

Δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων : Δυναμοσειρές και σειρές Taylor

1 Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \sum_{n=0}^{\infty} (x+5)^n, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x+1)^n, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}.$$

2 Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n \sqrt{n}}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

3 Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+3)^{2n+1}}{n!}.$$

4 Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n^2+3}}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{5^n}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n(n^2+1)}.$$

5 Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n} x^n}{3^n}, \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[n]{n} (2x+5)^n, \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} (\ln n) x^n.$$

6 Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} n!(x-4)^n, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x+2)^n}{n2^n}, \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n (n+1)(x-1)^n.$$

7 Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n(\ln n)^2}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

8 Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x+1)^{n+1}}{2n+2}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{\sqrt{n}}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-\sqrt{2})^{2n+1}}{2^n}.$$

9 Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης και το όριο των δυναμοσειρών,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{9^n}.$$

10 Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης και το όριο των δυναμοσειρών,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)^n, \sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n.$$

11 Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης και το όριο των δυναμοσειρών,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2+1}{3}\right)^n, \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n.$$

12 Έστω η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x-3}{2^n}$. Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης και το άθροισμα. Έπειτα να παραγωγισθεί και ολοκληρωθεί όρο προς όρο να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών και το άθροισμα τους.

13 Να βρεθεί το άθροισμα $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. (Υποδ: είναι γνωστό (γιατί;) ότι $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Παραγωγίστε τη όρο προς όρο και πολλαπλασιάστε με x κατά μέλη. Θέτοντας $x = 1/2$ έχουμε το ζητούμενο.)

14 Να βρεθεί η σειρά Taylor των e^{-x} , $\frac{1}{1+x}$, $\sin 3x$.

15 Να βρεθεί η σειρά Taylor των $7 \cos(-x)$, $\cos hx$, $\sin hx$.

16 Υπολογίστε το σφάλμα όταν υπολογίζουμε το $1 - \frac{x^2}{2}$ αντί του $\cos x$ για $|x| < 0.5$.

17 Υπολογίστε το σφάλμα της γραμμικής προσέγγισης της $\sqrt{1+x} \simeq 1 + x/2$ για $|x| < 10^{-2}$.

18 Δείξτε ότι $1 - x^2/6 < \frac{\sin x}{x} < 1$, $x \neq 0$. (Υποδ: χρησιμοποιήστε το Θεώρημα εκτίμησης σφάλματος της εναλλασσόμενης σειράς).

19 Έστω $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ με διάστημα σύγκλισης $(-c, c)$. Δείξτε ότι αν η f είναι άρτια τότε $a_1 = a_3 = \dots = a_{2n+1} = \dots = 0$, ενώ αν είναι περιπτή τότε $a_0 = a_2 = \dots = a_{2n} = \dots = 0$.

20 Να βρεθεί ένα πολυώνυμο που προσεγγίζει τις $F(x) = \int_0^x \sin t^2 dt$, $F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$ στο διάστημα $[0, 1]$.

21 Υπολογίστε το $\pi/4$ με σφάλμα μικρότερο του 10^{-4} . (Υποδ: χρησιμοποιήστε την σειρά του \arctan και το Θεώρημα της εναλλασσόμενης σειράς).

22 Να βρεθεί ένα πολυώνυμο που προσεγγίζει την $F(x) = \int_0^x \arctan t dt$ στα διαστήματα $[0, 1]$, $[0, 0.5]$ με σφάλμα μικρότερο του 10^{-3} .

23 Να βρεθεί ένα πολυώνυμο που προσεγγίζει την $F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ στα διαστήματα $[0, 1]$, $[0, 0.5]$ με σφάλμα μικρότερο του 10^{-3} .

24 Υπολογίστε το $\ln(1.1)$ με σφάλμα μικρότερο του 10^{-8} .

25 Να βρεθούν τα όρια των συναρτήσεων με χρήση σειρών

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x^2/2}{x^4}.$$

26 Να βρεθούν τα όρια των συναρτήσεων με χρήση σειρών

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2(e^{-1/x^2} - 1), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3 \cos x}.$$