t και όταν η τιμή της μετοχής είναι S. Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό μοντέλο έχουμε

$$V(t,S) = e^{-r\delta}\Big(qV(t+\delta, uS) + (1-q)V(t+\delta, dS)\Big)$$

Συμβολίζοντας με

$$V = V(t,S), \quad V^u = V(t+\delta, uS), \quad V^d = V(t+\delta, dS)$$

και

$$J_\delta V(t,S) = -e^{r\delta} V + qV^u + (1-q)V^d$$

έχουμε από το διωνυμικό μοντέλο ότι

$$J_\delta V(t,S) = 0$$

Στο επόμενο θεώρημα θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Taylor για συναρτήσεις δυο μεταβλητών το οποίο και διατυπώνουμε παρακάτω.

Θεώρημα 2 *Έστω η συνάρτηση δυο μεταβλητών $f(x,y)$ η οποία υποθέτουμε ότι έχει συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι $n+1$ τάξης. Τότε ισχύει το εξής,*

$$\begin{aligned} & f(a+h,b+k) \\ = \ & f(a,b) + (hD_x + kD_y)f(a,b) + \cdots + \frac{1}{n!}(hD_x + kD_y)^n f(a,b) \\ & + \frac{1}{(n+1)!}(hD_x + kD_y)^{n+1} f(a+\theta h, b+\theta k) \end{aligned}$$

όπου $\theta \in (0,1)$.

Σημειώστε ότι

$$(hD_x + kD_y)f(a,b) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = hf_x(a,b) + kf_y(a,b)$$

Θεώρημα 3 *Αν υποθέσουμε ότι η $V(t,S)$ είναι αρκετά ομαλή τότε*

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{J_\delta V(t,S)}{\delta} = L_{BS} V(t,S)$$

όπου

$$L_{BS}V(t,S) = V_t(t,S) + \frac{\sigma^2 S^2}{2} V_{SS}(t,S) + rSV_S(t,S) - rV(t,S)$$

και ονομάζεται τελεστής Black-Scholes.

Απόδειξη. Διαλέγουμε $h = \delta$ και $k = (u-1)S$, αναπτύσσουμε την V^u κατά Taylor γύρω από το (t,S) και έπειτα αντικαθιστούμε τα u, d με τα αντίστοιχα αναπτύγματα τους. Παρόμοια για την V^d όπου εκεί διαλέγουμε $k = (d-1)S$. Έτσι έχουμε

$$V^u = V(t+\delta, uS) = V(t+\delta, S+(u-1)S) = V + \delta V_t + (u-1)SV_S + \frac{1}{2}(u-1)^2 S^2 V_{SS} + o(\delta)$$

$$V^d = V(t+\delta, dS) = V(t+\delta, S+(d-1)S) = V + \delta V_t + (d-1)SV_S + \frac{1}{2}(d-1)^2 S^2 V_{SS} + o(\delta)$$

Παρατηρήστε ότι ο όρος

$$\frac{1}{2}(\delta D_t + (u-1)SD_S)^2 V = \frac{1}{2}(u-1)^2 S^2 V_{SS} + o(\delta)$$

Οι υψηλότερης τάξης όροι $\frac{1}{n!}(\delta D_t + (u-1)SD_S)^n V$ για $n \geq 3$ είναι τάξης $o(\delta)$. Παρόμοια και για την V^d.

Όμως

$$\begin{aligned}(u-1)S &= \sigma S\sqrt{\delta}+\sigma^2S^2\delta+o(\delta)\\ (d-1)S &= -\sigma S\sqrt{\delta}+\sigma^2S^2\delta+o(\delta)\end{aligned}$$

Αρα

$$\begin{aligned}V^u-V &= \sigma SV_S\sqrt{\delta}+LV\delta+o(\delta),\\ V^d-V &= -\sigma SV_S\sqrt{\delta}+LV\delta+o(\delta)\end{aligned}$$

όπου

$$LV=V_t+\frac{\sigma^2}{2}SV_S+\frac{\sigma^2S^2}{2}V_{SS}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}0=J_\delta V(t,S) &= -e^{r\delta}V+qV^u+(1-q)V^d\\ &= -(1+r\delta+o(\delta))V+qV^u+(1-q)V^d\\ &= -(q+(1-q))V-r\delta V-o(\delta)V+qV^u+(1-q)V^d\\ &= q(V^u-V)+(1-q)(V^d-V)-r\delta V-o(\delta)V\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα V^u-V, V^d-V και q με τα αναπτύγματα τους θα έχουμε τελικά

$$0=J_\delta V(t,S)=\delta L_{BS}V+o(\delta)$$

Διαιρώντας με δ και λαμβάνοντας το όριο καθώς $\delta\to 0$ προκύπτει ότι η συνάρτηση $V(t,S)$ ικανοποιεί την εξίσωση των Black-Scholes. Δηλαδή η αξία του συμβολαίου τη χρονική στιγμή t και όταν η τιμή της μετοχής είναι ίση με S δίνεται από την παρακάτω μερική διαφορική εξίσωση

$$V_t(t,S)+\frac{\sigma^2S^2}{2}V_{SS}(t,S)+rSV_S(t,S)-rV(t,S)=0 \qquad (2)$$

Αν συγκεκριμένα έχουμε ένα συμβόλαιο αγοράς τότε πρέπει επιπλέον να ικανοποιείται και μια τελική συνθήκη η οποία είναι

$$V(T,S)=(S-K)^+$$

όπου K είναι η τιμή εξάσκησης. □

Παρατήρηση 3 *Η περίπτωση των Αμερικανικών παραγώγων είναι μαθηματικά πιο περίπλοκη και παραπέμπουμε στην εργασία [4].*

3 Μετασχηματισμός της εξίσωσης στην εξίσωση θερμότητας

Θα δώσουμε στην συνέχεια τους κατάλληλους μετασχηματισμούς ούτως ώστε η εξίσωση αυτή να μετασχηματισθεί στην εξίσωση θερμότητας. Θέτουμε

$$\begin{aligned}t &= T-\tfrac{2\tau}{\sigma^2}, && \tau\in[0,\tfrac{\sigma^2}{2}T]\\ S &= e^x, && x\in\mathbb{R}\\ V(t,S) &= v(\tau,x), && x\in\mathbb{R},\quad \tau\in[0,\tfrac{\sigma^2}{2}T]\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους της V και έχουμε, σημειώνοντας ότι $V(t,S) = v\left(\frac{\sigma^2}{2}(T-t), \ln S\right)$

$$\begin{aligned} V_t &= -\frac{\sigma^2}{2} v_\tau \\ V_s &= \frac{1}{S} v_x \\ V_{SS} &= -\frac{1}{S^2} v_x + \frac{1}{S^2} v_{xx} \end{aligned}$$

Τότε η αρχική διαφορική εξίσωση γίνεται, θέτοντας $k = \frac{2r}{\sigma^2}$,

$$v_\tau = v_{xx} + (k-1)v_x - kv$$

έχοντας χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι η V ικανοποιεί την 2.

Στην συνέχεια θέτουμε

$$v(\tau, x) = e^{ax+b\tau} u(\tau, x)$$

Αντικαθιστώντας την v στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει η παρακάτω

$$bu + u_\tau = a^2 u + 2a u_x + u_{xx} + (k-1)(au + u_x) - ku$$

Προκειμένου να απλουστευθεί διαλέγουμε

$$a = -\frac{1}{2}(k-1), \quad b = -\frac{1}{4}(k+1)^2$$

Τελικά προκύπτει ότι η συνάρτηση V είναι λύση της 2 αν και μόνο αν η $u(\tau, x)$ ικανοποιεί την εξίσωση θερμότητας

$$u_\tau = u_{xx}, \quad \tau \in [0, \frac{\sigma^2}{2} T], \quad x \in \mathbb{R}$$

Στην περίπτωση όπου έχουμε μια τελική συνθήκη στην 2, όπως για παράδειγμα

$$V(T,S) = F(S), \quad S > 0$$

όπου $F(\cdot)$ δοσμένη συνάρτηση, τότε η αντίστοιχη μετασχηματισμένη εξίσωση θερμότητας παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} u_\tau &= u_{xx}, && \tau \in [0, \tfrac{\sigma^2}{2} T], \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) &= e^{\frac{1}{2}(k-1)x} F(e^x), && x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Συμβολίζοντας με $f(x) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x} F(e^x)$ έχουμε ότι το πρόβλημα αυτό έχει ως λύση την

$$u(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\tau\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-\frac{(x-z)^2}{4\tau}} dz, \quad \tau \in [0, \frac{\sigma^2}{2} T], \quad x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

4 Αξία Ευρωπαϊκού Συμβολαίου Αγοράς (Call Option)

Ας δούμε ποια είναι η αξία ενός Ευρωπαϊκού συμβολαίου αγοράς με βάση την συνάρτηση $V(t,S)$ που έχουμε υπολογίσει. Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση $F(x) = (x-K)^+$ όπου K είναι η τιμή εξάσκησης.

Θα υπολογίσουμε την συνάρτηση $u(\tau,x)$ από την σχέση 3 κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y=\frac{z-x}{\sqrt{2\tau}}$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} u(\tau,x) &= \frac{1}{2\sqrt{\tau\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-\frac{(x-z)^2}{4\tau}}dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln K-\ln S}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+y\sqrt{2\tau})}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy - \frac{K}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln K-\ln S}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+y\sqrt{2\tau})}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $f(x)=e^{\frac{1}{2}(k-1)x}\max\{e^x-K,0\}$.

Το πρώτο ολοκλήρωμα στην τελευταία σχέση γίνεται

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln K-\ln S}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+y\sqrt{2\tau})}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln K-\ln S}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}e^{-\frac{1}{2}(y-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2}dy \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln K-\ln S}{\sqrt{2\tau}}-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2}d\rho \\ &= e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}N(d_1) \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} N(d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{1}{2}u^2}du \\ &\text{και} \\ d_1 &= \frac{\ln S-\ln K}{\sqrt{2\tau}}+\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau} = \frac{\ln\frac{S}{K}+r(T-t)+\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{aligned}$$

Παρόμοια έχουμε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln K-\ln S}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+y\sqrt{2\tau})}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy = e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau}N(d_2)$$

όπου

$$N(d)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{1}{2}u^2}du \quad \text{και} \quad d_2=\frac{\ln\frac{S}{K}+r(T-t)-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει την σχέση

$$N(d)=1-N(-d)$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} N(-d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \\ &= 1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \\ &= 1-\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{u^2}{2}}du \quad (\text{θέσαμε } t=-u) \\ &= 1-N(d) \end{aligned}$$

Οπότε

$$V(t,S) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Μπορούμε να συσχετίσουμε την $V(t,S)$ με την συνάρτηση σφάλματος $\mathrm{erf}(x)$ και να πάρουμε το εξής

$$V(t,S) = S\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{d_1}{\sqrt{2}}\right)\right) - Ke^{-r(T-t)}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{d_2}{\sqrt{2}}\right)\right) \tag{4}$$

Η συσχέτιση αυτή προκύπτει εύκολα ως εξής

$$\begin{aligned}
N(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-y^2}\sigma\sqrt{2}dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-y^2}dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-y^2}dy + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-y^2}dy \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

Στο [3] μπορείτε να κατεβάσετε ένα Excel αρχείο με το οποίο μπορείτε να κάνετε διάφορους χρηματοοικονομικούς υπολογισμούς.

Αναφορές

[1] Νίκος Χαλιδιάς, *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Οικονομολόγους και Μηχανικούς*, εκδόσεις Broken Hill, 2021, κωδικός Ευδόξου 98785217.

[2] Νίκος Χαλιδιάς, Βασικές Αρχές Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών, Broken Hill, 2018.

[3] Εργαλείο Excel για χρηματοοικονομικούς υπολογισμούς.

[4] Lishang Jiang and Min Dai, *Convergence of Binomial Tree Methods for European/American Path-dependent Options*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 42, No. 3, pp. 1094-1109, 2004.