

## Σημειώσεις Διαφορικών Εξισώσεων

Οι σημειώσεις αυτές είναι μέρος του βιβλίου [Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Οικονομολόγους και Μηχανικούς](#)

Χρησιμοποιούμε το ελεύθερο μαθηματικό λογισμικό [Geogebra](#) για υπολογισμούς.

Μπορείτε να στείλετε παρατηρήσεις στην ηλεκτρονική διεύθυνση [Νίκος Χαλιδιάς](#).

## Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (συνήθους διαφορική εξίσωση). Περιγραφή του Προβλήματος

Το πρόβλημα επίλυσης μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης με αρχική συνθήκη είναι το παρακάτω.

Να βρεθεί μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση  $y(t)$  τέτοια ώστε

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad (1)$$

όπου  $f$  μια δοθείσα συνάρτηση δύο μεταβλητών. Η εξίσωση 1 μαζί με την,

$$y(t_0) = y_0, \quad (2)$$

όπου  $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , ορίζουν, όπως λέμε, ένα πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

**ΟΡΙΣΜΟΣ 1** Κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση  $y = \phi(t)$ , που ικανοποιεί την εξίσωση 1 και την αρχική συνθήκη 2 για όλα τα  $t$  σε κάποιο διάστημα  $I \subseteq \mathbb{R}$  το οποίο περιέχει το  $t_0$ , καλείται λύση.

Γενικά, ένα Π.Α.Τ. μπορεί να έχει περισσότερες από μια λύσεις οι οποίες να ορίζονται σε διαφορετικά διαστήματα. Πάντα όμως το  $t_0$  πρέπει να περιέχεται σε αυτά τα διαστήματα.

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε το πρόβλημα επίλυσης μιας ολοκληρωτικής εξίσωσης.

Να βρεθεί μια συνεχής συνάρτηση  $y(t)$  τέτοια ώστε

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, \quad (3)$$

όπου  $f$  μια δοθείσα συνάρτηση δύο μεταβλητών. Το πρόβλημα αυτό ονομάζεται ολοκληρωτική εξίσωση.

## Ισοδυναμία των δυο προβλημάτων

Θα υποθέσουμε ότι η συνάρτηση  $f(t, y)$  είναι συνεχής ως συνάρτηση δυο μεταβλητών. Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, όπως οι 1 και 2, είναι ισοδύναμο με μια ολοκληρωτική εξίσωση με την έννοια ότι κάθε λύση του ενός είναι και λύση του άλλου. Πράγματι, ολοκληρώνοντας την 1 στο διάστημα  $[t_0, t]$  λαμβάνουμε την εξίσωση

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad (4)$$

αφού η  $f(t, y(t))$  είναι ολοκληρώσιμη ως συνεχής. Αντίστροφα, αν μια συνεχής συνάρτηση  $y(t)$  ικανοποιεί την 4 τότε προφανώς και τα δυο μέλη είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις και επομένως παραγωγίζοντας κατά μέλη προκύπτει η εξίσωση 1.

## Υπαρξη και Μοναδικότητα Λύσης

Το πρώτο βασικό ερώτημα για ένα Π.Α.Τ είναι κάτω από ποιες συνθήκες υπάρχει μοναδική λύση  $y(t)$ , που ικανοποιεί δηλαδή την διαφορική εξίσωση και την αρχική συνθήκη. Για τον σκοπό αυτό θα δώσουμε το παρακάτω θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 2 (Picard)** Υποθέτουμε ότι η  $f(t, y)$  είναι συνεχής στο

$$S = \{(t, y) : t \in [t_0, t_0 + a], y \in [y_0 - b, y_0 + b]\}$$

για κάποια  $a, b > 0$  ενώ η  $f_y(t, y)$  είναι φραγμένη στο  $S$ . Συμβολίζοντας με  $M = \max_S |f(t, y)|$  και  $c =$

$\min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$  τότε το Π.Α.Τ. 1 και 2 έχει μοναδική λύση στο διάστημα  $[t_0, t_0 + c]$ .

▪ Εντελώς παρόμοια, μπορούμε να έχουμε θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας σε διάστημα της μορφής  $[t_0 - c, t_0]$  καθώς και παρόμοια σχόλια για την επέκταση της λύσης. Εφαρμόζοντας και τα δυο αυτά θεωρήματα σε ένα Π.Α.Τ. έχουμε την ύπαρξη της μοναδικής λύσης σε ένα διάστημα της μορφής  $(t_0 - a', t_0 + a)$ . Χρησιμοποιώντας λοιπόν και το θεώρημα Peano έχουμε το επόμενο θεώρημα,

**ΘΕΩΡΗΜΑ 3** Ένα Π.Α.Τ. επιδέχεται τουλάχιστον μια λύση όταν η  $f(t, y)$  είναι συνεχής σε μια περιοχή του  $(t_0, y_0)$  η οποία ορίζεται σε μια περιοχή του  $t_0$  ενώ αν επιπλέον η παράγωγος  $f_y(t, y)$  είναι φραγμένη σε μια περιοχή του  $(t_0, y_0)$  τότε η λύση είναι μοναδική.

Ένα Π.Α.Τ. μπορεί να έχει δυο λύσεις ή και περισσότερες!

Ένα κλασικό παράδειγμα διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης που δεν έχει μοναδική λύση είναι το επόμενο Π.Α.Τ.

$$\begin{aligned}y'(t) &= \sqrt{y(t)}, \\ y(0) &= 0\end{aligned}$$

Προφανώς, μια λύση του Π.Α.Τ. είναι η ταυτοτικά μηδενική συνάρτηση, δηλαδή η  $y_1(t) = 0$  ενώ μια ακόμη λύση είναι η

$$y_2(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4}, & \text{όταν } t \geq 0 \\ 0, & \text{όταν } t \leq 0 \end{cases}$$

Το συγκεκριμένο Π.Α.Τ. δεν έχει μοναδική λύση διότι η  $f_y$  δεν είναι φραγμένη σε καμία περιοχή της αρχικής συνθήκης, δηλαδή στο σημείο  $(0, 0)$ , ενώ η  $f$  είναι συνεχής παντού. Η συνέχεια της  $f$  αρκεί για την ύπαρξη μιας τουλάχιστον λύσης ενώ για την μοναδικότητα απαιτείται κάτι παραπάνω, όπως το να είναι φραγμένη η παράγωγος  $f_y$  σε μια περιοχή των αρχικών συνθηκών.

## Γραμμικές ΣΔΕ Πρώτης Τάξης

Αν η συνάρτηση  $f$  στην εξίσωση (3.1) εξαρτάται γραμμικώς από την εξαρτημένη μεταβλητή  $y$ , τότε η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως εξής,

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), \quad (5)$$

και λέγεται γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης. Η λύση της όμως μπορεί να είναι μια οποιαδήποτε μη γραμμική συνάρτηση. Η ονομασία λοιπόν προκύπτει από το γεγονός ότι το δεξί μέλος της εξίσωσης είναι γραμμική συνάρτηση του  $y$ .



Υποθέτουμε ότι οι  $p, g$  είναι δοθείσες συνεχείς συναρτήσεις σε κάποιο διάστημα  $a < t < b$ . Για παράδειγμα η διαφορική εξίσωση,

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2},$$

είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με  $p(t) = \frac{1}{2}, g(t) = \frac{3}{2}$ .

Σε οποιαδήποτε διαφορική εξίσωση, πριν προχωρήσουμε στην εύρεση της λύσης, πρέπει να εφαρμόσουμε το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας 2. Στην συγκεκριμένη περίπτωση η  $f(t, y) = g(t) - p(t)y$  η οποία είναι συνεχής ως προς  $t$  σε ένα διάστημα όπου και οι δυο συναρτήσεις  $p(t), g(t)$  είναι συνεχείς. Ως προς την μεταβλητή  $y$  είναι συνεχής παντού ενώ η παράγωγος  $f_y$  θα είναι φραγμένη σε κάθε φραγμένο χωρίο αν αντίστοιχα είναι οι συναρτήσεις  $p, g$ .

Θα προχωρήσουμε τώρα στο να βρούμε μια διαδικασία επίλυσης της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης. Παρατηρήστε καταρχάς ότι αν  $p(t) = 0$  τότε πολύ εύκολα λύνουμε την εξίσωση 5 ολοκληρώνοντας κατά μέλη. Έχουμε,

$$\int \frac{dy}{dt} dt = \int g(t) dt \Rightarrow$$
$$y(t) = \int g(t) dt.$$

Αρα, είναι λογικό να σκεφτεί κανείς πως και στην γενική περίπτωση που το  $p(t) \neq 0$  θα υπάρχει ενδεχομένως κάποιος τρόπος, έτσι ώστε να καταλήξω σε μια λύση της 5 ολοκληρώνοντας μια ποσότητα.

Αυτό πράγματι γίνεται, αρκεί όμως να γράψουμε το αριστερό μέλος της 5 σαν την παράγωγο μιας συνάρτησης και τότε, όπως στην περίπτωση  $p(t) = 0$ , ολοκληρώνοντας καταλήγουμε σε μια λύση. Ας δούμε όμως πως θα καταφέρουμε να γράψουμε το αριστερό μέλος της 5 σαν την παράγωγο μιας συνάρτησης.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια  $\mu(t) \neq 0$  τέτοια ώστε,

$$(\mu(t)y(t))' = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y(t). \quad (6)$$

Αν μπορώ να βρω μια τέτοια  $\mu$  τότε πολλαπλασιάζω την 5 με αυτή και θα αντικαταστήσω το αριστερό μέλος της 5 με την ποσότητα  $(\mu(t)y(t))'$ . Έπειτα θα ολοκληρώσω κατά μέλη και τέλος θα λύσω ως προς  $y$ .

Ας δούμε όμως αν υπάρχει μια τέτοια  $\mu$  που να ικανοποιεί την εξίσωση 6.

Η εξίσωση 6 γίνεται,

$$\begin{aligned}\mu'(t)y(t) + \mu(t)y'(t) &= \mu(t)y'(t) + \mu(t)p(t)y(t) \Rightarrow \\ \mu'(t)y(t) &= \mu(t)p(t)y(t) \Rightarrow \\ (\mu'(t) - \mu(t)p(t))y(t) &= 0.\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε,

$$\mu'(t) = \mu(t)p(t),$$

διαιρώντας με  $y(t) \neq 0$ .

Η τελευταία εξίσωση είναι μια απλή διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση την  $\mu$ . Λύνεται ως εξής,

$$\begin{aligned}\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} &= p(t) \Rightarrow \\ \int \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} dt &= \int p(t) dt \Rightarrow \\ \ln |\mu(t)| &= \int p(t) dt \Rightarrow \\ \mu(t) &= e^{\int p(t) dt},\end{aligned}$$

Θα εξηγήσουμε παρακάτω αυτή την τεχνική. Προς το παρόν, μπορούμε απλά να επαληθεύσουμε το γεγονός ότι η συνάρτηση  $\mu(t)$  έχει την ιδιότητα που θέλουμε. Καταλήξαμε σε μια  $\mu$  με την οποία θα πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη την εξίσωση 5. Τότε αυτή γίνεται,

$$\begin{aligned}\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y &= \mu(t)g(t) \Rightarrow \\ (\mu(t)y(t))' &= \mu(t)g(t),\end{aligned}$$

λάβουμε υπόψη μας την εξίσωση 6 την οποία ικανοποιεί πια η  $\mu$ .

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη την τελευταία εξίσωση έχουμε,

$$\begin{aligned}\mu(t)y(t) &= \int \mu(t)g(t)dt + c \Rightarrow \\ y(t) &= \frac{\int \mu(t)g(t)dt + c}{\mu(t)},\end{aligned}$$

παρατηρήστε ότι μπορούμε να διαιρέσουμε με  $\mu(t)$  διότι είναι διάφορη του μηδέν για όλα τα  $t \in \mathbb{R}$ .

Καταλήξαμε στην λύση μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης. Παρατηρήστε ότι δεν έχουμε μόνο την διαδικασία εύρεσης λύσης αλλά και την ίδια την λύση σε κλειστή μορφή η οποία δίνεται από τον εξής τύπο,

$$y(t) = \frac{\int \mu(t)g(t)dt + c}{\mu(t)} \quad (7)$$

Η φόρμουλα αυτή ισχύει για κάθε γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης. Δυστυχώς, αυτό δεν συμβαίνει με όλες τις διαφορικές εξισώσεις που μπορεί να συναντήσει κάποιος.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4** Υπολογίστε την λύση στο παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned}y' - \frac{1}{2}y &= e^{-t} \\ y(0) &= -1\end{aligned}$$

**ΛΥΣΗ.** Παρατηρούμε ότι  $p(t) = -\frac{1}{2}$ ,  $g(t) = e^{-t}$ . Πριν προχωρήσουμε στο να υπολογίσουμε την λύση πρέπει να μιλήσουμε για την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης και σε ποιο διάστημα. Βλέπουμε ότι οι  $p, g$  είναι συνεχείς σε όλο το  $\mathbb{R}$  και ότι βέβαια το  $x_0 = 0 \in \mathbb{R}$ . Άρα ικανοποιείται το θεώρημα 2 και υπάρχει μοναδική λύση η οποία ορίζεται σε οποιοδήποτε διάστημα  $(a, b)$  που περιέχει το 0. Γνωρίζοντας έναν τρόπο για να υπολογίζουμε μια λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης και έχοντας επιπλέον την πληροφορία ότι είναι μοναδική από το θεώρημα 2, είμαστε σίγουροι ότι υπολογίζουμε την μία και μοναδική και άρα δεν μας ενδιαφέρει ο τρόπος υπολογισμού. Δηλαδή μπορεί ακόμη και να την μαντέψει κάποιος και στην συνέχεια να επαληθεύσει ότι πράγματι πρόκειται για λύση χω-

ρίς να χάσει καθόλου από την απαιτούμενη μαθηματική αυστηρότητα.

Θα υπολογίσουμε το  $\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int (-\frac{1}{2})dt} = e^{-\frac{t}{2}}$ . Έπειτα θα υπολογίσουμε το εξής ολοκλήρωμα,

$$\int \mu(t)g(t)dt = \int e^{-\frac{t}{2}}e^{-t}dt = \int e^{-\frac{3}{2}t}dt = -\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}t}.$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο 7 έχουμε την μορφή της γενικής λύσης η οποία είναι

$$y(t) = \frac{-\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}t} + c}{e^{-\frac{t}{2}}} = -\frac{2}{3}e^{-t} + ce^{\frac{t}{2}}$$

Τέλος για να υπολογίσουμε την λύση του Π.Α.Τ. έχουμε ότι

$$y(0) = -1 \Rightarrow -\frac{2}{3}e^{-0} + ce^{\frac{0}{2}} = -1 \Rightarrow c = -\frac{1}{3}.$$

Δηλαδή η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι,

$$y(t) = -\frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}.$$

Για να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα θα πρέπει να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης  $y(t)$  και



στην συνέχεια να σχηματίσουμε την  $y'(t) - \frac{1}{2}y(t)$ . Η ποσότητα αυτή θα πρέπει να είναι ίση με  $e^{-t}$ . Ταυτόχρονα θα πρέπει να ικανοποιεί και την αρχική συνθήκη.  $\square$

Θα αναφερθούμε σε ένα ενδιαφέρον ερώτημα που προκύπτει συχνά στις διαφορικές εξισώσεις που έχουν μια συγκεκριμένη εφαρμογή. Το ερώτημα είναι τι γίνεται με την λύση αν αλλάξω λίγο την αρχική συνθήκη. Ας πάρουμε το αρχικό πρόβλημα αρχικών τιμών αλλά με ένα τυχαίο  $y_0$ . Θα μελετήσουμε την λύση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών,

$$\begin{aligned}y' - \frac{1}{2}y &= e^{-t} \\ y(0) &= y_0\end{aligned}$$

Η γενική λύση όπως δείξαμε είναι,  $y(t) = -\frac{2}{3}e^{-t} + ce^{\frac{t}{2}}$ . Για να ικανοποιηθεί η τυχαία αρχική συνθήκη πρέπει να διαλέξουμε  $c = y_0 + \frac{2}{3}$ . Άρα η ειδική λύση είναι  $y(t) = -\frac{2}{3}e^{-t} + (y_0 + \frac{2}{3})e^{\frac{t}{2}}$ .

Παρατηρούμε ότι ανάλογα με την επιλογή του  $y_0$  η λύση που προκύπτει διαφέρει πάρα πολύ. Πιο συγκεκριμένα, διαλέξτε  $y_0 = -\frac{2}{3}$ . Εύκολα βλέπουμε ότι η αντίστοιχη λύση συγκλίνει στο 0 καθώς το  $t$  πηγαίνει στο  $+\infty$ . Έπειτα, διαλέξτε  $y_0 > -\frac{2}{3}$  και τότε θα παρατηρήσετε εύκολα ότι η αντίστοιχη λύση πηγαίνει στο  $+\infty$  όταν το  $t \rightarrow +\infty$ . Τέλος, αν  $y_0 < -\frac{2}{3}$  βλέπουμε ότι  $y(t) \rightarrow -\infty$  καθώς  $t \rightarrow +\infty$ .

Το συμπέρασμα είναι ότι η λύση διαφέρει πολύ, παρόλο που ικανοποιεί την ίδια διαφορική εξίσωση, όταν διαφέρει έστω και λίγο η αρχική συνθήκη.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5** Να υπολογισθεί η λύση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών,

$$\begin{aligned}ty' + 2y &= 4t^2 \\ y(1) &= 2.\end{aligned}$$

**ΛΥΣΗ.** Καταρχάς θα το φέρουμε στην τυπική μορφή της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης. Αυτή έχει συντελεστή του  $y'$  την μονάδα, κάτι που δεν συμβαίνει εδώ. Άρα πρέπει να διαιρέσουμε με  $t$ , αφού πρώτα δηλώσουμε ότι από εδώ και στο εξής το  $t \neq 0$ . Έτσι το προηγούμενο πρόβλημα αρχικών τιμών γίνεται

$$\begin{aligned}y' + \frac{2}{t}y &= 4t, \quad t \neq 0 \\ y(1) &= 2.\end{aligned}$$

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, θα μιλήσουμε πρώτα για την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης, οπότε θα επικαλεστούμε το θεώρημα 2. Παρατηρούμε ότι  $p(t) = \frac{2}{t}$  και  $g(t) = 4t$ . Η δεύτερη είναι συνεχής παντού, δυστυχώς όμως η πρώτη συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο 0. Το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λέει ότι υπάρχει μοναδική λύση σε ένα διάστημα

της μορφής  $[1, 1 + c]$ . Έπειτα θα εξετάσουμε αν η λύση μπορεί να επεκταθεί σε μεγαλύτερο διάστημα.

Υπολογίζουμε πρώτα, ως γνωστόν, το  $\mu = e^{\int p(t)dt} = e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{\ln t^2} = t^2$ . Μετά υπολογίζουμε το  $\int \mu(t)g(t)dt = \int t^2 4t dt = t^4$ . Οπότε η γενική λύση είναι,

$$y(t) = t^2 + \frac{c}{t^2}.$$

Μένει τώρα, από την γενική λύση, να υπολογίσουμε αυτή που ικανοποιεί και την αρχική συνθήκη. Θα υπολογίσω την σταθερά  $c$  έτσι ώστε  $y(1) = 2$ . Πράγματι αυτή ικανοποιείται για  $c = 1$ . Επομένως η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι,

$$y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}.$$

Επομένως, η λύση ορίζεται σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής  $(0, T)$  και παρατηρούμε ότι στο 0 απειρίζεται. □

## Εξισώσεις Bernoulli

Οι διαφορικές εξισώσεις Bernoulli είναι της μορφής,

$$y' + a(t)y = b(t)y^r, \quad r \neq 0, 1. \quad (8)$$

Αν  $r = 0$  ή  $r = 1$  τότε είναι πολύ εύκολο να δει κανείς ότι η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Όμως με έναν κατάλληλο μετασχηματισμό θα αποδείξουμε ότι στην πραγματικότητα για οποιοδήποτε  $r$  μετασχηματίζεται σε γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.

Είναι προφανές ότι μια λύση είναι η μηδενική συνάρτηση. Θα υπολογίσουμε στην συνέχεια και τις μη μηδενικές. Θέτουμε  $z(t) = y^{1-r}(t)$ . Υπολογίζουμε την παράγωγο του  $z$  και έχουμε  $z'(t) = (1-r)y^{-r}y'$ . Στην συνέχεια πολλαπλασιάζω με  $(1-r)y^{-r}$  την εξίσωση 8 και παίρνω όπως εύκολα μπορεί να δει κανείς την εξής γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με άγνωστη συνάρτηση την  $z$ ,

$$z' + (1-r)a(t)z = b(t)(1-r). \quad (9)$$

Λύνουμε την παραπάνω γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση και στην συνέχεια αντιστρέφουμε τον μετασχηματισμό και έχουμε  $y(t) = z^{\frac{1}{1-r}}(t)$ . Επομένως η γενική λύση της Bernoulli δίνεται από την οικογένεια συναρτήσεων  $y(t) = z^{\frac{1}{1-r}}(t)$  και την  $y(t) = 0$ . Άρα σε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών με μοναδική λύση θα εξετάσουμε πρώτα αν η μηδενική συνάρτηση είναι η μοναδική λύση και αν όχι θα υπολογίσουμε την κατάλληλη σταθερά έτσι να βρούμε ποια ακριβώς συνάρτηση από την οικογένεια συναρτήσεων  $y(t) = z^{\frac{1}{1-r}}(t)$  είναι η μοναδική λύση. Στην συνέχεια επιβεβαιώνουμε ότι πράγματι αποτελεί λύση του προβλήματος.



**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6** Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών,

$$y' + \frac{1}{t-2}y = 7(t-2)^2 y^{\frac{1}{2}}$$
$$y(3) = 1.$$

**ΛΥΣΗ.** Θέτω  $z = y^{\frac{1}{2}}$  και υπολογίζω την παράγωγο της  $z$  η οποία είναι  $z' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'$ . Βέβαια πρέπει να προσέξουμε διότι στον μετασχηματισμό η  $y$  δεν επιτρέπεται να είναι αρνητική αλλά ούτε και μηδέν αφού τότε η  $z'$  δεν είναι καλά ορισμένη. Εξαιρούμε την  $y(t) = 0$  (η οποία είναι λύση της διαφορικής αλλά δεν ικανοποιεί την αρχική συνθήκη) για να βρούμε τις υπόλοιπες. Συνεχίζουμε την διαδικασία πολλαπλασιάζοντας την εξίσωσή μας με την ποσότητα  $\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'$  και αντικαθιστώντας τις κατάλληλες ποσότητες έχουμε,

$$z' + \frac{1}{2(t-2)}z = \frac{7}{2}(t-2)^2.$$

Η διαφορική εξίσωση αυτή είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, της οποίας η γενική λύση είναι,

$$z(t) = c(t-2)^{-\frac{1}{2}} + (t-2)^3.$$

Αντιστρέφοντας τώρα τον μετασχηματισμό, έχουμε  $y(t) = (c(t-2)^{-\frac{1}{2}} + (t-2)^3)^2$ . Για να υπολογίσουμε την συγκεκριμένη λύση που ικανοποιεί και την αρχική συνθήκη απλά θα θέσουμε  $c = 0$  ή  $c = -2$  το οποίο προκύπτει εύκολα από την εξίσωση  $y(3) = 1$  με άγνωστο το  $c$ . Έχουμε υπολογίσει δυο πιθανές λύσεις. Αυτό δεν σημαίνει κατά ανάγκη ότι είναι και οι δυο λύσεις.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας, διαπιστώνουμε ότι έχει μοναδική λύση σε ένα διάστημα της μορφής  $[3, 3 + a]$ . Επομένως, μια από τις δυο συναρτήσεις δεν είναι λύση του Π.Α.Τ. και αυτό μπορούμε να το εξακριβώσουμε αντικαθιστώντας την κάθε συνάρτηση στο Π.Α.Τ. Βλέπουμε ότι η συνάρτηση που προκύπτει για  $c = -2$  δεν είναι λύση του Π.Α.Τ. (δείτε το σε διάστημα της μορφής  $[3, 3 + \varepsilon)$ ).

Όσον αφορά το διάστημα λύσης, αυτό μπορεί να επεκταθεί σε ένα διάστημα της μορφής  $(2, T]$  για οποιοδήποτε  $T > 2$  διότι αυτό είναι το μέγιστο διάστημα όπου η  $f$  είναι συνεχής και η  $f_y$  φραγμένη.

Σημειώστε, ότι αν μας δίνονταν η αρχική συνθήκη  $y(0) = 0$  τότε η μοναδική λύση θα ήταν η  $y(t) = 0$  που είχαμε εξαιρέσει στην πορεία της κατασκευής της λύσης.  $\square$

Το συμπέρασμα από την προηγούμενη άσκηση (σε ένα Π.Α.Τ. με μοναδική λύση) είναι ότι γενικά οι τεχνικές με μετασχηματισμούς μας δίνουν την σωστή λύση αλλά μπορεί να μας δώσουν και επιπλέον λύσεις τις οποίες πρέπει να απορρίψουμε με το να δοκιμάσουμε ποια από αυτές είναι λύση. Για το σκοπό αυτό, η πληροφορία που μας δίνει το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας είναι χρήσιμη.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7** *Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών,*

$$y' - \frac{1}{t}y = -\frac{1}{2y},$$

$$y(-1) = 2.$$

**ΛΥΣΗ.** Το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας μας πληροφορεί ότι το Π.Α.Τ. έχει μοναδική λύση σε ένα διάστημα της μορφής  $(-1 - \epsilon, -1]$ .

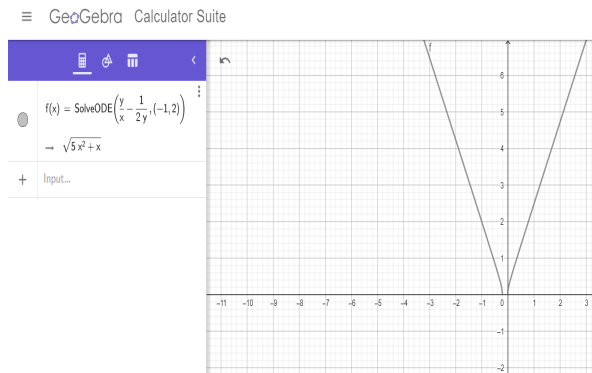
Εδώ έχουμε μια Bernoulli με  $r = -1$ . Θέτουμε  $z = y^2$ . Να σημειώσουμε εδώ ότι αργότερα θα ορίσουμε το πεδίο ορισμού της  $z$  έτσι ώστε  $z(t) \geq 0$ . Πολλαπλασιάζοντας με  $2y$  την διαφορική εξίσωση και

αντικαθιστώντας έχουμε τελικά την εξής γραμμική διαφορική εξίσωση ως προς  $z$ ,

$$z' - \frac{2}{t}z = -1$$

της οποίας η γενική λύση είναι  $z(t) = ct^2 + t$ . Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό έχουμε  $y(t) = \pm\sqrt{ct^2 + t}$ , δηλαδή πάλι η τεχνική του μετασχηματισμού μας δίνει δυο λύσεις. Θα απορρίψουμε προφανώς την αρνητική διότι δεν μπορεί να ικανοποιεί την αρχική συνθήκη. Ας δούμε τι πρέπει να είναι η σταθερά  $c$  για να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη. Κάνοντας υπολογισμούς είναι καθαρό ότι για  $c = 5$  ικανοποιείται η αρχική συνθήκη.

Αρα, η λύση είναι  $y(t) = \sqrt{5t^2 + t}$  και ορίζεται στο ανοιχτό διάστημα  $(-\infty, -\frac{1}{5})$ .  $\square$



Σχήμα 1: Επίλυση της  $y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{2y}$ ,  $y(-1) = 2$  με το Geogebra (δες παράδειγμα 7).

## Διαφορικές Εξισώσεις Riccati

Θα λέμε μια διαφορική εξίσωση ότι είναι μια διαφορική εξίσωση Riccati αν μπορούμε να την φέρουμε στην μορφή,

$$y' + a(t)y + b(t)y^2 + d(t) = 0. \quad (10)$$

Βλέπουμε ότι αν  $d(t) = 0$  τότε έχουμε στην πραγματικότητα μια Bernoulli με  $r = 2$ . Για να λυθεί μια τέτοια διαφορική εξίσωση καλό είναι να γνωρίζουμε εκ των προτέρων μια ειδική λύση της. Ας την ονομάσουμε  $y_1$ . Κάνοντας τον μετασχηματισμό  $z(t) = \frac{1}{y - y_1}$  καταλήγουμε σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης (ας σημειώσουμε εδώ ότι  $z(t) \neq 0$ ).

Πραγματικά, από αυτόν τον μετασχηματισμό έχω,  $y = y_1 + \frac{1}{z}$  και  $y' = y_1' - \frac{1}{z^2}z'$  και αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση έχουμε,

$$\begin{aligned} y_1' - \frac{1}{z^2}z' + a(t)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + b(t)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2 + d(t) = 0 \Rightarrow \\ \left(y_1' + a(t)y_1 + b(t)y_1^2 + d(t)\right) - \frac{1}{z^2}z' \\ + a(t)\frac{1}{z} + 2b(t)y_1\frac{1}{z} + b(t)\frac{1}{z^2} = 0. \end{aligned}$$

Στην τελευταία ισότητα, ο πρώτος όρος είναι μηδέν, γιατί η  $y_1$  δεχθήκαμε ότι είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης. Από τους υπόλοιπους όρους βγάζουμε κοινό παράγοντα το  $-\frac{1}{z^2}$  και καταλήγουμε, κάνοντας κάποιες πολύ εύκολες πράξεις, στην γραμμική διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση την  $z$ ,

$$z' - (a(t) + 2b(t)y_1)z = b(t) \quad (11)$$



Όπως και στην προηγούμενη ενότητα, λύνουμε την γραμμική διαφορική εξίσωση και έπειτα αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό παίρνουμε την γενική λύση της Riccati η οποία είναι  $y(t) = y_1(t) + \frac{c}{z(t)}$  όπου  $c \in \mathbb{R}$  μια αυθαίρετη σταθερά. Στην συνέχεια επιβεβαιώνουμε ότι πράγματι αποτελεί λύση του προβλήματος.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8** Να μελετηθεί το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών για διάφορες τιμές των  $x_0, y_0$ ,

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2 \\y(x_0) &= y_0\end{aligned}$$

αν γνωρίζουμε ότι μια μερική λύση είναι της μορφής  $y_1(x) = \frac{a}{x}$  με  $a \in \mathbb{R}$ .

**ΛΥΣΗ.** Θα εφαρμόσουμε αρχικά το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας. Εδώ έχουμε  $f(x, y) = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2$ . Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής σε όλο το  $\mathbb{R}^2$  εκτός τον άξονα των  $y$  (εκεί δηλαδή που μηδενίζεται το  $x$ ). Παρόμοια, η μερική παράγωγος  $f_y$  είναι φραγμένη σε κάθε φραγμένη περιοχή μακριά από τον άξονα των  $y$ . Επομένως έχει μοναδική λύση για όλα τα  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  με  $x_0 \neq 0$ .

Η εξίσωση αυτή είναι τύπου Riccati. Πρώτα θα βρούμε μια ειδική λύση πριν κάνουμε τον γνωστό μετασχηματισμό. Γνωρίζουμε ότι μια τέτοια είναι της μορφής  $y_1(x) = \frac{a}{x}$ . Δεν μένει παρά να βρούμε το  $a$  έτσι ώστε η  $y_1$  να ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση έχουμε,

$$-\frac{a}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{a}{x^2} - \frac{a^2}{x^2} \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1.$$

Αρα μια ειδική λύση είναι η  $y_1 = \frac{1}{x}$ .

Θεωρούμε τώρα τον μετασχηματισμό  $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$   
και υπολογίζουμε την παράγωγό της  $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2}z'$ .  
Αντικαθιστούμε στην εξίσωση και έχουμε

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{xz} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2} - \frac{2}{xz} \Rightarrow$$
$$z' - \frac{3}{z}z = 1$$

Η λύση της γραμμικής είναι  $z(x) = cx^3 - \frac{1}{2}x$ . Άρα η  
γενική λύση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης θα είναι,  
 $y(x) = \frac{1}{x} + \frac{c_1}{cx^3 - \frac{1}{2}x}$ .

Στην συνέχεια, από την σχέση  $y(x_0) = y_0$  έχουμε ότι

$$\frac{c_1}{cx_0^3 - \frac{1}{2}x_0} = y_0 - \frac{1}{x_0}$$

Αν  $y_0 = \frac{1}{x_0}$  τότε επιλέγουμε  $c_1 = 0$  και άρα η μοναδική λύση θα είναι η  $y(x) = \frac{1}{x}$ .

Αν  $y_0 \neq \frac{1}{x_0}$  τότε μπορούμε να επιλέξουμε  $c_1 = 1$  και να λύσουμε ως προς  $c$  στην σχέση  $y(x_0) = y_0$ . Βρίσκουμε τότε ότι

$$c = \frac{1}{x_0^3(y_0 - \frac{1}{x_0})} + \frac{1}{2x_0^4}$$

□

Αν κάνουμε τον μετασχηματισμό  $y(x) = y_1(x) + z(x)$  τότε καταλήγουμε σε μια εξίσωση Bernoulli.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9** Να λυθεί η παρακάτω διαφορική εξίσωση,

$$y' = y^2 - (2x + 1)y + (x^2 + x + 1)$$

**ΛΥΣΗ.** Παρατηρούμε ότι η  $y_1(x) = x$  είναι μια ειδική λύση. Κάνουμε τον μετασχηματισμό  $y(x) = y_1(x) + z(x)$  με  $y' = 1 + z'$  και αντικαθιστώντας έχουμε

$$\begin{aligned} 1 + z' &= (x + z)^2 - (2x + 1)(x + z) + (x^2 + x + 1) \Rightarrow \\ z' &= z^2 - z. \end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι τύπου Bernoulli με  $r = 2$  και γενική λύση την  $z(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + c}$ . Η γενική λύση της αρχικής διαφορικής είναι  $y(x) = x + c_1 \frac{e^{-x}}{e^{-x} + c}$  όπου  $c_1, c$  αυθαίρετες σταθερές. Στην ουσία, με την αυθαίρετη σταθερά  $c_1$  απλώς προσθέτουμε στο σύνολο λύσεων της Bernoulli την μηδενική λύση η οποία δεν περιλαμβάνεται στην γενική της λύση.  $\square$

## Διαφορικές Εξισώσεις Χωριζομένων Μεταβλητών

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τις λεγόμενες διαχωρίσιμες διαφορικές εξισώσεις. Η γενική της μορφή είναι η εξής,

$$y' = A(t)B(y) \quad (12)$$

Από την μορφή της καταλαβαίνουμε αμέσως γιατί ονομάζονται διαχωρίσιμες διαφορικές εξισώσεις. Το δεξί μέλος γράφεται σαν γινόμενο δύο συναρτήσεων μιας μεταβλητής. Η πρώτη εξαρτάται από την μεταβλητή  $t$  και η δεύτερη από την εξαρτημένη μεταβλητή  $y$ . Αυτή ακριβώς την ιδιότητα θα εκμεταλλευτούμε για την επίλυσή της.

Μεταφέρουμε την ποσότητα που εξαρτάται από το  $y$  στο αριστερό μέλος. Έτσι έχουμε,

$$\frac{y'(t)}{B(y(t))} = A(t) \quad (13)$$

Τώρα δεν έχουμε παρά να ολοκληρώσουμε κατά

μέλη, οπότε το αποτέλεσμα είναι,

$$\int \frac{y'(t)}{B(y(t))} dt = \int A(t) dt \Rightarrow h(y(t)) = g(t) + c. (14)$$

Αυτή θα είναι και η λύση, σε πεπλεγμένη μορφή εν γένει. Στην συνέχεια επιβεβαιώνουμε ότι πράγματι αποτελεί λύση του προβλήματος.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10** Να λυθεί η επόμενη διαφορική εξίσωση,

$$(5y^4 + 3)y' = t.$$

**ΛΥΣΗ.** Η διαφορική αυτή είναι χωριζομένων μεταβλητών. Δεν έχουμε παρά να ολοκληρώσουμε κατά μέλη.

$$\int t dt = \int (5y^4(t) + 3)y'(t) dt + c \Rightarrow \frac{t^2}{2} = y^5 + 3y + c.$$

Αρα η λύση δίνεται από την σχέση,

$$y^5(t) + 3y(t) - \frac{t^2}{2} + c = 0.$$

δηλαδή σε πεπλεγμένη μορφή. □



**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11** Να λυθεί η επόμενη διαφορική εξίσωση,

$$2t(y^2(t) + y(t)) + (t^2 - 1)y(t)y'(t) = 0.$$

**ΛΥΣΗ.** Είναι εύκολο να δούμε ότι έχει δύο λύσεις τουλάχιστον. Τις  $y = 0, y = -1$ . Θέλουμε να βρούμε όλες τις υπόλοιπες και θα υποθέσουμε  $y \neq 0, y \neq -1$ . Δεν έχουμε παρά να ξεχωρίσουμε τις μεταβλητές και να ολοκληρώσουμε. Πολύ εύκολα παίρνουμε,

$$\begin{aligned}\frac{2t}{t^2 - 1} &= -\frac{1}{y(t) + 1}y'(t) \Rightarrow \\ \int \frac{2t}{t^2 - 1} dt &= -\int \frac{1}{y(t) + 1} y' dt + c. \Rightarrow \\ \ln |t^2 - 1| &= -\ln |y(t) + 1| + c \Rightarrow \\ (t^2 - 1)(y(t) + 1) &= \pm e^c = C \Rightarrow \\ y(t) &= \frac{C}{t^2 - 1} - 1.\end{aligned}$$

□

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12** Να λυθεί το επόμενο πρόβλημα αρχικών τιμών,

$$\begin{aligned}(y^2(t) - 1) + y(t)(t - 1)y'(t) &= 0, \\ y(0) &= -2.\end{aligned}$$

**ΛΥΣΗ.** Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση  $f(t, y) = \frac{1-y^2}{y(t-1)}$  είναι συνεχής παντού εκτός από το σημείο  $(1, 0)$  και η παράγωγος είναι φραγμένη σε ένα φραγμένο χωρίο που περιέχει το σημείο  $(0, -2)$ . Επομένως, έχει μοναδική λύση σε ένα διάστημα της μορφής  $(-c, 0]$  το οποίο θα επεκτείνουμε καταλλήλως.

Μπορούμε εύκολα όπως πριν να διαπιστώσουμε ότι οι  $y(t) = 1, y(t) = -1$  είναι δύο λύσεις της διαφορικής εξίσωσης αλλά δεν ικανοποιούν την αρχική συνθήκη. Άρα υποθέτω ότι  $y(t) \neq 1, y(t) \neq -1$  χωρίς να χάνω τίποτα και φέρνω την διαφορική εξίσωση στην εξής

μορφή,

$$\begin{aligned}\frac{1}{t-1} &= -\frac{y(t)y'(t)}{y^2(t)-1} \Rightarrow \\ \int \frac{1}{t-1} dt &= -\int \frac{y(t)y'(t)}{y^2(t)-1} dt + c \Rightarrow \\ \ln |t-1| &= -\frac{1}{2} \ln |y^2(t)-1| + c \Rightarrow \\ (t-1)^2(y^2(t)-1) &= \pm e^2 c = C.\end{aligned}$$

Εννοείται βέβαια ότι έχουμε υποθέσει ότι  $t \neq 1$ . Έτσι η γενική λύση είναι της μορφής,  $y(t) = \pm \sqrt{1 + \frac{C}{(t-1)^2}}$ . Η αρχική συνθήκη  $y(0) = -2$  ικανοποιείται για  $C = 3$ . Όμως βλέπουμε ότι έχουμε δύο λύσεις, όπως σε ένα προηγούμενο παράδειγμα, τις  $y(t) = \sqrt{1 + \frac{C}{(t-1)^2}}$  (την θετική) και  $y(x) = -\sqrt{1 + \frac{C}{(t-1)^2}}$  (την αρνητική). Προφανώς θα κρατήσουμε την αρνητική αυτή την φορά λόγω της αρχικής συνθήκης. Το πεδίο ορισμού της λύσης είναι το  $(-\infty, 1)$  όπου στο 1 απειρίζεται.  $\square$

## Η προσεγγιστική μέθοδος του Euler

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε την απλούστερη προσεγγιστική (αριθμητική) μέθοδο η οποία ονομάζεται η μέθοδος του Euler. Με αυτή την μέθοδο θα είμαστε σε θέση να προσεγγίζουμε την ακριβή λύση σε σημεία μέσα σε ένα διάστημα  $[a, b]$ .

Θα περιγράψουμε στην συνέχεια πως προκύπτει η μέθοδος του Euler και έπειτα θα αποδείξουμε ότι συγκλίνει στην ακριβή λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{aligned}y'(t) &= f(t, y(t)), \quad a \leq t \leq b \\y(a) &= y_0\end{aligned}$$

Διαμερίζουμε το διάστημα  $[a, b]$  με τα σημεία  $a = t^0 < t^1 < \dots < t^N = b$ . Για ευκολία υποθέτουμε ομοιόμορφο διαμερισμό, δηλαδή  $t^i - t^{i-1} = h > 0$  για κάθε  $i = 1, \dots, N$ . Η μέθοδος του Euler είναι ο παρακάτω αναδρομικός τύπος

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1,$$

όπου  $y^0 = y_0$  (μέθοδος του Euler).

Η ακριβής λύση προφανώς ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση στα σημεία  $t^0, \dots, t^N$  άρα

$$y'(t^n) = f(t^n, y(t^n)) \quad \text{για κάθε } n = 0, 1, \dots, N$$

Μπορούμε να προσεγγίσουμε την παράγωγο  $y'(t^n)$  με το πηλίκο

$$\frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}$$

Με τον τρόπο αυτόν προκύπτει η μέθοδος του Euler.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 13** Έστω ότι η συνάρτηση  $f \in C([a, b] \times \mathbb{R})$  ικανοποιεί την συνθήκη *Lipschitz*

$$\begin{aligned} \exists L \geq 0 \forall t \in [a, b] \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \\ |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \end{aligned}$$

Αν  $y \in C^2([a, b])$  είναι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών τότε για τις τιμές της μεθόδου του Euler  $y^0, \dots, y^N$  ισχύει

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t^n) - y^n| \leq \frac{M}{2L} \left( e^{L(b-a)} - 1 \right) h$$

όπου  $h = \frac{b-a}{N}$  και  $M = \max_{a \leq t \leq b} |y''(t)|$ .

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14** Ας δούμε ως παράδειγμα την διαφορική εξίσωση

$$y'(t) + \frac{y(t)}{t-2} = 7(t-2)^2 \sqrt{y(t)}, \quad y(3) = 1$$

Γνωρίζουμε ότι το πρόβλημα αυτό έχει μοναδική λύση η οποία είναι η  $y(t) = (t-2)^6$ . Με την προσεγγιστική μέθοδο του *Euler* μπορούμε να προσεγγίσουμε την λύση στα σημεία  $t_1, t_2, \dots, t_n$  που ανήκουν σε ένα διάστημα που μας ενδιαφέρει. Ας υποθέσουμε ότι μας ενδιαφέρει να έχουμε τιμές της λύσης στο διάστημα  $[3, 4]$  και στα σημεία  $t_1 = 3 + 1/4, t_2 = 3 + 2/4, t_3 = 3 + 3/4$  και  $t_4 = 4$ . Επιλέγουμε δηλαδή το  $h = 1/4$ . Όπως περιγράψαμε παραπάνω, οι προσεγγιστικές τιμές της λύσης θα δοθούν μέσω της αναδρομικής ακολουθίας

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)), \quad n = 0, 1, 2, 3$$

όπου  $f(t, y) = 7(t-2)^2 \sqrt{y(t)} - \frac{y(t)}{t-2}$  και  $t_0 = 3$ . Στον παρακάτω πίνακα καταγράφουμε τις τιμές από την εφαρμογή του παραπάνω αναδρομικού τύπου. Στην συνέχεια μπορούμε να αποτυπώσουμε τα σημεία  $(t, y(t))$  στον  $\mathbb{R}^2$  και ενώνοντάς τα με γραμμές να έχουμε το

προσεγγιστικό γράφημα της λύσης. Παρόμοιους πίνακες μπορούμε να κατασκευάσουμε για οποιοδήποτε βήμα  $h$  επιλέξουμε σχηματίζοντας έτσι προσεγγιστικά γραφήματα της λύσης τα οποία είναι ολοένα (καθώς το  $h$  μικραίνει) πιο κοντά στο γράφημα της πραγματικής λύσης.

$t$	$y(t)$
3.25	2.5
3.5	6.32
3.75	15.16
4	33.87

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 15** Στη περίπτωση στην οποία θέλουμε να προσεγγίσουμε τη λύση μιας διαφορικής εξίσωσης σε ένα διάστημα της μορφής  $[-a, -x_0]$  όπου η αρχική συνθήκη δίνεται στο  $x_0$  και  $a > x_0$  τότε λόγω του θεωρήματος Taylor θα έχουμε

$$y(t - h) = y(t) + (t - h - t)y'(t) + (t - h - t)^2 \frac{y''(\xi)}{2!}$$

όπου  $\xi \in (t - h, t)$ . Αυτό σημαίνει ότι για  $h$  αρκετά



μικρό θα έχουμε ότι

$$y'(t) \simeq \frac{y(t-h) - y(t)}{-h}$$

Δηλαδή σε αυτή τη περίπτωση η ακολουθία θα είναι

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) - hf(t, y(t_n))$$

## Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Δεύτερης Τάξης με Σταθερούς Συντελεστές

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης στις οποίες θα εμπλέκεται και η δεύτερη παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης. Συγκεκριμένα, θα ασχοληθούμε με γραμμικές εξισώσεις δεύτερης τάξης των οποίων η τυπική μορφή είναι η εξής

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t). \quad (15)$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια ομογενής γραμμική εξίσωση δεύτερης τάξης, όταν  $g(t) = 0$ , ενώ λέγεται μη ομογενής, αν  $g(t) \neq 0$ . Η εξίσωση 15 μαζί με τις συνθήκες

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \quad (16)$$

αποτελούν ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, όπως και στις εξισώσεις πρώτης τάξης.

Στην επόμενη ενότητα θα ασχοληθούμε με την εξίσωση 15 όταν οι συντελεστές της άγνωστης συνάρτησης  $p, q$  είναι σταθερές.

## Γραμμικές ΣΔΕ 2ης Τάξης με σταθερούς Συντελεστές

Σε αυτή την ενότητα θα θεωρήσουμε ότι  $p(t) = a_1, q(t) = a_0, g(t) = 0$  ή αλλιώς όπως λέμε θα ασχοληθούμε με ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Όπως θα δούμε η επίλυση τους είναι αρκετά εύκολη. Ψάχνουμε για λύσεις της μορφής  $e^{rt}$ . Ας υποθέσουμε ότι μια λύση γράφεται σε αυτή την μορφή. Δεν έχουμε παρά να υπολογίσουμε την  $r$  για να ικανοποιείται η διαφορική εξίσωση. Πράγματι, πρέπει να ισχύει

$$\begin{aligned}(e^{rt})'' + a_1(e^{rt})' + a_0e^{rt} &= 0 \Rightarrow \\ r^2e^{rt} + ra_1e^{rt} + a_0e^{rt} &= 0 \Rightarrow \\ (r^2 + ra_1 + a_0)e^{rt} &= 0 \Rightarrow \\ r^2 + ra_1 + a_0 &= 0.\end{aligned}$$

Το  $r$  πρέπει να ικανοποιεί την τελευταία εξίσωση (δευτεροβάθμια εξίσωση) την οποία και ονομάζουμε χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης.

Υπάρχουν επομένως τρεις περιπτώσεις. Η μια είναι, η χαρακτηριστική εξίσωση, να έχει δύο διαφορετικές πραγματικές λύσεις. Η δεύτερη περίπτωση είναι να έχει μια διπλή ρίζα και η τρίτη να έχει μιγαδικές λύσεις. Ας δούμε στην πρώτη περίπτωση τι αποτέλεσμα έχουμε.

## Περίπτωση 1

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε  $\lambda_1, \lambda_2$  πραγματικές ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης και διαφορετικές. Τότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα, προφανώς οι  $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$  είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης. Όπως μπορούμε πολύ εύκολα να διαπιστώσουμε και οι  $c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t}$  για οποιεσδήποτε σταθερές, είναι επίσης λύσεις. Τέλος μπορούμε να διαπιστώσουμε (αφήνεται σαν άσκηση) ότι και το άθροισμα δύο τέτοιων λύσεων, είναι επίσης μια λύση. Αρα η συνάρτηση

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (17)$$

είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης για οποιεσδήποτε σταθερές  $c_1, c_2$ . Μπορεί να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις έχουν αυτή την μορφή. Η διαδικασία που ακολουθήσαμε μας οδηγεί στην γενική λύση όπως λέμε ή αλλιώς κάθε λύση περιέχεται στην μορφή 17.

## Περίπτωση 2

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε μια διπλή ρίζα, έστω  $\lambda$ , οπότε μια λύση εκθετικής μορφής είναι η  $e^{\lambda x}$ . Χρειαζόμαστε άλλη μια ειδική λύση για να κατασκευάσουμε την γενική. Ας υποθέσουμε ότι αυτή έχει την μορφή  $y(x) = e^{\lambda x}Y(x)$  και θα προσπαθήσουμε να βρούμε την συνάρτηση  $Y$  έτσι ώστε η  $y$  να ικανοποιεί την εξίσωση. Πράγματι, υπολογίζουμε τις παραγώγους της  $y$  και αντικαθιστούμε στην εξίσωση,

$$\begin{aligned}(Y'' + 2\lambda Y' + \lambda^2 Y) + a_1(Y' + \lambda Y) + a_0 Y &= 0 \Rightarrow \\ Y'' + (2\lambda + a_1)Y' + (\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)Y &= 0\end{aligned}$$

Έχουμε μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με άγνωστη συνάρτηση την  $Y$ . Παρατηρούμε όμως ότι  $2\lambda + a_1 = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$  αφού  $\lambda$  διπλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της αρχικής εξίσωσης. Άρα καταλήγουμε στην εξής απλή διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση την  $Y$ ,

$$Y'' = 0 \Rightarrow Y = c_1 + c_2x.$$

Δηλαδή, η  $y(x) = c_1e^{\lambda x} + c_2xe^{\lambda x}$ . Μπορούμε να αποδείξουμε ότι πράγματι η γενική λύση είναι αυτής της μορφής.

### Περίπτωση 3

Στην τελευταία αυτή περίπτωση, έχουμε δύο μιγαδικές ρίζες. Ας είναι αυτές οι  $r_1 = \lambda + i\mu$ ,  $r_2 = \lambda - i\mu$ . Η γενική λύση θα δίνεται από την  $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ . Όμως μπορούμε αυτό να το γράψουμε με ένα τρόπο ώστε να μην εμφανίζεται μιγαδικός αριθμός. Ας ανακαλέσουμε μια σχέση από την μιγαδική ανάλυση. Γνωρίζουμε ότι ισχύει  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ . Αρα η γενική λύση είναι  $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} = e^{\lambda x} ((c_1 + c_2) \cos(\mu x) + i(c_1 - c_2) \sin(\mu x)) = c'_1 e^{\lambda x} \cos(\mu x) + c'_2 e^{\lambda x} \sin(\mu x)$  με  $c'_1 = c_1 + c_2$ ,  $c'_2 = i(c_1 - c_2)$ . Αν διαλέξουμε  $c_1, c_2$  να είναι συζυγείς μιγαδικοί, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι  $c'_1, c'_2$  είναι πραγματικοί αριθμοί.



**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16** Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned}y'' + 5y' + 6y &= 0, \\y(0) = 2, y'(0) &= 3.\end{aligned}$$

**ΛΥΣΗ.** Το πρώτο πράγμα που κάνουμε σε αυτές τις εξισώσεις (με σταθερούς συντελεστές) είναι να κοιτάξουμε την χαρακτηριστική εξίσωση, η οποία στην προκειμένη περίπτωση είναι

$$r^2 + 5r + 6 = (r + 2)(r + 3) = 0.$$

Αρα οι δυνατές τιμές του  $r$  είναι οι  $r_1 = -3, r_2 = -2$  και επομένως η γενική λύση είναι

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}.$$

Για να ικανοποιηθούν και οι αρχικές συνθήκες θα διαλέξουμε τις σταθερές έτσι ώστε  $y(0) = 2, y'(0) = 3$ . Η πρώτη σχέση μας δίνει  $c_1 + c_2 = 2$ . Για να δούμε τι μας δίνει η δεύτερη θα βρούμε πρώτα την παράγωγο της λύσης, η οποία είναι  $y'(t) = -2c_1e^{-2t} - 3c_2e^{-3t}$ . Έτσι η δεύτερη αρχική συνθήκη μας δίνει  $-2c_1 - 3c_2 = 3$ . Λύνοντας αυτές τις δύο εξισώσεις με αγνώστους τις  $c_1, c_2$  βρίσκουμε ότι  $c_1 = 9, c_2 = -7$ . Άρα η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y(t) = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}.$$

□

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 17** Να υπολογισθεί μια διαφορική εξίσωση της οποίας η γενική λύση είναι

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}.$$

**ΛΥΣΗ.** Αυτή η γενική λύση μοιάζει να προέρχεται από μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Από την μορφή της έχουμε την χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης που ψάχνουμε, η οποία είναι  $(r - 2)(r + 3) = 0 \Rightarrow r^2 + r - 6 = 0$  επομένως όπως εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε η διαφορική εξίσωση που έχει αυτή την χαρακτηριστική εξίσωση είναι η

$$y''(t) + y'(t) - 6y = 0.$$

□

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 18** Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned}16y'' - 8y' + 145y &= 0, \\ y(0) &= -2, \\ y'(0) &= 1.\end{aligned}$$

**ΛΥΣΗ.** Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι  $16r^2 - 8r + 145 = 0$  και οι ρίζες της είναι  $\frac{1}{4} \pm 3i$ . Οπότε η γενική λύση της θα είναι

$$y(t) = c_1 e^{\frac{t}{4}} \cos 3t + c_2 e^{\frac{t}{4}} \sin 3t.$$

Για να ικανοποιηθεί η πρώτη αρχική συνθήκη πρέπει να ισχύει  $y(0) = c_1 = -2$  ενώ, αφού βρούμε την παράγωγο της λύσης, υπολογίζουμε και την δεύτερη σταθερά η οποία είναι  $c_2 = \frac{1}{2}$ . Άρα η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y(t) = -2e^{\frac{t}{4}} \cos 3t + \frac{1}{2}e^{\frac{t}{4}} \sin 3t.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 19** Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned}y'' - y' + 0.25y &= 0, \\y(0) &= 2, \\y'(0) &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

**ΛΥΣΗ.** Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$r^2 - r + 0.25 = 0,$$

άρα οι ρίζες είναι  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ . Άρα η γενική λύση είναι  $y(t) = c_1 e^{\frac{t}{2}} + c_2 t e^{\frac{t}{2}}$ . Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα υπολογίζουμε τις σταθερές  $c_1, c_2$  έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες. Οι τιμές τους είναι  $c_1 = 2, c_2 = -\frac{2}{3}$ . Άρα η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι  $y(t) = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}$ .  $\square$

## Υπολογισμός Ελάχιστου Πολυωνύμου Πίνακα Αριθμών

Δεδομένου ενός τετραγωνικού πίνακα  $A_{m \times m}$  μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε τους πίνακες  $A^n$  (για  $n \in \mathbb{Z}$ ) και  $e^{tA}$ . Για να υπολογίσουμε τον πίνακα  $A^n$  θα υπολογίσουμε είτε το χαρακτηριστικό είτε το ελάχιστο πολυώνυμο (έστω  $q(k)$ ) το οποίο θα γράψουμε στην μορφή  $q(k) = (k - k_1)^{\tau_1} (k - k_2)^{\tau_2} \cdots (k - k_l)^{\tau_l}$  όπου  $k_1, \dots, k_l$  οι ρίζες του πολυωνύμου  $q(k)$  και  $\tau_1 + \cdots + \tau_l = r \leq m$ . Στην πραγματικότητα για τον υπολογισμό του  $A^n$  μας κάνει οποιοδήποτε πολυώνυμο μηδενίζεται από τον πίνακα  $A$ . Σύμφωνα με την [Ευκλείδεια διαίρεση πολυωνύμων](#) θα ισχύει ότι

$$k^n = q(k)\pi(k) + v(k) \quad (18)$$

όπου  $v(k) = a_{r-1}k^{r-1} + \cdots + a_0$ . Το πολυώνυμο  $\lambda(k) = k^n - q(k)\pi(k) - v(k)$  είναι ταυτοτικά ίσο με το μηδέν (δηλαδή έχει άπειρες ρίζες!) και αυτό μπορεί να συμβεί μονάχα όταν όλοι οι συντελεστές του είναι ίσοι με το μηδέν. Πράγματι, σύμφωνα με το θεώρημα 49 του βιβλίου ένα πολυώνυμο βαθμού  $m$  θα έχει

ρίζες των οποίων οι πολλαπλότητες θα έχουν άθροισμα  $m$ . Αν για ένα πολυώνυμο το άθροισμα των πολλαπλοτήτων των ριζών είναι μεγαλύτερο του βαθμού του τότε υποχρεωτικά το πολυώνυμο αυτό είναι το μηδενικό, δηλαδή όλοι οι συντελεστές του είναι ίσοι με το μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι για οποιονδήποτε πίνακα  $A$  θα ισχύει ότι  $\lambda(A) = 0$ .

Λόγω του θεωρήματος των Cayley-Hamilton θα ισχύει η σχέση  $A^n = v(A) = a_{r-1}A^{r-1} + \dots + a_0I$  αφού  $q(A) = 0$ . Δηλαδή για να υπολογίσουμε τον  $A^n$  αρκεί να υπολογίσουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου  $v(k)$  (του υπολοίπου της διαίρεσης). Για να τους υπολογίσουμε θα χρησιμοποιήσουμε τις ρίζες  $k_1, \dots, k_l$  καθώς και τις πολλαπλότητες τους έτσι ώστε να κατασκευάσουμε  $r$  το πλήθος εξισώσεις με αγνώστους τους  $a_0, \dots, a_{r-1}$ . Αντικαθιστώντας τις ιδιοτιμές στην σχέση 18 θα πάρουμε  $l$  εξισώσεις. Για να δημιουργήσουμε  $r$  το πλήθος εξισώσεις (αν  $l \leq r$ ) θα χρησιμοποιήσουμε τις πολλαπλότητες των ριζών.



Είναι γνωστό ότι αν μια ρίζα του πολυωνύμου  $f$  είναι πολλαπλότητας  $\tau$  τότε θα μηδενίζει και τα πολυώνυμα  $f, f', \dots, f^{(\tau-1)}$  όπου  $f^{(i)}$  είναι η  $i$  παράγωγος της συνάρτησης. Οπότε παραγωγίζοντας κατάλληλα την 18 και αντικαθιστώντας την αντίστοιχη ιδιοτιμή λαμβάνουμε και τις υπόλοιπες εξισώσεις. Το σύστημα που προκύπτει έχει πάντοτε μοναδική λύση (δείτε την [εργασία](#) για τον υπολογισμό της ορίζουσας του πίνακα του γραμμικού συστήματος) από όπου υπολογίζουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου  $v(k)$ . Πράγματι, εφόσον το γραμμικό σύστημα έχει  $r$  αγνώστους και το πλήθος των εξισώσεων είναι  $r$  τότε προφανώς έχει τουλάχιστο μια λύση. Για να αποδείξουμε ότι είναι μοναδική μελετούμε την διαφορά δυο λύσεων  $(a_0, \dots, a_{r-1}$  και  $b_0, \dots, b_{r-1})$  η οποία θα ικανοποιεί το ομογενές πρόβλημα. Το ομογενές σύστημα θα είναι το

$$\begin{aligned} v^{(i)}(k_1) &= 0, & i &= 0, \dots, r_1 - 1 \\ &\vdots \\ v^{(i)}(k_l) &= 0, & i &= 0, \dots, r_l - 1 \end{aligned}$$

Το πολυώνυμο  $v(k)$  είναι βαθμού  $r - 1$  και επομένως οι

ρίζες του (ενδεχομένως και μιγαδικές) θα έχουν άθροισμα πολλαπλοτήτων ίσο με  $r-1$ . Όμως διαπιστώνουμε ότι έχει ρίζες τις  $k_1, \dots, k_l$  με άθροισμα πολλαπλοτήτων ίσο με  $r$ . Αυτό μπορεί να συμβεί μονάχα όταν το πολυώνυμο είναι ταυτοτικά ίσο με το μηδέν, δηλαδή όλοι οι συντελεστές του είναι ίσοι με το μηδέν. Επομένως οι δυο λύσεις συμπίπτουν και άρα το αρχικό σύστημα έχει μοναδική λύση.

Σημειώστε ότι το πλήθος των αγνώστων είναι  $r$  και εξαρτάται από τον βαθμό του πολυωνύμου  $q(k)$ . Αν χρησιμοποιήσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο τότε ενδέχεται το πλήθος των αγνώστων να είναι σημαντικά μικρότερο και επομένως το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα να είναι επίσης αρκετά μικρότερο. Για το λόγο αυτό θα περιγράψουμε στην συνέχεια μια μεθοδολογία εύρεσης του ελαχίστου πολυωνύμου χωρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο πρώτα.

Έστω  $A_{m \times m}$  και  $\delta(k) = k^m + b_{m-1}k^{m-1} + \dots + b_0$  το χαρακτηριστικό πολυώνυμό του. Προφανώς  $\delta(A) = 0$ .

Έστω ότι το ελάχιστο πολυώνυμο έχει την μορφή

$$q(k) = k^r + a_{r-1}k^{r-1} + \dots + a_0$$

με  $r \leq m$ .

Τότε, εκ κατασκευής θα ισχύει

$$a_0\mathbb{I} + a_1A + \dots + a_{r-1}A^{r-1} + A^r = 0_{m \times m}$$

ή αλλιώς

$$a_0\mathbb{I} + a_1A + \dots + a_{r-1}A^{r-1} = -A^r$$

Το γραμμικό αυτό σύστημα έχει μοναδική λύση για τους συντελεστές  $a_0, \dots, a_{r-1}$  αφού το ελάχιστο πολυώνυμο είναι μοναδικό. Ποιος είναι ο πίνακας του γραμμικού αυτού συστήματος; Το αριστερό μέλος είναι ένας πίνακας και κάθε στοιχείο του θα είναι ίσο με το αντίστοιχο στοιχείο του  $-A^r$  οπότε θα έχω  $m^2$  το πλήθος εξισώσεις με  $r$  αγνώστους. Ο πίνακας του παραπάνω γραμμικού συστήματος θα είναι ένας πίνακας  $C_{m^2 \times r}$ . Για να τον κατασκευάσω θα πρέπει να εξισώσω

το κάθε στοιχείο του πίνακα του αριστερού μέλους με το αντίστοιχο στοιχείο του πίνακα του δεξιού μέλους, με οποιαδήποτε σειρά. Θα τοποθετήσω λοιπόν στην πρώτη στήλη του όλα τα στοιχεία του μοναδιαίου (με οποιαδήποτε σειρά), στην δεύτερη στήλη τα στοιχεία του πίνακα  $A$  (με την ίδια όμως σειρά με τον μοναδιαίο), κ.τ.λ. μέχρι και τον πίνακα  $A^{r-1}$ . Εφόσον το σύστημα έχει μοναδική λύση τότε ο αναγμένος κλιμακωτός πίνακας του  $C$  θα έχει  $r$  ηγετικές μονάδες (όσες και το πλήθος των αγνώστων) οι οποίες προφανώς θα είναι τοποθετημένες στις  $r$  πρώτες στήλες του πίνακα  $C$ . Δηλαδή αν κατασκευάσω τον επαυξημένο  $(C|X)$  όπου  $X$  είναι η στήλη που περιέχει τα στοιχεία του  $-A^r$  (με την ίδια σειρά που τοποθετήσαμε τους προηγούμενους πίνακες) τότε ο αναγμένος κλιμακωτός θα έχει πάλι  $r$  το πλήθος (και όχι  $r + 1$ ) ηγετικές μονάδες τοποθετημένες στις  $r$  πρώτες στήλες. Αν είχε  $r + 1$  ηγετικές μονάδες τότε το παραπάνω σύστημα θα ήταν αδύνατο. Παρομοίως και ο επαυξημένος  $(C| -X)$ . Η συνεχόμενη εμφάνιση (από στήλη σε στήλη) ηγετικών μονάδων και στην συνέχεια η εμφάνιση μιας στήλης

χωρίς ηγετική μονάδα χαρακτηρίζει απόλυτα το ελάχιστο πολυώνυμο και τους συντελεστές του. Σημειώστε ότι η στήλη η οποία δεν έχει ηγετική μονάδα θα έχει μηδέν στην θέση της.

Το σύστημα

$$a_0\mathbb{I} + a_1A + \cdots + a_{r-1}A^{r-1} = -a_rA^r$$

έχει άπειρες λύσεις (μεταξύ αυτών και τους συντελεστές του ελαχίστου πολυωνύμου) με μια ελεύθερη παράμετρο. Διαλέγοντας  $a_r = 1$  λαμβάνουμε τους συντελεστές του ελάχιστου πολυωνύμου. Παρομοίως το σύστημα

$$a_0\mathbb{I} + a_1A + \cdots + a_{r-1}A^{r-1} = -a_rA^r - a_{r+1}A^{r+1} - \cdots - a_mA^m$$

θα έχει άπειρες λύσεις (μεταξύ αυτών τους συντελεστές του χαρακτηριστικού και του ελάχιστου πολυωνύμου). Διαλέγοντας  $a_r = 1$  και  $a_{r+1} = \cdots = a_m = 0$  θα πάρω τους συντελεστές του ελάχιστου πολυωνύμου. Το  $r$  εδώ θα είναι το πλήθος των πρώτων ηγετικών μονάδων του επαυξημένου που είναι δίπλα-δίπλα και όπου η αμέσως επόμενη στήλη δεν έχει ηγετική μονάδα (αντί ηγετικής μονάδας θα έχει μηδέν).

Συνοψίζοντας, αν  $A_{m \times m}$  ένας δοσμένος πίνακας τότε κατασκευάζουμε τον πίνακα  $B_{m^2 \times (m+1)}$  ο οποίος περιέχει στις στήλες του τους πίνακες  $I, A, \cdots, A^m$  με

οποιαδήποτε σειρά αλλά προφανώς με την ίδια για κάθε στήλη. Υπολογίζουμε τον αναγμένο κλιμακωτό  $\hat{B}$ . Το πλήθος  $r$  των ηγετικών μονάδων (οι οποίες θα βρίσκονται στις  $r$  πρώτες στήλες και θα είναι δίπλα-δίπλα) μας δίνουν τον βαθμό του ελαχίστου πολυωνύμου. Δηλαδή ο βαθμός του ελαχίστου πολυωνύμου είναι ίσος με το μικρότερο  $r$  τέτοιο ώστε  $\hat{B}_{r+1,r+1} = 0$ . Στην συνέχεια εργαζόμαστε στο σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει από τον αναγμένο κλιμακωτό του  $B$  (δηλαδή τον  $\hat{B}$ ) θέτοντας τον άγνωστο  $a_r = 1$  και τους  $a_{r+1} = \dots = a_m = 0$ . Λύνουμε ως προς τους υπόλοιπους αγνώστους λαμβάνοντας έτσι τους συντελεστές του ελαχίστου πολυωνύμου. Το αποτέλεσμα θα είναι ότι το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το

$$q(k) = k^r - \hat{B}_{r,r+1}k^{r-1} - \hat{B}_{r-1,r+1}k^{r-2} - \dots - \hat{B}_{1,r+1}$$

Η τεχνική αυτή εύρεσης του ελαχίστου πολυωνύμου έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην κατασκευή υπολογιστικού κώδικα.



Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

θα κατασκευάσουμε τον πίνακα  $B$  χρησιμοποιώντας τους  $I, A, A^2, A^3$ . Έχουμε

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 21 & -87 \\ 0 & 2 & -4 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -12 & 114 \\ 1 & 1 & 13 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$$

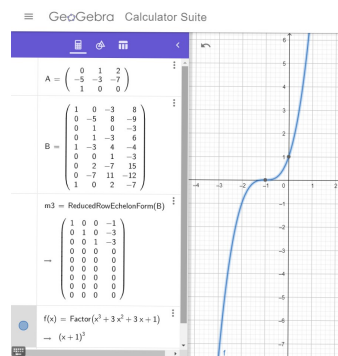
και ο αναγμένος κλιμακωτός του είναι

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 & -30 \\ 0 & 1 & -2 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Το πλήθος των ηγετικών μονάδων είναι 2 επομένως ο βαθμός του ελάχιστου πολυωνύμου είναι 2. Συγκεκριμένα το ελάχιστο πολυώνυμο θα είναι το

$$q(k) = k^2 + 2k - 15 = (k + 5)(k - 3) \quad (\text{ελάχιστο πολυώνυμο})$$

Μπορεί κάποιος να υπολογίσει τον πίνακα  $q(A)$  και να διαπιστώσει ότι είναι ίσος με τον μηδενικό πίνακα.



Σχήμα 2: Υπολογισμός του ελάχιστου πολυωνύμου χρησιμοποιώντας το Geogebra.

## Υπολογισμός του $A^n$ για $n \in \mathbb{N}$

Για να υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του πίνακα  $A_{m \times m}$  θα πρέπει να υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό ή το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα. Το γράφουμε στην μορφή  $q(k) = (k - k_1)^{r_1}(k - k_2)^{r_2} \cdots (k - k_l)^{r_l}$  όπου  $r_1 + \cdots + r_l = r \leq m$ . Οπότε ισχύει ότι  $k^n = q(k)\pi(k) + v(k)$  όπου το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι το πολυώνυμο  $v(k)$  και είναι το πολύ βαθμού  $r - 1$ . Από το θεώρημα των Cayley-Hamilton γνωρίζουμε ότι  $q(A) = 0$  και επομένως  $A^n = v(A)$ . Αρα πρέπει να υπολογίσουμε το άγνωστο πολυώνυμο  $v(k)$  σχηματίζοντας  $r$  εξισώσεις με αγνώστους τους συντελεστές του πολυωνύμου.

Τότε, θέτοντας  $f(k) = k^n$ , κατασκευάζουμε το παρακάτω γραμμικό σύστημα με αγνώστους τους συντελεστές του πολυωνύμου  $v(k)$ ,

$$v^{(i)}(k_1) = f^{(i)}(k_1), \quad i = 0, \dots, r_1 - 1$$

$\vdots$

$$v^{(i)}(k_l) = f^{(i)}(k_l), \quad i = 0, \dots, r_l - 1$$

όπου με  $f^{(i)}(k_j)$  εννοούμε την  $i$ -οστή παράγωγο της

συνάρτησης  $f$  υπολογισμένη στο σημείο  $k_j$ . Το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση από την οποία παίρνουμε το πολυώνυμο  $v(k)$ . Άρα  $A^n = v(A) = a_{r-1}A^{r-1} + \dots + a_0I$ .

### Υπολογισμός του $A^{-n}$ για $n \in \mathbb{N}$

Στην περίπτωση που ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τον  $A^{-n}$  (και άρα και τον  $A^{-1}$ ) αν έχουμε ήδη υπολογίσει τον  $A^n$ . Ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 20** (Η μορφή των στοιχείων του  $A^{-n}$ )  
*Έστω ότι ο πίνακας  $A_{m \times m}$  είναι αντιστρέψιμος. Αν το  $(i, j)$  στοιχείο του  $A^n$  είναι το  $a_{ij}(n)$  τότε το  $(i, j)$  στοιχείο του  $A^{-n}$  είναι το  $a_{ij}(-n)$ . Ειδικότερα τα στοιχεία του  $A^{-1}$  είναι τα  $a_{ij}(-1)$ .*

## Υπολογισμός του εκθετικού πίνακα $e^{tA}$

Θα υπολογίσουμε τον εκθετικό πίνακα

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο εκθετικός πίνακας είναι ο μοναδικός πίνακας που ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$P'(t) = P(t)A, \quad P(0) = I$$

Επομένως όταν υπολογίσουμε τον εκθετικό πίνακα μπορούμε να το επαληθεύσουμε βλέποντας αν ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση.

Υπολογίζουμε τις ρίζες του ελάχιστου πολυωνύμου. Έστω ότι οι ρίζες του ελάχιστου πολυωνύμου είναι οι  $k_1, \dots, k_l$  πολλαπλότητας  $p_1, \dots, p_l$  και έστω ότι είναι βαθμού  $r$ . Έστω  $v(k) = a_{r-1}k^{r-1} + \dots + a_0$  ένα άγνωστο πολυώνυμο (το οποίο θα υπολογίσουμε παρακάτω). Τότε, θέτοντας  $f(k) = e^{tk}$ , κατασκευάζουμε το παρακάτω γραμμικό σύστημα με άγνωστους τους

συντελεστές του πολυωνύμου  $v(k)$ ,

$$\begin{aligned}v^{(i)}(k_1) &= f^{(i)}(k_1), \quad i = 0, \dots, p_1 - 1 \\ &\vdots \\ v^{(i)}(k_l) &= f^{(i)}(k_l), \quad i = 0, \dots, p_l - 1\end{aligned}$$

Ο εκθετικός πίνακας  $e^{tA}$  θα είναι ο πίνακας  $v(A)$ . Παρατηρήστε ότι ο πίνακας (έστω  $F$ ) του παραπάνω συστήματος συμπίπτει με τον πίνακα του συστήματος για τον υπολογισμό του  $A^n$  με μόνη διαφορά το δεξί μέλος. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε και τους δυο αυτούς πίνακες (δηλαδή τον  $A^n$  και τον  $e^{tA}$ ) τότε κατασκευάζουμε τον πίνακα  $F$ , τον αντιστρέφουμε και στην συνέχεια υπολογίζουμε τους άγνωστους συντελεστές πολλαπλασιάζοντας με το κατάλληλο δεξί μέλος.

Σημειώστε ότι θα καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα αν χρησιμοποιήσουμε το χαρακτηριστικό αντί για το ελάχιστο πολυώνυμο.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21** Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Θα υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη  $A^n$  και τον εκθετικό πίνακα  $e^{tA}$ . Στην προκειμένη περίπτωση, επειδή ο πίνακας είναι κάτω τριγωνικός και μικρός σε διάσταση, δεν έχει κανένα νόημα να υπολογίσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο. Λόγω του ότι είναι κάτω τριγωνικός οι ιδιοτιμές του βρίσκονται στην διαγώνιο, οπότε είναι οι  $k_1 = 1$  πολλαπλότητας 1 και  $k_2 = 0.6$  πολλαπλότητας 2. Συνεπώς το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το  $d_A(k) = (k - 1)(k - 0.6)^2$ . Παρόλα αυτά, θα υπολογίσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο με την μέθοδο που έχουμε περιγράψει ως ένα ακόμη παράδειγμα.

Για να υπολογίσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο κατασκευάζουμε έναν πίνακα  $B_{9 \times 4}$  όπου στην πρώτη στήλη τοποθετούμε τον μοναδιαίο πίνακα, στην δεύτερη τον πίνακα  $A$ , στην τρίτη τον  $A^2$  και στην τέταρτη τον  $A^3$ .

*Προκύπτει λοιπόν ο πίνακας*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.4 & 0.64 & 0.784 \\ 0 & 0 & 0.16 & 0.352 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.6 & 0.36 & 0.216 \\ 0 & 0.4 & 0.48 & 0.432 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.6 & 0.36 & 0.216 \end{bmatrix}$$

*Στην συνέχεια υπολογίζουμε τον αναγμένο κλιμακωτό του ο οποίος στην προκειμένη περίπτωση είναι*



0

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.36 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & -1.56 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 2.2 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Το πλήθος των ηγετικών μονάδων μας δίνει τον βαθμό του ελάχιστου πολυωνύμου. Εδώ δηλαδή έχουμε τρεις ηγετικές μονάδες επομένως ο βαθμός του ελάχιστου πολυωνύμου είναι τρία. Αυτό βέβαια σημαίνει ότι συμπίπτει με το χαρακτηριστικό και ότι επιπλέον ο πίνακας  $A$  δεν είναι διαγωνοποιήσιμος. Η στήλη που βρίσκεται αμέσως μετά την τελευταία ηγετική μονάδα, περιέχει τους συντελεστές του ελάχιστου πολυωνύμου

με αντίθετο πρόσημο. Δηλαδή το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το

$$-0.36 + 1.56k - 2.2k^2 + k^3$$

Θα υπολογίσουμε τώρα την νιοστή δύναμη του  $A$  και τον εκθετικό πίνακα  $e^{tA}$ . Θέτουμε  $f(x) = x^n$  και  $g(x) = e^{tx}$ . Κατασκευάζουμε το παρακάτω γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} a + b + c &= f(1) \quad (\text{ή}) \quad g(1) \\ 0.36a + 0.6b + c &= f(0.6) \quad (\text{ή}) \quad g(0.6) \\ 1.2a + b &= f'(0.6) \quad (\text{ή}) \quad g'(0.6) \end{aligned}$$

Ο πίνακας του γραμμικού αυτού συστήματος είναι ο

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.36 & 0.6 & 1 \\ 1.2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Αποδεικνύεται ότι ο πίνακας αυτός είναι πάντοτε αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του στην προκειμένη πε-

ρίπτωση είναι ο

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 6.25 & -6.25 & -2.5 \\ -7.5 & 7.5 & 4 \\ 2.25 & -1.25 & -1.5 \end{bmatrix}$$

Επομένως το διάνυσμα  $(a, b, c)$  θα είναι ίσο με  $F^{-1} \cdot$

$$\begin{bmatrix} f(1) \\ f(0.6) \\ f'(0.6) \end{bmatrix} \text{ για την περίπτωση της νιοστής δύναμης}$$

του  $A$  ή  $F^{-1} \cdot \begin{bmatrix} g(1) \\ g(0.6) \\ g'(0.6) \end{bmatrix}$  για την περίπτωση του εκθετικού πίνακα.

Για την νιοστή δύναμη του  $A$  προκύπτει ότι

$$a = 6.25 - 6.25 \cdot 0.6^n - 2.5 \cdot n \cdot 0.6^{n-1}$$

$$b = -7.5 + 7.5 \cdot 0.6^n + 4 \cdot n \cdot 0.6^{n-1}$$

$$c = 2.25 - 1.25 \cdot 0.6^n - 1.5 \cdot n \cdot 0.6^{n-1}$$

και επομένως η νιοστή δύναμη του  $A$  είναι ο πίνακας

$A^n = aA^2 + bA + c\mathbb{I}$ , δηλαδή

$$A^n = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 - 0.6^n & 0.6^n & 0.0 \\ 1. - 0.6^n - 0.4 \cdot n \cdot 0.6^{n-1} & 0.4 \cdot n \cdot 0.6^n & 0.6^n \end{bmatrix}$$

Ως επαλήθευση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επαγωγή και να διαπιστώσουμε ότι πράγματι πρόκειται για την νιοστή δύναμη του  $A$ . Επιπλέον, θέτοντας όπου  $n$  το  $-1$  λαμβάνουμε τον αντίστροφο του πίνακα  $A$  (δες θεώρημα 20).

Για τον εκθετικό πίνακα θα έχουμε

$$\begin{aligned} a &= 6.25 \cdot e^t - 6.25 \cdot e^{0.6t} - 2.5 \cdot t \cdot e^{0.6t} \\ b &= -7.5 \cdot e^t + 7.5 \cdot e^{0.6t} + 4te^{0.6t} \\ c &= 2.25 \cdot e^t - 1.25 \cdot e^{0.6t} - 1.5 \cdot t \cdot e^{0.6t} \end{aligned}$$

Επομένως ο εκθετικός πίνακας θα είναι ο  $e^{tA} = aA^2 + bA + c\mathbb{I}$ , δηλαδή

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^t & 0.0 & 0.0 \\ e^t - e^{0.6t} & e^{0.6t} & 0.0 \\ e^t - e^{0.6t} - 0.4te^{0.6t} & 0.4te^{0.6t} & e^{0.6t} \end{bmatrix}$$

Για επαλήθευση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι ο πίνακας  $e^{tA}$  είναι ο μοναδικός πίνακας που ικανοποιεί την επόμενη διαφορική εξίσωση πινάκων (δες αντίστοιχη παράγραφο στα συστήματα διαφορικών εξισώσεων)

$$\begin{aligned}P'(t) &= AP(t) \\P(0) &= \mathbb{I}\end{aligned}$$

Αν υπολογίσουμε τον  $(e^{tA})'$  (παραγωγίζοντας ως προς  $t$  κάθε στοιχείο του) θα πρέπει να ισχύει ότι  $e^{tA} \cdot A = (e^{tA})'$  καθώς και ότι  $e^{0 \cdot A} = \mathbb{I}$ . Πράγματι, διαπιστώνουμε ότι ισχύει και επομένως έχουμε το συμπέρασμα ότι ο πίνακας που υπολογίσαμε είναι πράγματι ο εκθετικός.  $\square$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22** Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν πίνακα  $A$  του οποίου το ελάχιστο πολυώνυμο είναι μικρότερο του χαρακτηριστικού. Αν υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του πίνακα με το χαρακτηριστικό και με το ελάχιστο θα προκύψει το ίδιο αποτέλεσμα. Ας το δούμε αυτό σε προηγούμενο παράδειγμα. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα αυτού είναι το  $\delta_A(k) = (k-3)^2(k+5)$  ενώ το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το  $m_A(k) = (k-3)(k+5)$ . Ας υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του  $A$  χρησιμοποιώντας το ελάχιστο πολυώνυμο. Κατασκευάζουμε ένα πολυώνυμο βαθμού ένα, δηλαδή το  $v(k) = ak + b$  και στην συνέχεια δημιουργώ τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} (-5)a + b &= (-5)^n \\ 3a + b &= 3^n \end{aligned}$$

Ο πίνακας του συστήματος αυτού είναι ο

$$F = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

και ο αντιστροφός του είναι ο

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} -1/8 & 1/8 \\ 3/8 & 5/8 \end{bmatrix}$$

Επομένως το διάνυσμα  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  είναι το  $\begin{bmatrix} -1/8 (-5)^n + 1/8 3^n \\ 3/8 (-5)^n + 5/8 3^n \end{bmatrix}$ .

Οπότε η νιοστή δύναμη του πίνακα  $A$  θα είναι

$$A^n = aA + bI = \begin{bmatrix} 3/4 (-5)^n + 1/4 3^n & -3/4 (-5)^n + 3/4 3^n & 0 \\ -1/4 (-5)^n + 1/4 3^n & 1/4 (-5)^n + 3/4 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$$

Επαληθεύεται με επαγωγή ότι πράγματι πρόκειται για την νιοστή δύναμη του  $A$ . Επίσης, θέτοντας όπου  $n$  το  $-1$  λαμβάνουμε τον αντίστροφο του  $A$ . Μπορείτε να «μαντέψετε» την μορφή που έχει ο εκθετικός πίνακας; Επαληθεύστε το!

Ας υπολογίσουμε στην συνέχεια την νιοστή δύναμη χρησιμοποιώντας το χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Κατασκευάζουμε ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, το  $v(k) = ak^2 + bk + c$  και στην συνέχεια τις εξισώσεις

$$25a - 5b + c = (-5)^n$$

$$9a + 3b + c = 3^n$$

$$6a + b = n3^{n-1}$$

Ο πίνακας του συστήματος και ο αντίστροφος του είναι

$$F = \begin{bmatrix} 25 & -5 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad F^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{64} & -\frac{1}{64} & 1/8 \\ -\frac{3}{32} & \frac{3}{32} & 1/4 \\ \frac{9}{64} & \frac{55}{64} & -\frac{15}{8} \end{bmatrix}$$

Συνεπώς η λύση του παραπάνω συστήματος είναι

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-5)^n}{64} - \frac{3^n}{64} + 1/8 n3^{n-1} \\ -\frac{3(-5)^n}{32} + \frac{33^n}{32} + 1/4 n3^{n-1} \\ \frac{9(-5)^n}{64} + \frac{553^n}{64} - \frac{15n3^{n-1}}{8} \end{bmatrix}$$

Στην συνέχεια για να υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη θα υπολογίσουμε τον πίνακα  $aA^2 + bA + cI$ . Διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για τον ίδιο πίνακα που έχουμε ήδη υπολογίσει.



Το κέρδος του υπολογισμού της νιοστής δύναμης, χρησιμοποιώντας το ελάχιστο πολυώνυμο, του παραπάνω πίνακα ήταν καταρχάς στον υπολογισμό των ιδιοτιμών. Πράγματι, ήταν ευκολότερο να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές βρίσκοντας τις ρίζες ενός πολυωνύμου δευτέρου βαθμού σε σχέση με τις ρίζες ενός πολυωνύμου τρίτου βαθμού. Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας το ελάχιστο πολυώνυμο έπρεπε να λύσουμε ένα σύστημα εξισώσεων με δυο αγνώστους και δυο εξισώσεις ενώ στην περίπτωση του χαρακτηριστικού έπρεπε να λύσουμε ένα σύστημα εξισώσεων με τρεις αγνώστους και τρεις εξισώσεις. Σε περιπτώσεις μεγαλύτερων πινάκων η διαφορά μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερη.  $\square$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23 (Μιγαδικές Ιδιοτιμές)** Θα υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα αυτού είναι οι  $k_1 = 3 + \sqrt{2}i$  και  $k_2 = 3 - \sqrt{2}i$ . Στην περίπτωση των μιγαδικών ιδιοτιμών είναι προτιμότερο να τους μετατρέψουμε στην πολική τους μορφή, δηλαδή να υπολογίσουμε τα  $r, \theta$  τ.ω. να γράφεται ο κάθε αριθμός στην μορφή  $r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ . Αρκεί να θέσουμε  $\theta = \arctan \frac{\sqrt{2}}{3}$  και  $r = \sqrt{3^2 + 2} = \sqrt{11}$ . Οπότε

$$k_1 = \sqrt{11} \left( \cos \left( \arctan \frac{\sqrt{2}}{3} \right) + i \sin \left( \arctan \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right)$$

και

$$k_2 = \sqrt{11} \left( \cos \left( \arctan \frac{\sqrt{2}}{3} \right) - i \sin \left( \arctan \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right)$$

Στην συνέχεια κατασκευάζουμε ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού, το  $v(k) = ak + b$ . Για να υπολογίσουμε τους

$a, b$  σχηματίζουμε τις παρακάτω εξισώσεις

$$ak_1 + b = k_1^n$$

$$ak_2 + b = k_2^n$$

Εξισώνοντας πραγματικά μέρη με πραγματικά και φανταστικά μέρη με φανταστικά προκύπτουν οι εξισώσεις

$$a\sqrt{11} \cos\left(\arctan \frac{\sqrt{2}}{3}\right) + b = (\sqrt{11})^n \cos\left(n \arctan \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$a\sqrt{11} \sin\left(\arctan \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = (\sqrt{11})^n \sin\left(n \arctan \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

Σημειώστε ότι

$$[r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))]^n = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

Ο πίνακας  $F$  και ο αντίστροφος του  $F^{-1}$  του συστήματος αυτού είναι

$$F = \begin{bmatrix} 3.0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad F^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \sqrt{2} \\ 1 & -1.5 \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Επομένως έχουμε ότι

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{11})^n \sin \left( n \arctan \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right) \\ (\sqrt{11})^n \cos \left( n \arctan \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right) - 1.5 \sqrt{2} (\sqrt{11})^n \sin \left( n \arctan \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right) \end{bmatrix}$$

Συμπεπώς  $A^n = aA + b\mathbb{I}$ , δηλαδή

$$A^n = \begin{bmatrix} (\sqrt{11})^n \cos \left( n \arctan \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right) & \sqrt{2} (\sqrt{11})^n \sin \left( n \arctan \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{11})^n \sin \left( n \arctan \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right) & (\sqrt{11})^n \cos \left( n \arctan \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right) \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες μπορεί να αποδειχθεί επαγωγικά ότι πρόκειται πράγματι για την νιοστή δύναμη του πίνακα  $A$ . Σημειώστε όμως ότι θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε ως  $A$  τον

$$A = \begin{bmatrix} (\sqrt{11}) \cos \left( \arctan \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right) & \sqrt{2} (\sqrt{11}) \sin \left( \arctan \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{11}) \sin \left( \arctan \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right) & (\sqrt{11}) \cos \left( \arctan \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right) \end{bmatrix}$$

Στην μορφή του  $A^n$ , θέτοντας όπου  $n$  το  $-1$  λαμβάνουμε τον αντίστροφο του πίνακα  $A$ , δηλαδή τον

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} (\sqrt{11})^{-1} \cos \left( -\arctan \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right) & \sqrt{2} (\sqrt{11})^{-1} \sin \left( -\arctan \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{11})^{-1} \sin \left( -\arctan \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right) & (\sqrt{11})^{-1} \cos \left( -\arctan \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right) \end{bmatrix}$$

το οποίο μπορεί να επαληθευθεί χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες.

Θα υπολογίσουμε και τον εκθετικό πίνακα  $e^{tA}$ . Θεωρώντας το πολυώνυμο  $v(k) = ak + b$  σχηματίζουμε τις εξισώσεις

$$ak_1 + b = e^{tk_1}$$

$$ak_2 + b = e^{tk_2}$$

Όμως

$$e^{tk_1} = e^{t(3+i\sqrt{2})} = e^{3t} \cos(\sqrt{2}t) + ie^{3t} \sin(\sqrt{2}t)$$

Το παραπάνω λοιπόν σύστημα γίνεται

$$a\sqrt{11} \cos\left(\arctan \frac{\sqrt{2}}{3}\right) + b = e^{3t} \cos(\sqrt{2}t)$$

$$a\sqrt{11} \sin\left(\arctan \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = e^{3t} \sin(\sqrt{2}t)$$

Η λύση του συστήματος είναι το διάνυσμα  $F^{-1} \cdot \begin{bmatrix} e^{3t} \cos(t\sqrt{2}) \\ e^{3t} \sin(t\sqrt{2}) \end{bmatrix}$ . Επομένως ο εκθετικός πίνακας θα

είναι ο  $e^{tA} = aA + b\mathbb{I}$ , δηλαδή

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{3t} \cos(t\sqrt{2}) & \sqrt{2}e^{3t} \sin(t\sqrt{2}) \\ -1/2 \sqrt{2}e^{3t} \sin(t\sqrt{2}) & e^{3t} \cos(t\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

Ως επαλήθευση, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ο παραπάνω πίνακας είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης πινάκων  $P'(t) = P(t)A$ ,  $P(0) = \mathbb{I}$ .  $\square$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24** (Πίνακας μιγαδικών αριθμών)

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 - 2i & 0 \\ 3 & 1 - 2i \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός έχει μια ιδιοτιμή πολλαπλότητας δυο, την  $k_1 = 1 - 2i$ .

Για να υπολογίσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο θα κατασκευάσουμε έναν πίνακα  $B_{4 \times 3}$  ο οποίος στην πρώτη στήλη θα έχει τον μοναδιαίο, στην δεύτερη τον  $A$  και στην τρίτη τον  $A^2$ . Θα έχουμε λοιπόν

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 - 2i & -3 - 4i \\ 0 & 3 & 6 - 12i \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 - 2i & -3 - 4i \end{bmatrix}$$

Ο αναγμένος κλιμακωτός θα είναι ο

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 + 4i \\ 0 & 1 & 2 - 4i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το  $m_A(k) = k^2 - (2 - 4i)k - (3 + 4i) = (k - (1 - 2i))^2$  (δείτε το πλήθος των ηγετικών μονάδων και τους συντελεστές στην τρίτη στήλη). Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας δεν είναι διαγωνοποιήσιμος. Κατασκευάζουμε ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού, το  $v(k) = ak + b$  τέτοιο ώστε να ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} a(1 - 2i) + b &= (1 - 2i)^n \\ a &= n(1 - 2i)^{n-1} \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα υπολογίζουμε τα  $a, b$  και στην συνέχεια τον  $A^n$  ο οποίος θα είναι

$$A^n = \begin{bmatrix} (1 - 2i)^n & 0 \\ 3n(1 - 2i)^{n-1} & (1 - 2i)^n \end{bmatrix}$$



Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι πράγματι είναι η νιοστή δύναμη του πίνακα  $A$ . Θέτοντας όπου  $n$  το  $-1$  λαμβάνουμε τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1/5 + 2/5i & 0 \\ \frac{9}{25} - \frac{12i}{25} & 1/5 + 2/5i \end{bmatrix}$$

ο οποίος είναι ο αντίστροφος του πίνακα  $A$ .

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τον εκθετικό πίνακα. Σχηματίζουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} a(1 - 2i) + b &= e^{t(1-2i)} \\ a &= te^{t(1-2i)} \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα υπολογίζουμε τους  $a, b$  και στην συνέχεια θα έχουμε

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{(1-2i)t} & 0 \\ 3te^{(1-2i)t} & e^{(1-2i)t} \end{bmatrix}$$

Εύκολα επαληθεύουμε ότι ο παραπάνω πίνακας ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση πινάκων  $P'(t) = P(t)A, P(0) = \mathbb{I}$  και επομένως πράγματι πρόκειται για τον εκθετικό πίνακα.  $\square$

---

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το matlab για να υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη ενός πίνακα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε υπολογίσει την νιοστή δύναμη ενός πίνακα  $A$  συμβολίζοντας τον  $An(n)$ . Τα στοιχεία του πίνακα αυτού, εν γένει, είναι συναρτήσεις του  $n$ , δηλαδή ακολουθίες αριθμών, χωρίς όμως αυτό να είναι απαραίτητο. Ορισμένα στοιχεία (ακόμη και όλα στην περίπτωση του μοναδιαίου) μπορεί να είναι σταθερά και ανεξάρτητα του  $n$ . Πως θα επαληθεύσουμε ότι ο πίνακας  $An(n)$  που έχουμε στα χέρια μας είναι πράγματι η νιοστή δύναμη του πίνακα  $A$ ; Αυτό μπορούμε να το κάνουμε με επαγωγή. Για  $n = 1$  θα πρέπει να δίνει τον πίνακα  $A$ , δηλαδή θα πρέπει να ισχύει  $An(1) = A$ . Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι αυτό ισχύει για κάποιο  $n$  και θα πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει και για  $n + 1$ . Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει  $An(n) * A = An(n + 1)$ .

```
1 >> A=sym([1 0 0;0.4 0.6 0;0 0.4 0.6])
2
3 A =
4
```

```
5 [ 1, 0, 0]
6 [2/5, 3/5, 0]
7 [ 0, 2/5, 3/5]
```

Εισάγουμε πρώτα τον πίνακα  $A$  όπως φαίνεται παραπάνω. Στη συνέχεια, με την εντολή `minpoly(A)` παίρνουμε τους συντελεστές του ελαχίστου πολυωνύμου,

```
1 >> minpoly(A)
2
3 ans =
4
5 [1, -11/5, 39/25, -9/25]
```

Με την εντολή `roots(minpoly(A))` παίρνουμε τις ρίζες του ελαχίστου πολυωνύμου, όχι κατ' ανάγκη διακεκριμένες, οπότε έχουμε και την πολλαπλότητα τους.

```
1 >> roots(minpoly(A))
2
3 ans =
4
5 3/5
6 3/5
7 1
```

Μπορούμε να τοποθετήσουμε τις ρίζες σε ένα διάνυσμα  $r$  έτσι ώστε να τις ανακαλούμε αργότερα

```

1 >> r=roots(minpoly(A))
2
3 r =
4
5 3/5
6 3/5
7 1
8
9 >> r(2)
10
11 ans =
12
13 3/5

```

Έπειτα κατασκευάζουμε το γραμμικό σύστημα για το πολυώνυμο  $v(k) = ak^2 + bk + c$  και θέτουμε τον πίνακα του  $F$

```

1 >> F=sym([r(1)^2 r(1) 1; 2*r(1) 1 0; 1 1 1])
2
3 F =
4
5 [9/25, 3/5, 1]
6 [ 6/5, 1, 0]
7 [ 1, 1, 1]

```

Για να δηλώσουμε το δεξί μέλος θα πρέπει πρώτα να δηλώσουμε ότι η μεταβλητή  $n$  θα πρέπει να θεωρηθεί συμβολική

```

1 >> syms n
2 >> b=sym([r(1)^n;n*r(1)^(n-1);r(3)^n])
3
4 b =
5
6          (3/5)^n
7 (3/5)^(n - 1)*n
8          1

```

Τέλος, θα υπολογίσουμε τους συντελεστές  $a, b, c$  και θα υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του πίνακα

```

1 >> a=inv(F)*b;
2
3
4
5 >> An(n)=a(1)*A^2+a(2)*A+a(3)*A^0
6
7 An(n) =
8
9 [
10          0,          0]
11 [          1, ...
    (3/5)^n,          0]
    [1 - (2*(3/5)^(n - 1)*n)/5 - (3/5)^n, (2*(3/5)^(n - 1)*n)/5, (3/5)^n]

```

Προκειμένου να επαληθεύσουμε τον υπολογισμό μας θα εφαρμόσουμε επαγωγή χρησιμοποιώντας το matlab. Θέτοντας  $n = 1$  θα πρέπει να πάρουμε τον αρχικό πίνακα.

```

1 >> An(1)
2
3 ans =
4
5 [ 1, 0, 0]
6 [2/5, 3/5, 0]
7 [ 0, 2/5, 3/5]

```

Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι πράγματι αυτή είναι η μορφή του  $A^n$  για κάποιο  $n$  και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για  $n+1$ . Χρησιμοποιώντας το matlab (για να αποφύγουμε πράξεις στο χαρτί) θα υπολογίσουμε την ποσότητα  $An(n) * A - An(n + 1)$  η οποία θα πρέπει να δίνει τον μηδενικό πίνακα.

```

1 >> simplify (An (n) *A-An (n+1))
2
3 ans =
4
5 [0, 0, 0]
6 [0, 0, 0]
7 [0, 0, 0]

```

Το matlab μπορεί να υπολογίσει τη νιοστή δύναμη του πίνακα ως εξής

```

1 >> A^n

```

```

2
3 ans =
4
5 [
6 [
7 [1 - (2*n*exp(n*log(3/5)))/3 - exp(n*log(3/5)), ...
8
9 >> simplify(A^n-An(n))
10
11 ans =
12
13 [0, 0, 0]
14 [0, 0, 0]
15 [0, 0, 0]

```

όπου διαπιστώνουμε ότι, αφενός δίνει μια διαφορετική μορφή, αφετέρου συμπίπτει με τη μορφή που έχουμε υπολογίσει. Προφανώς ο τρόπος υπολογισμού δεν είναι μέσω της διαγωνοποίησης αφού ο πίνακας δεν είναι διαγωνοποιήσιμος. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι ότι γνωρίζουμε το μαθηματικό υπόβαθρο τόσο για τον υπολογισμό του ελαχίστου πολυωνύμου όσο και για τον υπολογισμό της νιοστής δύναμης του πίνακα (δείτε εργασία [On the Minimum Polynomial and Applications](#)).

Θέτοντας  $n = -1$  υπολογίζουμε τον αντίστροφο

του πίνακα  $A$

```
1 >> An(-1)*A
2
3 ans =
4
5 [1, 0, 0]
6 [0, 1, 0]
7 [0, 0, 1]
```

Ένα ακόμη παράδειγμα υπολογισμού νιοστής δύναμης είναι το παρακάτω στο οποίο οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές.

```
1 >> A=sym([0 1 0; 0 2/3 1/3; 1/3 0 2/3])
2
3 A =
4
5 [ 0, 1, 0]
6 [ 0, 2/3, 1/3]
7 [1/3, 0, 2/3]
8
9 >> syms n
10 >> w=roots(minpoly(A))
11
12 w =
13
14 1
15 1/6 - (3^(1/2)*1i)/6
16 (3^(1/2)*1i)/6 + 1/6
17
18 >> r=sqrt((1/6)^2+3/36)
```



```

19
20 r =
21
22     0.3333
23
24 >> r=sym(sqrt((1/6)^2+3/36))
25
26 r =
27
28 1/3
29
30 >> u=sym(atan(sqrt(3)))
31
32 u =
33
34 pi/3
35 >> F=sym([1 1 1;r^2*cos(2*u) r*cos(u) 1;r^2*sin(2*u) ...
           r*sin(u) 0])
36
37 F =
38
39 [      1,      1, 1]
40 [    -1/18,    1/6, 1]
41 [3^(1/2)/18, 3^(1/2)/6, 0]
42
43 >> a=inv(F)*[1;r^n*cos(n*u);r^n*sin(n*u)]
44
45 a =
46
47 9/7 - (15*(1/3)^n*3^(1/2)*sin((pi*n)/3))/7 - ...
      (9*(1/3)^n*cos((pi*n)/3))/7
48 (3*(1/3)^n*cos((pi*n)/3))/7 + ...
      (19*(1/3)^n*3^(1/2)*sin((pi*n)/3))/7 - 3/7
49 (6*(1/3)^n*cos((pi*n)/3))/7 - ...
      (4*(1/3)^n*3^(1/2)*sin((pi*n)/3))/7 + 1/7
50
51 >> An(n)=a(1)*A^2+a(2)*A+a(3)*A^0

```

```

52
53 An(n) =
54
55 [(6*(1/3)^n*cos((pi*n)/3))/7 - ...
      (4*(1/3)^n*3^(1/2)*sin((pi*n)/3))/7 + 1/7, ...
      (9*(1/3)^n*3^(1/2)*sin((pi*n)/3))/7 - ...
      (3*(1/3)^n*cos((pi*n)/3))/7 + 3/7, 3/7 - ...
      (5*(1/3)^n*3^(1/2)*sin((pi*n)/3))/7 - ...
      (3*(1/3)^n*cos((pi*n)/3))/7]
56 [ 1/7 - (5*(1/3)^n*3^(1/2)*sin((pi*n)/3))/21 - ...
      ((1/3)^n*cos((pi*n)/3))/7, ...
      (4*(1/3)^n*cos((pi*n)/3))/7 + ...
      (2*(1/3)^n*3^(1/2)*sin((pi*n)/3))/7 + 3/7, 3/7 - ...
      ((1/3)^n*3^(1/2)*sin((pi*n)/3))/21 - ...
      (3*(1/3)^n*cos((pi*n)/3))/7]
57 [ (3*(1/3)^n*3^(1/2)*sin((pi*n)/3))/7 - ...
      ((1/3)^n*cos((pi*n)/3))/7 + 1/7, 3/7 - ...
      (5*(1/3)^n*3^(1/2)*sin((pi*n)/3))/7 - ...
      (3*(1/3)^n*cos((pi*n)/3))/7, ...
      (4*(1/3)^n*cos((pi*n)/3))/7 + ...
      (2*(1/3)^n*3^(1/2)*sin((pi*n)/3))/7 + 3/7]
58 >> B=An(n)
59
60 B =
61
62 [(6*(1/3)^n*cos((pi*n)/3))/7 - ...
      (4*(1/3)^n*3^(1/2)*sin((pi*n)/3))/7 + 1/7, ...
      (9*(1/3)^n*3^(1/2)*sin((pi*n)/3))/7 - ...
      (3*(1/3)^n*cos((pi*n)/3))/7 + 3/7, 3/7 - ...
      (5*(1/3)^n*3^(1/2)*sin((pi*n)/3))/7 - ...
      (3*(1/3)^n*cos((pi*n)/3))/7]
63 [ 1/7 - (5*(1/3)^n*3^(1/2)*sin((pi*n)/3))/21 - ...
      ((1/3)^n*cos((pi*n)/3))/7, ...
      (4*(1/3)^n*cos((pi*n)/3))/7 + ...
      (2*(1/3)^n*3^(1/2)*sin((pi*n)/3))/7 + 3/7, 3/7 - ...
      ((1/3)^n*3^(1/2)*sin((pi*n)/3))/21 - ...
      (3*(1/3)^n*cos((pi*n)/3))/7]

```

```

64 [ (3*(1/3)^n*3^(1/2)*sin((pi*n)/3))/7 - ...
      ((1/3)^n*cos((pi*n)/3))/7 + 1/7, 3/7 - ...
      (5*(1/3)^n*3^(1/2)*sin((pi*n)/3))/7 - ...
      (3*(1/3)^n*cos((pi*n)/3))/7, ...
      (4*(1/3)^n*cos((pi*n)/3))/7 + ...
      (2*(1/3)^n*3^(1/2)*sin((pi*n)/3))/7 + 3/7]
65
66 >> B(1,2)
67
68 ans =
69
70 (9*(1/3)^n*3^(1/2)*sin((pi*n)/3))/7 - ...
      (3*(1/3)^n*cos((pi*n)/3))/7 + 3/7
71
72 >> pretty(ans)
73 / 1 \n      / pi n \      / 1 \n      / pi n \
74 | - | sqrt(3) sin| ---- | 9  | - | cos| ---- | 3
75 \ 3 /      \ 3 /      \ 3 /      \ 3 /
76 ----- - ----- + -
77          7          7          7
78 >> limit(B,n,inf)
79
80 ans =
81
82 [1/7, 3/7, 3/7]
83 [1/7, 3/7, 3/7]
84 [1/7, 3/7, 3/7]
85
86 >> simplify(A(n))
87
88 ans =
89
90 [ 0, 1, 0]
91 [ 0, 2/3, 1/3]
92 [1/3, 0, 2/3]
93
94 >> simplify(A(n)*A-A(n+1))

```

```

95
96 ans =
97
98 [0, 0, 0]
99 [0, 0, 0]
100 [0, 0, 0]
101
102
103 >> A^(-1)
104
105 ans =
106
107 [ 4, -6, 3]
108 [ 1,  0, 0]
109 [-2,  3, 0]
110
111 >> An(-1)
112
113 ans =
114
115 [ 4, -6, 3]
116 [ 1,  0, 0]
117 [-2,  3, 0]
118
119 >> simplify(An(-n)*An(-1)-An(-n-1))
120
121 ans =
122
123 [0, 0, 0]
124 [0, 0, 0]
125 [0, 0, 0]
126 >> G=A^n;
127 >> G(1,2)
128
129 ans =
130
131 (3*(log(1/6 - (3^(1/2)*1i)/6)*1i + log((3^(1/2)*1i)/6 ...

```

```

+ 1/6)*1i + 3*3^(1/2)*log(1/6 - (3^(1/2)*1i)/6) - ...
3*3^(1/2)*log((3^(1/2)*1i)/6 + 1/6) + exp(n*log(1/6 ...
- (3^(1/2)*1i)/6))*log(1/6 - (3^(1/2)*1i)/6)*13i - ...
exp(n*log(1/6 - (3^(1/2)*1i)/6))*log((3^(1/2)*1i)/6 ...
+ 1/6)*14i - exp(n*log((3^(1/2)*1i)/6 + ...
1/6))*log(1/6 - (3^(1/2)*1i)/6)*14i + ...
exp(n*log((3^(1/2)*1i)/6 + 1/6))*log((3^(1/2)*1i)/6 ...
+ 1/6)*13i - 3*3^(1/2)*exp(n*log(1/6 - ...
(3^(1/2)*1i)/6))*log(1/6 - (3^(1/2)*1i)/6) + ...
3*3^(1/2)*exp(n*log((3^(1/2)*1i)/6 + ...
1/6))*log((3^(1/2)*1i)/6 + 1/6))/(7*(log(1/6 - ...
(3^(1/2)*1i)/6)*1i + log((3^(1/2)*1i)/6 + 1/6)*1i + ...
3*3^(1/2)*log(1/6 - (3^(1/2)*1i)/6) - ...
3*3^(1/2)*log((3^(1/2)*1i)/6 + 1/6))

```

Έχουμε υπολογίσει την νιοστή δύναμη του πίνακα και με την εντολή `pretty(ans)` λαμβάνουμε μια σχετικά ομορφότερη μορφή του στοιχείου (1, 2). Θέτοντας όπου  $n$  το  $-n$  έχουμε δυνάμεις του αντιστρόφου, το οποίο το αποδεικνύουμε και επαγωγικά. Υπολογίζουμε την νιοστή δύναμη με την εντολή `A^n` του `matlab` και λαμβάνουμε το στοιχείο (1, 2) το οποίο όμως είναι άχρηστο για θεωρητικούς υπολογισμούς λόγω της μορφής του. Ο  $A^n$  είναι ο παρακάτω όπως τον υπολογίσαμε με το γνωστό τρόπο.

$$\begin{pmatrix} \frac{6\left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) - 4\left(\frac{1}{3}\right)^n \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{1}{7}}{\frac{1}{7} - \frac{5\left(\frac{1}{3}\right)^n \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{3\left(\frac{1}{3}\right)^n \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{1}{7}} + \frac{1}{7} & \frac{9\left(\frac{1}{3}\right)^n \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{3}{7}}{4\left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)^n \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{3}{7}}{\frac{3}{7} - \frac{5\left(\frac{1}{3}\right)^n \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{3\left(\frac{1}{3}\right)^n \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{1}{7}} + \frac{3}{7} & \frac{3}{7} - \frac{5\left(\frac{1}{3}\right)^n \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{3\left(\frac{1}{3}\right)^n \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{1}{7}} & \frac{3\left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{4\left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)^n \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{3}{7}}{\frac{3}{7} - \frac{5\left(\frac{1}{3}\right)^n \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{3\left(\frac{1}{3}\right)^n \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{1}{7}} + \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

Σε ένα τελευταίο παράδειγμα θα υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη ενός πίνακα ο οποίος δεν είναι αντι-

στρέψιμος.

```
1 >> A=sym([1 0 0; 0.4 0.6 0; 1/2 1/2 0])
2
3 A =
4
5 [ 1, 0, 0]
6 [2/5, 3/5, 0]
7 [1/2, 1/2, 0]
8
9 >> w=roots(minpoly(A))
10
11 w =
12
13 0
14 3/5
15 1
16 >> F=sym([w(1)^2 w(1) 1; w(2)^2 w(2) 1; w(3)^2 w(3) 1])
17
18 F =
19
20 [ 0, 0, 1]
21 [9/25, 3/5, 1]
22 [ 1, 1, 1]
23
24 >> a=inv(F)*sym([w(1)^n; w(2)^n; w(3)^n])
25
26 a =
27
28 (5*0^n)/3 - (25*(3/5)^n)/6 + 5/2
29 (25*(3/5)^n)/6 - (8*0^n)/3 - 3/2
30 0^n
31
32 >> An(n)=a(1)*A^2+a(2)*A+a(3)*A^0
33
34 An(n) =
```

```

35
36 [          1,          0, ...
    0]
37 [          1 - (3/5)^n,          (3/5)^n, ...
    0]
38 [1 - (5*(3/5)^n)/6 - 0^n/6, (5*(3/5)^n)/6 - (5*0^n)/6, ...
    0^n]
39
40 >> AAn(n)=sym([1 0 0; 1-(3/5)^n (3/5)^n 0; 1- ...
    (5*(3/5)^n)/6 (5*(3/5)^n)/6 0])
41
42 AAn(n) =
43
44 [          1,          0, 0]
45 [          1 - (3/5)^n,          (3/5)^n, 0]
46 [1 - (5*(3/5)^n)/6, (5*(3/5)^n)/6, 0]
47
48
49
50 >> AAn(-1)*A*AAn(-1)-AAn(-1)
51
52 ans =
53
54 [0, 0, 0]
55 [0, 0, 0]
56 [0, 0, 0]
57
58 >> AAn(1)
59
60 ans =
61
62 [ 1, 0, 0]
63 [2/5, 3/5, 0]
64 [1/2, 1/2, 0]
65
66 >> simplify(AAn(n)*A-AAn(n+1))
67

```

```
68 ans =
69
70 [0, 0, 0]
71 [0, 0, 0]
72 [0, 0, 0]
73
74 >> A^n
75 Error using ^ (line 442)
76 Singularity.
```

Υπολογίζουμε μέσω της νιοστής δύναμης του πίνακα τον [ψευδοαντίστροφο του Drazin](#). Κατά τα γνωστά, επαληθεύουμε επαγωγικά ότι πράγματι ο πίνακας που υπολογίσαμε είναι η νιοστή δύναμη του αρχικού πίνακα. Διαπιστώνουμε ότι η εντολή του matlab  $A^n$  δεν δίνει αποτέλεσμα.

---



## Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων

Έστω  $y_1, y_2, \dots, y_n$   $n$  το πλήθος συναρτήσεις. Θεωρούμε το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης

$$\begin{aligned}y_1' &= f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\y_2' &= f_2(t, y_1, \dots, y_n) \\&\vdots \\y_n' &= f_n(t, y_1, \dots, y_n)\end{aligned}$$

Εδώ οι άγνωστοι είναι οι συναρτήσεις  $y_1, \dots, y_n$  ενώ οι συναρτήσεις  $f_1, \dots, f_n$  είναι δοσμένες.

Τα γραμμικά συστήματα εμφανίζονται, εκτός των άλλων, κατά την επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης  $n$  τάξης, για παράδειγμα

$$y^{(n)}(t) = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

όπου  $y^{(k)}$  είναι η  $k$  παράγωγος της συνάρτησης  $y$ . Θέτοντας  $y_1(t) = y(t)$ ,  $y_2(t) = y'(t)$ ,  $\dots$ ,  $y_n(t) = y^{(n-1)}(t)$  η παραπάνω εξίσωση μετασχηματίζεται στο σύστημα

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(t, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

## Σύστημα Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων-Ο Εκθετικός Πίνακας

Όταν οι συναρτήσεις  $f_1, \dots, f_n$  είναι γραμμικές και ανεξάρτητες του χρόνου  $t$  τότε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων παίρνει την μορφή πινάκων

$$y' = A \cdot y, \quad y(0) = y_0$$

όπου  $y = (y_1(t), \dots, y_n(t))$  και  $A_{n \times n}$  πίνακας με τους συντελεστές (ανεξάρτητους του  $t$ ) των συναρτήσεων  $y_k(t)$  και  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Ορίζουμε τον πίνακα

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

και τον συμβολίζουμε με  $e^A$ . Ο πίνακας αυτός είναι καλά ορισμένος, δηλαδή το άπειρο άθροισμα συγκλίνει όπως έχουμε αποδείξει στο κεφάλαιο της γραμμικής άλγεβρας.

Η πρώτη ιδιότητα που θα αποδείξουμε είναι η

$$e^{A_1+A_2} = e^{A_1}e^{A_2}$$

όταν  $A_1 \cdot A_2 = A_2 \cdot A_1$ . Πράγματι,

$$\begin{aligned}
 e^{A_1+A_2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A_1 + A_2)^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} A_1^k A_2^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_1^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{A_2^{n-k}}{(n-k)!} \\
 &= e^{A_1} e^{A_2}
 \end{aligned}$$

Θέτουμε  $P(t) = e^{tA}$ . Θα αποδείξουμε ότι  $P(s+t) = P(s)P(t)$  για κάθε  $s, t \in \mathbb{R}$ . Πράγματι, εφόσον  $sA \cdot tA = tA \cdot sA$  τότε από την προηγούμενη ιδιότητα έχουμε ότι  $P(s+t) = e^{(s+t)A} = e^{sA+tA} = e^{sA}e^{tA}$ .

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι ο πίνακας συνάρτηση  $P(t)$  ικανοποιεί τις επόμενες διαφορικές εξισώσεις πινάκων

$$\begin{aligned}
 P'(t) &= P(t)A, & P(0) &= I \\
 P'(t) &= AP(t), & P(0) &= I
 \end{aligned}$$

και μάλιστα έχουν μοναδική λύση την συνάρτηση πίνα-

κα  $P(t)$ .

Πράγματι,

$$P'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} A^k}{(k-1)!} = P(t)A = AP(t)$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και άλλη λύση των παραπάνω εξισώσεων. Τότε η διαφορά τους θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$M'(t) = M(t)A, \quad M(0) = 0 \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

Αρα θα ισχύει ότι

$$(M(t)e^{-tA})' = M'(t)e^{-tA} + M(t)(-A)e^{-tA} = 0$$

Δηλαδή κάθε στοιχείο του πίνακα  $(M(t))_{ij} = c \in \mathbb{R}$  και επειδή  $M(0) = 0$  προκύπτει ότι  $M(t) = 0$  άρα έχει μοναδική λύση. Παρόμοια επιχειρήματα ισχύουν και για την εξίσωση  $P'(t) = AP(t)$ .

Ξαναγυρνώντας στο σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0$$

παρατηρούμε ότι μια λύση είναι το διάνυσμα  $e^{tA} \cdot y_0$ .  
Πράγματι,

$$(e^{tA} \cdot y_0)' = A(e^{tA} \cdot y_0)$$

Στην βιβλιογραφία μπορεί να δει κανείς την απόδειξη ότι το πρόβλημα αυτό έχει μοναδική λύση.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η λύση του μη ομογενούς προβλήματος

$$y' = Ay + b(t)$$

όπου  $A_{n \times n}$  πίνακας, δίνεται από την

$$y(t) = e^{A(t-t_0)}y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}b(s)ds$$

Το ολοκλήρωμα ενός διανύσματος που ο κάθε όρος εξαρτάται από το  $t$  είναι ίσο με το διάνυσμα όπου ο κάθε όρος έχει ολοκληρωθεί ως προς  $t$ .

Ας ξαναγυρίσουμε στην επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων  $n$ -τάξης. Έστω η διαφορική εξίσωση

$$y^{(n)} + c_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + c_0y = 0$$

Με τον τρόπο που αναφέραμε μετατρέπεται σε σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Θέτοντας

$$z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \text{ η αρχική εξίσωση μετατρέπεται}$$

στην

$$z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -c_0 & -c_1 & \cdots & -c_{n-1} \end{pmatrix} \cdot z(t)$$

Ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -c_0 & -c_1 & \cdots & -c_{n-1} \end{pmatrix}$  είναι γνω-

στός στην γραμμική άλγεβρα ως ο συνοδός πίνακας του πολυωνύμου  $\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_0$  (συγκρίνετε το με την αρχική διαφορική εξίσωση!) Αποδεικνύεται ότι τόσο το χαρακτηριστικό του όσο και το ελάχιστο πολυώνυμό του είναι ίσο με το παραπάνω πολυώνυμο.

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  πολλαπλότητας  $r_1, \dots, r_m$  και στην συνέχεια υπολογίζουμε τον εκθετικό πίνακα  $e^{tA}$ . Για να το κάνουμε αυτό κατασκευάζουμε ένα πολυώνυμο  $v(\lambda) = a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$  το οποίο θα πρέπει να ικανοποιεί τις παρακάτω εξισώσεις

$$\begin{aligned} v(\lambda_1) &= f(\lambda_1) \\ &\vdots \\ v^{(r_1-1)}(\lambda_1) &= f^{(r_1-1)}(\lambda_1) \\ v(\lambda_2) &= f(\lambda_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

όπου  $f(x) = e^{tx}$ . Λύνοντας το παραπάνω σύστημα υπολογίζουμε τους  $a_0, \dots, a_{n-1}$ . Στην συνέχεια διαπιστώνουμε εύκολα ότι η μορφή της λύσης θα είναι ως εξής

$$\begin{aligned} y(t) = & e^{\lambda_1 t}(d_0 + d_1 t + \dots + d_{r_1-1} t^{r_1-1}) \\ & + e^{\lambda_2 t}(f_0 + f_1 t + \dots + f_{r_2-1} t^{r_2-1}) \\ & + e^{\lambda_3 t} \dots \end{aligned}$$

όπου  $d_0, d_1, \dots, f_0, f_1, \dots \in \mathbb{R}$  αυθαίρετες σταθερές οι οποίες μπορούν να υπολογισθούν όταν μας δοθούν



οι κατάλληλες αρχικές συνθήκες. Ας δούμε ένα παράδειγμα. Έστω η παρακάτω διαφορική εξίσωση

$$y''' + 3y'' - 4y = 0$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4$$

το οποίο έχει την  $\lambda_1 = 1$  ως ρίζα πολλαπλότητας ένα και την  $\lambda_2 = -2$  πολλαπλότητας 2. Άρα η γενική λύση θα έχει την μορφή

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + c_3 t e^{-2t}$$

## Εξισώσεις Διαφορών

Θα αναφέρουμε μερικά στοιχεία για τις γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές οι οποίες εμφανίζονται συχνά στην μελέτη των στοχαστικών διαδικασιών.

• Έστω μια ακολουθία αριθμών  $y(n)$  η οποία ικανοποιεί την παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned}y(n+1) &= ay(n) && (\text{εξίσωση διαφορών}) \\y(0) &= y_0 && (\text{αρχική συνθήκη})\end{aligned}$$

όπου  $a, y_0 \in \mathbb{R}$  δοσμένοι αριθμοί. Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε την ακολουθία αριθμών που ικανοποιεί τα παραπάνω. Εφόσον  $y(n+1) = ay(n) = a^2y(n-1)$  προκύπτει εύκολα ότι  $y(n) = a^n y(0)$ . Αντικαθιστώντας και το δεδομένο  $y(0) = y_0$  καταλήγουμε στο ότι  $y(n) = a^n y_0$ . Ως παράδειγμα μπορούμε να δούμε την παρακάτω εξίσωση διαφορών

$$\begin{aligned}y(n+1) &= \frac{1}{2}y(n) \\y(0) &= 3\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω καταλήγουμε εύκολα στο συμπέρασμα ότι  $y(n) = 3\frac{1}{2^n}$ .

• Θα γενικεύσουμε στην συνέχεια την παραπάνω εξίσωση διαφορών εργαζόμενοι σε μια εξίσωση σε μορ-

φή πινάκων. Έστω  $z(n) = \begin{pmatrix} z_1(n) \\ z_2(n) \\ \vdots \\ z_k(n) \end{pmatrix}$  μια ακολουθία

διανυσμάτων και έστω ένας δοσμένος πίνακας  $A_{k \times k}$ . Θεωρούμε την παρακάτω εξίσωση διαφορών

$$z(n+1) = A \cdot z(n)$$

$$z(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$$

όπου  $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$  δοσμένοι αριθμοί. Σκεπτόμε-

νοι όπως προηγούμενα προκύπτει ότι  $z(n) = A^n \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$ .

Συνεπώς θα πρέπει να υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του πίνακα  $A$  έτσι ώστε να πάρουμε την λύση της παραπάνω εξίσωσης διαφορών.

• Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με εξισώσεις διαφορών ανώτερης τάξης.

Έστω μια ακολουθία  $y(n)$  τ.ω.

$$y(n+k) + a_{k-1}y(n+k-1) + \dots + a_1y(n+1) + a_0y(n) = 0 \quad (19)$$

όπου  $a_{k-1}, \dots, a_0$  δοσμένοι πραγματικοί αριθμοί. Μια τέτοια σχέση ονομάζεται ομογενής και γραμμική εξίσωση διαφορών  $k$  τάξης. Ένας απλός τρόπος να υπολογίσουμε την ακολουθία αυτή είναι να μετατρέψουμε το πρόβλημα αυτό στον υπολογισμό της νιοστής δύναμης ενός πίνακα  $A$  κάτι το οποίο έχουμε μελετήσει διεξοδικά στο κεφάλαιο γραμμικής άλγεβρας. Για να γίνει αυτό κατασκευάζουμε  $k$  νέες ακολουθίες

$$b_1(n), b_2(n), \dots, b_k(n)$$

τ.ω.

$$\begin{aligned}b_1(n) &= y(n) \\b_2(n) &= y(n+1) \\&\vdots \\b_k(n) &= y(n+k-1)\end{aligned}$$

Στην συνέχεια σχηματίζουμε το σύστημα

$$\begin{aligned}b_1(n+1) &= b_2(n) \\b_2(n+1) &= b_3(n) \\&\vdots \\b_{k-1}(n+1) &= b_k(n) \\b_k(n+1) &= -a_0b_1(n) - a_1b_2(n) - \dots - a_{k-1}b_k(n)\end{aligned}\tag{20}$$

Έπειτα θέτουμε  $x_n = \begin{pmatrix} b_1(n) \\ b_2(n) \\ \vdots \\ b_k(n) \end{pmatrix}$  και επομένως το σύστημα [20](#) γράφεται  $x_{n+1} = A \cdot x_n$  όπου  $A_{k \times k}$  είναι

ο παρακάτω πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας αυτής της μορφής είναι γνωστός στην γραμμική άλγεβρα ως ο **συνοδός πίνακας** του πολυώνυμου  $\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_0$ . Αποδεικνύεται ότι τόσο το χαρακτηριστικό όσο και το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα  $A$  είναι ίσο με το  $d_A(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_0$  (συγκρίνετε το με την εξίσωση διαφορών!).

Συνεπώς ισχύει ότι

$$x_n = A^n \cdot x_0$$

άρα το αρχικό πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση της νιοστής δύναμης του πίνακα  $A$ . Για να υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του πίνακα  $A$  θα πρέπει να σχηματίσουμε ένα πολυώνυμο  $k - 1$  βαθμού, το  $v(\lambda) =$

$c_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + c_0$ , έτσι ώστε

$$\begin{aligned}v(\lambda_1) &= f(\lambda_1) \\v'(\lambda_1) &= f'(\lambda_1) \\&\vdots \\v^{(r_1-1)}(\lambda_1) &= f^{(r_1-1)}(\lambda_1) \\&\vdots \\v(\lambda_2) &= f(\lambda_2) \\&\vdots\end{aligned}$$

όπου  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  (δηλαδή οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου) και  $r_1, \dots, r_m$  οι αντίστοιχες πολλαπλότητες τους και επίσης  $f(x) = x^n$ . Αν συμβολίσουμε με  $F$  τον πίνακα του παραπάνω συστήματος τότε η λύση θα είναι η

$$\begin{pmatrix} c_{k-1} \\ \vdots \\ c_0 \end{pmatrix} = F^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(\lambda_1) \\ f'(\lambda_1) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Δηλαδή οι συντελεστές  $c_{k-1}, \dots, c_0$  είναι γραμμικός συνδυασμός του δεξί μέλους του παραπάνω συστήματος. Επειδή  $A^n = c_{k-1}A^{k-1} + c_{k-2}A^{k-2} + \dots + c_0I_{k \times k}$

έπεται ότι η  $y(n)$  θα έχει την μορφή

$$\begin{aligned} y(n) = b_1(n) = & \lambda_1^n (d_0 + d_1 n + d_2 n^2 + \cdots + d_{r_1-1} n^{r_1-1}) \\ & + \lambda_2^n (f_0 + f_1 n + \cdots + f_{r_2-1} n^{r_2-1}) \\ & + \lambda_3^n \cdots \end{aligned}$$

όπου  $d_0, d_1, \dots, f_0, f_1, \dots$  αυθαίρετες σταθερές οι οποίες θα υπολογισθούν αν μας δίνονται ισάριθμες αρχικές συνθήκες.



**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 25** Έστω η παρακάτω εξίσωση διαφορών

$$y(n+3) + 5y(n+2) + 3y(n+1) - 9y(n) = 0$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda - 9$$

το οποίο έχει ρίζες τις  $\lambda_1 = 1$  πολλαπλότητας 1 (δηλαδή  $r_1 = 1$ ) και  $\lambda_2 = -3$  πολλαπλότητας 2 (δηλαδή  $r_2 = 2$ ). Συνεπώς η λύση θα έχει την μορφή

$$y(n) = c_0 1^n + (-3)^n (d_0 + d_1 n)$$

όπου  $c_0, d_0, d_1 \in \mathbb{R}$  αυθαίρετες σταθερές. □

## Μετασχηματισμός Fourier

**ΟΡΙΣΜΟΣ 26** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  μια δοσμένη συνάρτηση. Ορίζουμε την  $F(s)$  με  $s \in \mathbb{R}$  ως εξής

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} dt$$

αν το ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο.

Η συνάρτηση  $F(s)$  ονομάζεται ο μετασχηματισμός *Fourier* της  $f$ . Συχνά, συμβολίζεται και με  $\mathcal{F}(f)(s)$ .

Σε αυτό τον ορισμό χρησιμοποιούμε την σχέση (φόρμουλα του Euler)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 27** (Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ Heaviside) Έστω η συνάρτηση

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } t \geq 0 \\ 0, & \text{όταν } t < 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται συνάρτηση Heaviside. Θα δούμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης αυτής δεν ορίζεται. Πράγματι,

$$\mathcal{F}\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t)e^{-ist} dt = \int_0^{\infty} e^{-ist} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-ist} dt$$

Επομένως, αφού  $(e^{-ist})'_t = -ise^{-ist}$  τότε έχουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t)e^{-ist} dt = \frac{1}{-is} \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ e^{-ist} \right]_{t=0}^{t=A} = \frac{i}{s} \left( \lim_{A \rightarrow \infty} e^{-isA} - 1 \right)$$

Χρησιμοποιήσαμε την διαίρεση μιγαδικών αριθμών για να πάρουμε την ισότητα  $\frac{1}{-is} = \frac{i}{s}$ . Το όριο όμως

$$\lim_{A \rightarrow \infty} e^{-isA}$$

δεν υπάρχει διότι δεν υπάρχουν τα όρια  $\lim_{A \rightarrow \infty} \cos sA$  και  $\lim_{A \rightarrow \infty} \sin sA$ . □

**ΟΡΙΣΜΟΣ 28** Μια συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ονομάζεται *απόλυτως ολοκληρώσιμη* στο  $\mathbb{R}$  όταν

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

Το σύνολο των απόλυτα ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο  $\mathbb{R}$  συμβολίζεται με  $L^1(\mathbb{R})$ .

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 29** (Ύπαρξη Μετασχηματισμού Fourier)

Στον προηγούμενο ορισμό το απόλυτο αναφέρεται σε μιγαδικούς αριθμούς, εν γένει. Δηλαδή αν  $z = a + ib$  ισχύει ότι  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Έτσι, εύκολα βλέπουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier μιας απόλυτα ολοκληρώσιμης συνάρτησης  $f(t)$  υπάρχει. Πράγματι,

$$|F(s)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-ist}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| |e^{-ist}| dt$$

Επειδή  $|e^{-ist}| = \sqrt{\cos^2(st) + \sin^2(st)} = 1$  τότε προκύπτει ότι

$$|F(s)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

## Εφαρμογή του Μετασχηματισμού στις Διαφορικές Εξισώσεις

**ΘΕΩΡΗΜΑ 30** Έστω  $f$  μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση και  $F$  ο μετασχηματισμός Fourier. Αν  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$  τότε ο μετασχηματισμός της παραγώγου της  $f$  δίνεται από  $\mathcal{F}(f')(s) = isF(s)$ .

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 31** Εφαρμόζοντας το θεώρημα αυτό σε μια συνάρτηση  $m$ -φορές συνεχώς παραγωγίσιμη προκύπτει ότι

$$\mathcal{F}\left(f^{(m)}(t)\right)(s) = (is)^m F(s)$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 32** Έστω ότι η  $f$  είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη στο  $\mathbb{R}$ . Θα μελετήσουμε την συνήθη διαφορική εξίσωση

$$y''(x) - y(x) = f(x) \quad \text{για } x \in \mathbb{R}$$

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό *Fourier* στα δυο μέλη της εξίσωσης και έχουμε

$$((is)^2 - 1) Y(s) = F(s)$$

Αρα

$$Y(s) = - \left( \frac{1}{1 + s^2} \right) F(s)$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό *Fourier* μετατρέψαμε την διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική ως προς  $Y(s)$  (εξίσωση χωρίς παραγώγους). Λύνουμε ως προς  $Y(s)$  και στην συνέχεια θα πρέπει να υπολογίσουμε την  $y(t)$  η οποία είναι τέτοια ώστε ο μετασχηματισμός της κατά *Fourier* να είναι ίσος με την  $Y(s)$ . Για να το κάνουμε αυτό όμως θα πρέπει να καταγράψουμε ιδιότητες και διάφορα θεωρήματα για τον μετασχηματισμό αυτό.  $\square$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 33** Έστω  $a > 0$ . Ορίζουμε την συνάρτηση

$$p_a(t) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } |t| \leq \frac{a}{2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι απολύτως ολοκληρώσιμη επομένως υπάρχει ο μετασχηματισμός *Fourier*. Έχουμε λοιπόν ότι, για  $s \neq 0$ ,

$$\mathcal{F}(p_a)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} p_a(t)e^{-ist} dt = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-ist} dt = \frac{2 \sin(\frac{a}{2}s)}{s}$$

Για  $s = 0$  προκύπτει εύκολα ότι

$$\mathcal{F}(p_a)(0) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} p_a(t) dt = a$$

Χρησιμοποιώντας το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  προκύπτει ότι

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\frac{a}{2}s)}{s} = a$$

και επομένως η συνάρτηση  $\mathcal{F}(p_a)(s)$  είναι συνεχής για κάθε  $s \in \mathbb{R}$  παρόλο που η  $p_a$  δεν είναι.  $\square$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 34** Έστω  $a > 0$ . Ορίζουμε την συνάρτηση

$$q_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a}, & \text{όταν } |t| \leq a \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η συνάρτηση  $q_a$  είναι επίσης απολύτως ολοκληρώσιμη επομένως υπάρχει ο μετασχηματισμός *Fourier*. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(q_a)(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} q_a(t) e^{-ist} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} q_a(t) e^{-ist} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 q_a(t) e^{-ist} dt + \int_0^{\infty} q_a(t) e^{-ist} dt \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση  $q_a(t)$  είναι άρτια προκύπτει ότι

$$\mathcal{F}(q_a)(s) = 2 \int_0^{\infty} q_a(t) \cos st dt = 2 \int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right) \cos st dt$$

Για  $s \neq 0$  χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη



έχουμε ότι

$$\mathcal{F}(q_a)(s) = \frac{2}{s} \int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right) (\sin st)'_t dt = \frac{2}{as^2} (1 - \cos(as)) = \frac{4 \sin^2\left(\frac{as}{2}\right)}{as^2}$$

Για  $s = 0$  έχουμε ότι  $\mathcal{F}(q_a)(0) = a$ . Μπορούμε να δούμε εύκολα ότι

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2\left(\frac{as}{2}\right)}{as^2} = a$$

το οποίο σημαίνει ότι η  $\mathcal{F}(q_a)(s)$  είναι συνεχής συνάρτηση σε όλο το  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 35** Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης  $f(t) = e^{-a|t|}$  όπου  $a > 0$ . Έχουμε ότι

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-at} e^{-ist} dt + \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-ist} dt = \frac{2a}{a^2 + s^2}$$

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης

$$g_a(t) = \begin{cases} e^{-at}, & \text{όταν } t > 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

όπου  $a \in \mathbb{C}$  με  $\operatorname{Re} a > 0$ . Έχουμε ότι

$$G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t) e^{-ist} dt = \frac{1}{a + is} = \frac{a - is}{a^2 + s^2}$$

Παρόμοια, ισχύει ότι ο μετασχηματισμός *Fourier* της συνάρτησης

$$\hat{g}_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } t \geq 0 \\ e^{at}, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

είναι η συνάρτηση  $\mathcal{F}(\hat{g}_a)(s) = \frac{a+is}{a^2+s^2}$ . □

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 36** Θα μετασχηματίσουμε την συνάρτηση  $f(t) = e^{-at^2}$  όπου  $a > 0$  η οποία ονομάζεται συνάρτηση του *Gauss*. Έχουμε λοιπόν ότι

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-ist} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-at^2} \cos st dt$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο της συνάρτησης  $F(s)$  (υποθέτοντας ότι η παράγωγος μπορεί να περάσει μέσα

στο ολοκλήρωμα) και έχουμε

$$\begin{aligned} F'(s) &= -2 \int_0^{\infty} e^{-at^2} t \sin st dt \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \left( e^{-at^2} \right) \sin st dt \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη προκύπτει ότι

$$F'(s) = -\frac{s}{2a} F(s)$$

Η λύση της γραμμικής αυτής διαφορικής εξίσωσης είναι

$$F(s) = C e^{-s^2/4a}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι (δείτε άσκηση 433 του βιβλίου)

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t\sqrt{a})^2} \sqrt{a} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

έχουμε τελικά

$$F(s) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-s^2/4a}$$

□

## Ιδιότητες του Μετασχηματισμού *Fourier*

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε διάφορες χρήσιμες ιδιότητες του μετασχηματισμού *Fourier* σε μορφή θεωρημάτων.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 37 (ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ)** Έστω δυο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  με μετασχηματισμούς *Fourier* τις  $F(s)$  και  $G(s)$  αντίστοιχα. Τότε ο μετασχηματισμός *Fourier* του γραμμικού συνδυασμού  $af(t) + bg(t)$  είναι η συνάρτηση  $aF(s) + bG(s)$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 38 (ΣΤΖΤΓΗΣ)** Έστω  $f$  μια συνάρτηση και  $F(s)$  ο μετασχηματισμός *Fourier*. Τότε, ο μετασχηματισμός της  $\overline{f}(t)$  είναι η συνάρτηση  $\overline{F}(-s)$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 39** Έστω  $f$  μια συνάρτηση και  $F(s)$  ο μετασχηματισμός *Fourier*. Τότε για  $a \in \mathbb{R}$  έχουμε ότι  $\mathcal{F}(f(t - a))(s) = e^{-isa}F(s)$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 40** Έστω  $f$  μια συνάρτηση και  $F(s)$  ο μετασχηματισμός *Fourier*. Για  $a \in \mathbb{R}$  έχουμε ότι  $\mathcal{F}(e^{iat}f(t))(s) = F(s - a)$ .

**ΠΟΡΙΣΜΑ 41** Αν  $F$  είναι ο μετασχηματισμός *Fourier* της  $f$  τότε

$$\mathcal{F}\left(f(t) \cos(at)\right)(s) = \frac{F(s-a)}{2} + \frac{F(s+a)}{2}$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 42** Αν  $f(t) = p_a(t)$  τότε σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\mathcal{F}\left(p_a(t) \cos bt\right)(s) = \frac{\sin(a(s-b)/2)}{s-b} + \frac{\sin(a(s+b)/2)}{s+b}$$

□

**ΘΕΩΡΗΜΑ 43** Έστω  $F(s)$  ο μετασχηματισμός *Fourier* της  $f$ . Τότε ο μετασχηματισμός *Fourier* της  $f(ct)$  για  $c \neq 0$  είναι

$$\mathcal{F}\left(f(ct)\right)(s) = \frac{1}{|c|} F\left(\frac{s}{c}\right)$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 44** Εφαρμόζοντας τα αποτελέσματα αυτά στην συνάρτηση  $p_a(ct)$  έχουμε ότι

$$\mathcal{F}\left(p_a(ct)\right)(s) = \frac{1}{c} \frac{2 \sin\left(\frac{as}{2c}\right)}{\frac{s}{c}} = \frac{2 \sin\left(\frac{as}{2c}\right)}{s}$$

□

**ΘΕΩΡΗΜΑ 45** Έστω  $f$  μια άρτια συνάρτηση. Τότε ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης αυτής δίνεται από

$$F(s) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos st dt \quad (\text{συνημιτονικός μετασχηματισμός})$$

η οποία είναι επίσης άρτια συνάρτηση. Αν η  $f$  είναι περιττή τότε ο μετασχηματισμός Fourier δίνεται από

$$F(s) = -2i \int_0^{\infty} f(t) \sin st dt \quad (\text{ημιτονικός μετασχηματισμός})$$

η οποία είναι επίσης περιττή συνάρτηση.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 46** Έστω  $f$  και  $g$  τμηματικά λείες συναρτήσεις και απολύτως ολοκληρώσιμες με μετασχηματισμούς Fourier  $F$  και  $G$  αντίστοιχα. Τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)G(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)g(t)dt$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 47** Έστω  $f$  μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση και  $F$  ο μετασχηματισμός Fourier. Αν  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$  τότε ο μετασχηματισμός της παραγώγου της  $f$  δίνεται από  $\mathcal{F}(f')(s) = isF(s)$ .

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 48** Εφαρμόζοντας το θεώρημα αυτό σε μια συνάρτηση  $m$ -φορές συνεχώς παραγωγίσιμη προκύπτει ότι

$$\mathcal{F} \left( f^{(m)}(t) \right) (s) = (is)^m F(s)$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 49** Η συνάρτηση  $f(t) = e^{-at^2}$  είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και η παράγωγος της είναι η  $f'(t) = -2ate^{-at^2}$ . Επίσης, ισχύει ότι  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-at^2} = 0$ . Εφαρμόζοντας το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι

$$\mathcal{F} \left( f'(t) \right) (s) = is \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-s^2/4a}$$

□

**ΘΕΩΡΗΜΑ 50** Έστω  $f$  μια απολύτως ολοκληρώσιμη συνάρτηση με μετασχηματισμό *Fourier* την  $F$ . Αν η συνάρτηση  $tf(t)$  είναι επίσης απολύτως ολοκληρώσιμη τότε ο μετασχηματισμός *Fourier* της  $f$  είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και μάλιστα

$$F'(s) = -\mathcal{F}(itf(t))$$

Σημαντική η επόμενη παρατήρηση, ειδικά στον υπολογισμό ροπών τυχαίων μεταβλητών με συνάρτηση πυκνότητας  $f(t)$ .

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 51** Αν  $t^k f(t)$  είναι απολύτως ολοκληρώσιμη για  $k = 0, 1, 2, \dots, m$  τότε η  $F$  είναι  $m$ -φορές παραγωγίσιμη και μάλιστα

$$F^{(m)}(s) = \mathcal{F}\left((-it)^m f(t)\right)$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 52** Η συνάρτηση  $tp_a(t)$  ικανοποιεί το παραπάνω θεώρημα και έτσι

$$\mathcal{F}(tp_a(t))(s) = -\frac{1}{i}F'(s) = i\frac{a \cos(as/2)}{s} - i\frac{2 \sin(as/2)}{s^2}$$

□

**ΘΕΩΡΗΜΑ 53** Έστω  $F$  ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης  $f$  η οποία είναι απολύτως ολοκληρώσιμη και συνεχής. Έστω  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t f(x)dx = 0$ . Τότε για  $s \neq 0$  έχουμε ότι

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^t f(x)dx\right) = \frac{F(s)}{is}$$



Μπορεί να αποδειχθεί το παρακάτω αποτέλεσμα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 54** Αν η  $f$  είναι απολύτως ολοκληρώσιμη και τμηματικά συνεχής τότε ο μετασχηματισμός Fourier της  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση στο  $\mathbb{R}$ .

**ΟΡΙΣΜΟΣ 55** Η συνέλιξη δυο συναρτήσεων  $f$  και  $g$  ορίζεται ως εξής

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx \quad \text{για } t \in \mathbb{R}$$

αν το ολοκλήρωμα υπάρχει.

**ΛΗΜΜΑ 56** Ισχύει ότι

$$f * g = g * f$$

για οποιεσδήποτε συναρτήσεις  $f$  και  $g$ .

**ΛΗΜΜΑ 57** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι απολύτως ολοκληρώσιμη και η  $g$  είναι φραγμένη σε όλο το  $\mathbb{R}$  τότε η συνέλιξη  $f * g$  υπάρχει.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 58 (ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ)** Έστω  $f$  και  $g$  κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες είναι απολύτως ολοκληρώσιμες και φραγμένες. Έστω  $F(s)$  και  $G(s)$  οι μετασχηματισμοί Fourier των  $f$  και  $g$  αντίστοιχα. Τότε η συνέλιξη  $f * g$  είναι απολύτως ολοκληρώσιμη συνάρτηση και

$$\mathcal{F}(f * g)(s) = F(s)G(s)$$

## Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

Ο χώρος  $L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$  των απόλυτα ολοκληρώσιμων και συνεχών συναρτήσεων στο  $\mathbb{R}$  είναι ένας διανυσματικός χώρος όπως πολύ εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε. Ο μετασχηματισμός Fourier

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}) \rightarrow \text{im } \mathcal{F}$$

όπου  $\text{im } \mathcal{F}$  είναι η εικόνα του μετασχηματισμού, είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός το οποίο εύκολα βλέπουμε χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του ολοκληρώματος. Ο πυρήνας του μετασχηματισμού  $\ker \mathcal{F}$  αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις  $f$  τέτοιες ώστε  $\mathcal{F}(f) = 0$ , δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} dt = 0, \quad \text{για κάθε } s \in \mathbb{R}$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση  $f \geq 0$  που ανήκει στον πυρήνα του μετασχηματισμού. Τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} dt = 0, \quad \text{για κάθε } s \in \mathbb{R}$$

Διαλέγοντας  $s = 0$  προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0$$

από το οποίο εύκολα βλέπουμε ότι αναγκαστικά  $f = 0$  για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ . Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει γενικότερα, για οποιαδήποτε συνάρτηση  $f$ , το οποίο είναι το επόμενο.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 59** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη και τέτοια ώστε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} dt = 0, \quad \text{για κάθε } s \in \mathbb{R}$$

τότε αναγκαστικά  $f(t) = 0$  για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ .

Επομένως, ο πυρήνας του μετασχηματισμού Fourier αποτελείται μονάχα από το μηδενικό στοιχείο.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 60** Ένας γραμμικός μετασχηματισμός  $T : V \rightarrow W$  λέγεται

- (i)  $K$ -ισομορφισμός αν ο  $T$  είναι μια 1 – 1 και επί απεικόνιση

(ii) μη-ιδιάζων μετασχηματισμός αν  $\ker T = \{0\}$ .

Σημειώστε ότι  $1 - 1$  είναι μια απεικόνιση η οποία είναι τέτοια ώστε  $T(v) \neq T(v')$  όταν  $v \neq v'$  για κάθε  $v, v' \in V$  και επί όταν για κάθε  $w \in W$  υπάρχει κάποιο  $v \in V$  τέτοιο ώστε  $T(v) = w$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 61** Έστω  $T : V \rightarrow W$  ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Τότε είναι 1-1 ανν είναι μη-ιδιάζων.

Αυτό σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι 1-1 και άρα αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος είναι επίσης ένας γραμμικός μετασχηματισμός.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο διότι αν η  $F(s)$  είναι ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης τότε οφείλει να συγκλίνει στο μηδέν καθώς  $s \rightarrow \pm\infty$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 62 (Riemann-Lebesgue)** Έστω  $f$  μια απολύτως ολοκληρώσιμη και κατά τμήματα λεία συνάρτηση στο  $\mathbb{R}$ . Τότε

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} F(s) = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} dt = 0$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 63** Έστω ότι η συνάρτηση  $f$  και ο μετασχηματισμός Fourier  $F$  είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Αν η  $f$  είναι λεία συνάρτηση τότε

$$\mathcal{F}(F)(s) = 2\pi f(-s)$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 64** Έστω  $f$  και  $g$  τμηματικά λείες και απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε το γινόμενό τους να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι οι μετασχηματισμοί Fourier  $F$  και  $G$  είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε

$$\mathcal{F}(fg)(s) = \frac{1}{2\pi}(F * G)(s)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα αυτό στις  $f$  και  $\bar{g}$  έχουμε το επόμενο πόρισμα.

**ΠΟΡΙΣΜΑ 65 (ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ Parseval)** Έστω δυο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  τμηματικά λείες. Υποθέτουμε ότι οι  $f$  και  $\bar{g}$  είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες όπως επίσης και

το γινόμενο τους. Υποθέτουμε επίσης ότι οι μετασχηματισμοί Fourier  $F$  και  $G$  των  $f$  και  $g$  αντίστοιχα είναι τέτοιοι ώστε οι  $F$  και  $\bar{G}$  είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε ισχύει η ταυτότητα

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\overline{G(x)}dx \quad (\text{ταυτότητα του Parseval})$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(s)|^2 ds$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 66** Διαλέγοντας  $f = p_a$  έχουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p_a(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4 \sin^2(as/2)}{s^2} ds$$

Το αριστερό ολοκλήρωμα είναι ίσο με  $a$  ενώ στο δεξί κάνουμε αλλαγή μεταβλητής  $y = as/2$  και έτσι προκύπτει ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 y}{y^2} dy = \frac{\pi}{2}$$

Διαλέγοντας  $f = p_a$  και  $g = p_b$  με  $0 < a \leq b$  έχουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_a(t)p_b(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4 \sin(as/2) \sin(bs/2)}{s^2} ds$$

Το αριστερό ολοκλήρωμα είναι ίσο με  $a$  ενώ

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4 \sin(as/2) \sin(bs/2)}{s^2} ds = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(as/2) \sin(bs/2)}{s^2} ds$$

λόγω του ότι η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι άρτια συνάρτηση. Τελικά έχουμε ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(as/2) \sin(bs/2)}{s^2} ds = \frac{\pi}{4} a$$

Στην συνέχεια θέτοντας  $y = \frac{a}{2}s$  προκύπτει ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin y \sin(\frac{b}{a}y)}{y^2} dy = \frac{\pi}{2}$$

□

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 67** Μπορούμε να ορίσουμε ως μετασχηματισμό *Fourier* τον εξής

$$\mathcal{F}(f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ist} dt$$



οπότε ο αντίστροφος θα είναι

$$\mathcal{F}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A F(s) e^{-ist} ds$$

το οποίο οδηγεί σε ισοδύναμα αποτελέσματα με μικρές διαφορές, όπως για παράδειγμα ο μετασχηματισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης. Επίσης, ο συντελεστής μπροστά από το ολοκλήρωμα μπορεί να επιλεγεί όπως θέλουμε αλλά έπειτα ο αντίστοιχος συντελεστής στον αντίστροφο μετασχηματισμό θα πρέπει να είναι τέτοιος ώστε το γινόμενο των δυο συντελεστών να είναι ίσο με  $\frac{1}{2\pi}$ . Σε πολλά βιβλία θα δούμε ότι υπάρχουν διαφορές στον ορισμό του μετασχηματισμού *Fourier* όπως περιγράψαμε πιο πριν. Για τον λόγο αυτό θα πρέπει κανείς να είναι ιδιαίτερα προσεκτικός με την χρήση των πινάκων μετασχηματισμών (δες για παράδειγμα τον πίνακα 1) που συνήθως υπάρχουν διότι αυτοί θα διαφέρουν από βιβλίο σε βιβλίο, ανάλογα με τον ορισμό του μετασχηματισμού που έχει δοθεί.  $\square$

## Υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier μιας συνάρτησης, προφανώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεμελιώδες θεώρημα του μετασχηματισμού Fourier. Δεδομένου ότι ο απευθείας υπολογισμός του αντιστρόφου μέσω αυτού του θεωρήματος μπορεί να είναι αρκετά δύσκολος, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τον πίνακα 1 (ή παρόμοιους και πληρέστερους που υπάρχουν στην βιβλιογραφία). Ο πίνακας 1 περιέχει τους μετασχηματισμούς Fourier που έχουμε υπολογίσει στα παραδείγματα που έχουμε δώσει. Έτσι, αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό της συνάρτησης  $\frac{2a}{a^2+s^2}$  θα κοιτάξουμε τον πίνακα μετασχηματισμών και θα δούμε ότι προέρχεται από την συνάρτηση  $e^{-a|t|}$ . Λόγω του ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι 1-1 είμαστε βέβαιοι ότι δεν υπάρχει άλλη συνάρτηση τέτοια ώστε να έχει τον ίδιο μετασχηματισμό. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό μιας πιο πο-

Πίνακας 1: Πίνακας μετασχηματισμών Fourier

$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{ist} ds$	$\mathcal{F}(f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} dt$
$a > 0, p_a(t) = \begin{cases} 1, & \text{όταν }  t  \leq \frac{a}{2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$	$\mathcal{F}(p_a)(s) = \begin{cases} \frac{2 \sin(\frac{a}{2}s)}{s}, & \text{όταν } s \neq 0 \\ a, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
$a > 0, q_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{a}, & \text{όταν }  t  \leq a \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$	$\mathcal{F}(q_a)(s) = \begin{cases} \frac{4 \sin^2(\frac{a}{2}s)}{as^2}, & \text{όταν } s \neq 0 \\ a, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
$a > 0, e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2+s^2}$
$\text{Re } a > 0, g_a(t) = \begin{cases} e^{-at}, & \text{όταν } t > 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$	$\mathcal{F}(g_a)(s) = \frac{a-is}{a^2+s^2} = \frac{1}{a+is}$
$a > 0, e^{-at^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-s^2/4a}$
$\text{Re } a > 0, \hat{g}_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } t \geq 0 \\ e^{at}, & \text{αλλιώς} \end{cases}$	$\mathcal{F}(\hat{g}_a)(s) = \frac{a+is}{a^2+s^2} = \frac{1}{a-is}$

λύπλοκης συνάρτησης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό της συνάρτησης

$$2\frac{2a}{a^2 + s^2} + 3\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-s^2/4a} \quad \text{όταν } a > 0$$

μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την γραμμικότητα του μετασχηματισμού Fourier και του αντιστρόφου της. Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}^{-1} \left( 2\frac{2a}{a^2 + s^2} + 3\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-s^2/4a} \right) \\ &= 2\mathcal{F}^{-1} \left( \frac{2a}{a^2 + s^2} \right) + 3\mathcal{F}^{-1} \left( \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-s^2/4a} \right) \\ &= 2e^{-a|t|} + 3e^{-at^2} \end{aligned}$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 68** Ο μετασχηματισμός *Fourier* της συνάρτησης

$$F(t) = \frac{2a}{a^2 + t^2}$$

με  $a > 0$  θα δίνεται από

$$\mathcal{F}(F)(s) = 2\pi e^{-a|s|}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το θεώρημα 63 και τον πίνακα 1.

Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία στη θεωρία πιθανοτήτων και συγκεκριμένα στο μετασχηματισμό *Fourier* της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την *Cauchy*, δηλαδή η συνάρτηση πυκνότητας είναι η  $f(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$ . Σύμφωνα με τα παραπάνω θα ισχύει ότι  $\mathcal{F}(f)(s) = e^{-|s|}$ .  $\square$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 69** Θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό *Fourier* για να επιλύσουμε την διαφορική εξίσωση

$$y'(x) + 2y(x) = e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Λαμβάνουμε τον μετασχηματισμό *Fourier* κατά μέλη της εξίσωσης και έχουμε

$$(is + 2)Y(s) = \frac{2}{1 + s^2}$$

ή αλλιώς, αναλύοντας σε απλά κλάσματα,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2}{(1 + s^2)(2 + is)} \\ &= \frac{1}{1 + is} + \frac{1}{3(1 - is)} - \frac{2}{3(2 + is)} \\ &= \frac{1 - is}{1 + s^2} + \frac{11 + is}{31 + s^2} - \frac{22 - is}{34 + s^2} \end{aligned}$$

Αρα ο αντίστροφος μετασχηματισμός της  $Y$  θα είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(Y) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1 - is}{1 + s^2}\right) + \frac{1}{3}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1 + is}{1 + s^2}\right) - \frac{2}{3}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2 - is}{4 + s^2}\right) \\ &= g_1(x) + \frac{1}{3}\hat{g}_1(x) - \frac{2}{3}g_2(x) \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τον πίνακα μετασχηματισμών. Δηλαδή

$$y(x) = \begin{cases} e^{-x} - \frac{2}{3}e^{-2x}, & \text{όταν } x > 0 \\ \frac{1}{3}e^x, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$$

□

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 70** Έστω ότι η  $f$  είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη στο  $\mathbb{R}$ . Θα μελετήσουμε την συνήθη διαφορική εξίσωση

$$y''(x) - y(x) = f(x) \quad \text{για } x \in \mathbb{R}$$

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό *Fourier* στα δυο μέλη της εξίσωσης και έχουμε

$$((is)^2 - 1) Y(s) = F(s)$$

Άρα

$$Y(s) = - \left( \frac{1}{1 + s^2} \right) F(s)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της συνέλιξης (δες θεώρημα 58) προκύπτει ότι

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x - y) f(y) dy, \quad \text{για } x \in \mathbb{R}$$

όπου  $k(x) = -\frac{1}{2}e^{-|x|}$ .

□

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 71** Θα επιλύσουμε την παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(u)y(x-u)du = e^{-\lambda|x|}, \quad \text{για } x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Μετασχηματίζουμε κατά μέλη με τον μετασχηματισμό *Fourier* την ολοκληρωτική εξίσωση και έπειτα εφαρμόζουμε το θεώρημα συνέλιξης 58 στο αριστερό μέλος, οπότε έχουμε

$$Y(s) = \frac{2\lambda(1+is)}{\lambda^2+s^2} = \frac{2\lambda(1+is)}{(\lambda+is)(\lambda-is)} = \frac{1-\lambda}{\lambda+is} + \frac{1+\lambda}{\lambda-is}, \quad s \in \mathbb{R}$$

Συνεπώς

$$y(x) = (1-\lambda)g_\lambda(x) + (1+\lambda)\hat{g}_\lambda(x)$$

ή αλλιώς

$$y(x) = \begin{cases} (1-\lambda)e^{-\lambda x}, & \text{όταν } x > 0 \\ (1+\lambda)e^{\lambda x}, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$$

□



**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 72** Έχουμε χρησιμοποιήσει στην ενότητα αυτή συχνά αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης χωρίς να έχουμε σταθεί στις προϋποθέσεις που απαιτούνται για να μπορεί να γίνει αυτό. Επίσης, έχουμε χρησιμοποιήσει το λεγόμενο **θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue** (στην ξενόγλωσση βιβλιογραφία είναι γνωστό ως *Lebesgue's Dominated Convergence Theorem*) το οποίο μας δίνει τις προϋποθέσεις για να γίνει εναλλαγή ορίου με ολοκλήρωμα χωρίς επίσης να έχουμε αναφερθεί σε αυτό. Τέτοιου είδους αποτελέσματα βρίσκονται σε βιβλία ανάλυσης.

Επίσης, κατά την εφαρμογή του μετασχηματισμού στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων υποθέσαμε αυθαίρετα ότι η άγνωστη συνάρτηση μπορεί να μετασχηματισθεί κατά *Fourier*. Αυτό βέβαια δεν μπορούμε να το γνωρίζουμε εκ των προτέρων, τουλάχιστο με μια απλή ματιά. Η ιδέα είναι ότι το υποθέτουμε και καταλήγουμε σε μια συνάρτηση η οποία «πιθανό» να είναι λύση του προβλήματος. Για να το διαπιστώσουμε θα πρέπει να δοκιμάσουμε αν όντως αυτή η συνάρτηση αποτελεί λύση του, δηλαδή ουσιαστικά η απόδειξη του

ότι μια λύση του προβλήματος είναι αυτή που υπολογίσαμε είναι μέσω της επαλήθευσης και όχι μέσω της εφαρμογής του μετασχηματισμού! Η ίδια παρατήρηση βεβαίως ισχύει και για τον επόμενο μετασχηματισμό που θα μελετήσουμε.  $\square$

## Μετασχηματισμός Laplace

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με τον μετασχηματισμό Laplace. Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 73** Έστω  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  και  $s \in \mathbb{C}$ . Ορίζουμε ως μετασχηματισμό Laplace της  $f$  τον επόμενο ολοκληρωτικό μετασχηματισμό

$$F(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

όπου  $s = x + iy$ , αν το ολοκλήρωμα υπάρχει.

Είναι δυνατόν να ορίσουμε και τον λεγόμενο δίπλευρο μετασχηματισμό Laplace του οποίου ο ορισμός είναι ο επόμενος.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 74** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  και  $s \in \mathbb{C}$ . Ορίζουμε ως δίπλευρο μετασχηματισμό Laplace τον επόμενο ολοκληρωτικό μετασχηματισμό

$$\mathcal{DL}(f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

όπου  $s = x + iy$ , αν το ολοκλήρωμα υπάρχει.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 75** Έστω  $f(t) = 1$  για κάθε  $t \geq 0$ . Ισχύει ότι, όταν  $s \in \mathbb{C}$  και τέτοιο ώστε  $s \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{e^{st}}{s} &= \frac{e^{x+iy}}{x+iy} \\ &= \frac{e^{xt}(\cos yt + i \sin yt)(x - iy)}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{e^{xt}}{x^2 + y^2} ((x \cos yt + y \sin yt) + i(x \sin yt - y \cos yt)) \end{aligned}$$

Από την άλλη μεριά έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int e^{st} dt &= \int e^{(x+iy)t} dt \\ &= \frac{e^{xt}}{x^2 + y^2} ((x \cos yt + y \sin yt) + i(x \sin yt - y \cos yt)) \end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$\int e^{st} dt = \frac{e^{st}}{s}$$

όταν  $s \neq 0$ .

Επομένως έχουμε ότι

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{-sA}}{-s} + \frac{1}{s} \right)$$

Όμως το όριο, δεδομένου ότι  $s = x + iy$ ,

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{e^{-sA}}{-s} = \lim_{A \rightarrow \infty} e^{-xA} (\cos(-yA) + i \sin(-yA))$$

υπάρχει μονάχα όταν  $x > 0$  ή αλλιώς  $\operatorname{Re} s > 0$  και είναι ίσο με μηδέν. Τελικά,

$$\mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s} \quad \text{όταν } \operatorname{Re} s > 0$$

□

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 76** Σε αυτό το παράδειγμα θα υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς

$$\mathcal{L}(\cos xt) \quad \text{και} \quad \mathcal{L}(\sin xt)$$

Ας υπολογίσουμε πρώτα τον μετασχηματισμό

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e^{ixt}) &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{ixt} dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{e^{(ix-s)t}}{ix - s} \Big|_{t=0}^{t=A} \\ &= \frac{1}{s - ix} \end{aligned}$$

αρκεί  $\operatorname{Re} s > 0$  για τον ίδιο λόγο με το προηγούμενο παράδειγμα.

Επειδή

$$\cos xt = \frac{e^{ixt} + e^{-ixt}}{2} \quad \text{και} \quad \sin xt = \frac{e^{ixt} - e^{-ixt}}{2i}$$

προκύπτει ότι, όταν  $\operatorname{Re} s > 0$ ,

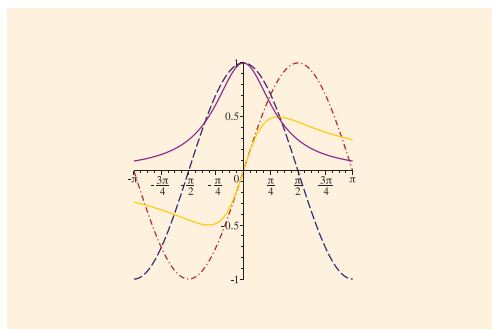
$$\mathcal{L}(\cos xt) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s - ix} + \frac{1}{s + ix} \right) = \frac{s}{s^2 + x^2}$$

$$\mathcal{L}(\sin xt) = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{s - ix} - \frac{1}{s + ix} \right) = \frac{x}{s^2 + x^2}$$

□

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 77** Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{όταν } 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & \text{όταν } t > 1 \end{cases}$$



Σχήμα 3: Τα γραφήματα των συναρτήσεων  $\cos t$  (με μπλε διακεκομμένη γραμμή)  $\sin t$  (με κίτρινη διακεκομμένη γραμμή) και των μετασχηματισμών τους κατά Laplace (κίτρινο και μοβ χρώμα αντίστοιχα).

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^1 te^{-st} dt + \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A e^{-st} dt \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s^2} \end{aligned}$$

αρκεί  $\operatorname{Re} s > 0$ . □

**ΟΡΙΣΜΟΣ 78** Θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

συγκλίνει απολύτως όταν το όριο

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A |f(t)e^{-st}| dt$$

υπάρχει. Θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

συγκλίνει ομοιόμορφα για κάποια  $s \in U$  όπου  $U$  ένα υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου, εάν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει κάποιος αριθμός  $t_0$  τέτοιος ώστε αν  $t \geq t_0$  τότε

$$\left| \int_t^{\infty} f(t)e^{-st} dt \right| < \varepsilon$$

για κάθε  $s \in U$ .

Για να είναι καλά ορισμένος ο μετασχηματισμός Laplace μια ικανή συνθήκη για την συνάρτηση  $f$  είναι η επόμενη.



**ΟΡΙΣΜΟΣ 79** Θα λέμε ότι η συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  είναι εκθετικής τάξης  $a$  εάν υπάρχει σταθερά  $M > 0$  και κάποιο  $a > 0$  τέτοια ώστε για κάποιο  $t_0 \geq 0$ , να ισχύει

$$|f(t)| \leq Me^{at}, \quad t \geq t_0$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 80** Για να εξετάσουμε αν κάποια συνάρτηση είναι εκθετικής τάξης για κάποιο  $a > 0$  αρκεί να μελετήσουμε τον λόγο

$$\frac{f(t)}{e^{at}}$$

και να δούμε αν συγκλίνει καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Αν μπορούμε να διαλέξουμε κάποιο  $a > 0$  τέτοιο ώστε ο λόγος αυτός να είναι φραγμένος για κάθε  $t > 0$  τότε το μικρότερο από αυτά τα  $a$  (που έχει αυτή την ιδιότητα) είναι ο αριθμός που χρειαζόμαστε και η συνάρτηση  $f$  λέγεται εκθετικής τάξης  $a$ . Για παράδειγμα όλες οι συναρτήσεις  $f(t) = t^p$  για οποιοδήποτε  $p$  είναι εκθετικής τάξης για οποιοδήποτε  $a$ . Η συνάρτηση  $e^{pt}$  είναι εκθετικής τάξης  $p$  ενώ η συνάρτηση  $e^{t^2}$  δεν είναι εκθετικής τάξης.

Για παράδειγμα έστω η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{x^k}{e^{ax}}, \quad a > 0, \quad k \in \mathbb{N}$$

Υπολογίζοντας την παράγωγο της  $g$  διαπιστώνουμε ότι είναι φθίνουσα συνάρτηση για κάθε  $x \geq \frac{k}{a}$ . Επιπλέον, με τον κανόνα του *L'Hospital* προκύπτει ότι η συνάρτηση  $g(x)$  συγκλίνει στο 0 καθώς  $x \rightarrow +\infty$ . Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση  $e^{ax}$  «τελικά» (δηλαδή από κάποιο  $x_0$  και πάνω) ξεπερνά την συνάρτηση  $x^k$  για οποιαδήποτε  $a > 0$  και  $k \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 81** (Υπαρξη Μετασχηματισμού Laplace)

Αν η  $f$  είναι τμηματικά συνεχής στο  $[0, \infty)$  και εκθετικής τάξεως  $a$ , τότε ο μετασχηματισμός Laplace  $\mathcal{L}(f)$  υπάρχει για  $s \in \mathbb{C}$  τέτοια ώστε  $\operatorname{Re} s = x > a$  και μάλιστα συγκλίνει απόλυτα.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 82** Η συνάρτηση  $f(t) = e^{at}$  με  $t \geq 0$

είναι συνεχής και εκθετικής τάξεως  $a$ . Οπότε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{at}) &= \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt \\ &= \frac{1}{s-a}\end{aligned}$$

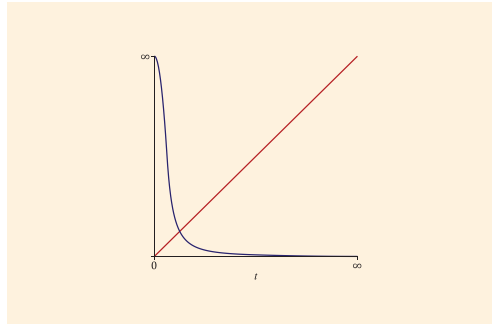
για  $\operatorname{Re} s > a$ . Ο αριθμός  $a$  μπορεί να είναι και μιγαδικός οπότε σε αυτή την περίπτωση πρέπει  $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$ .

□

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 83** Η συνάρτηση  $f(t) = t$  για  $t \geq 0$  είναι συνεχής και εκθετικής τάξεως (για οποιοδήποτε  $a$ ) επομένως

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \int_0^{\infty} te^{-st} dt \\ &= \left. \frac{-te^{-st}}{s} \right|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s} \mathcal{L}(1) \\ &= \frac{1}{s^2}\end{aligned}$$

αρκεί  $\operatorname{Re} s > 0$ .



Σχήμα 4: Η συνάρτηση  $f(t) = t$  δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμη αλλά είναι εκθετικής τάξεως. Στο σχήμα αυτό φαίνεται το γράφημα της (με κόκκινο χρώμα) καθώς και το γράφημα του μετασχηματισμού της (με μπλε χρώμα).

Παρομοίως, μπορούμε να υπολογίσουμε ότι

$$\mathcal{L}(t^2) = \frac{2}{s^3}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

και επαγωγικά ισχύει ότι

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

□

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 84** Έστω η συνάρτηση

$$f(t) = 2te^{t^2} \cos(e^{t^2})$$

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, \infty)$  αλλά δεν είναι εκθετικής τάξης. Παρόλα αυτά ο μετασχηματισμός Laplace υπάρχει διότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(s) &= \int_0^{\infty} 2te^{t^2} \cos(e^{t^2})e^{-st} dt \\ &= e^{-st} \sin(e^{t^2}) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} \sin(e^{t^2}) dt \\ &= \sin(1) + s\mathcal{L}\left(\sin(e^{t^2})\right)\end{aligned}$$

αρκεί  $\operatorname{Re} s > 0$ . Ο μετασχηματισμός Laplace της  $\sin(e^{t^2})$  υπάρχει διότι η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής και εκθετικής τάξεως.  $\square$

## Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace

Στην συνέχεια θα παραθέσουμε βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace σε μορφή θεωρημάτων.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 85 (ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ)** Έστω ότι υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace για τις συναρτήσεις  $f_1$  και  $f_2$  για  $\operatorname{Re} s > a_1$  και  $\operatorname{Re} s > a_2$  αντίστοιχα. Τότε για  $\operatorname{Re} s > \max\{a_1, a_2\}$  υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace του γραμμικού συνδυασμού των συναρτήσεων και μάλιστα

$$\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{L}(f_1) + c_2 \mathcal{L}(f_2)$$

για οποιεσδήποτε σταθερές  $c_1, c_2$ .

Η απόδειξη είναι απλή χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του ολοκληρώματος.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 86** Έστω η συνάρτηση

$$\cosh xt = \frac{e^{xt} + e^{-xt}}{2}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace υπάρχει και μάλιστα

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\cosh xt) &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}(e^{xt}) + \mathcal{L}(e^{-xt})) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-x} + \frac{1}{s+x} \right) \\ &= \frac{s}{s^2 - x^2}\end{aligned}$$

Παρομοίως

$$\mathcal{L}(\sinh xt) = \frac{x}{s^2 - x^2}$$

□

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 87** Έστω η συνάρτηση  $f(t) = a_0 + \dots + a_n t^n$ . Είναι συνεχής και εκθετικής τάξης επομένως υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace. Έχουμε

$$\mathcal{L}(f)(s) = \sum_{k=0}^n a_k \mathcal{L}(t^k) = \sum_{k=0}^n \frac{k! a_k}{s^{k+1}}$$

□

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 88** Έστω η συνάρτηση

$$f(t) = e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}. \quad -\infty < t < \infty$$

Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace του α-θροίσματος όρο προς όρο. Έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}(t^{2n}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{n! s^{2n+1}} = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n) \cdots (n+2)(n+1)}{s^{2n}}$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(2n+1)}{s^2} = \infty$$

επομένως η σειρά αυτή αποκλίνει για κάθε  $s$ .

Παρόλα αυτά ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης  $e^{-t^2}$  υπάρχει διότι είναι συνεχής και εκθετικής τάξεως.  $\square$

Στο επόμενο παράδειγμα θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace μιας οικογένειας συναρτήσεων που περιέχει την  $e^{-t^2}$ .



**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 89** Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Έχουμε ότι

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής  $y = \frac{t-m}{\sqrt{2\sigma}}$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(s) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-sm} \int_0^{\infty} e^{-\left(y^2 + s\sqrt{2}\sigma y + \frac{s^2\sigma^2}{2}\right)} e^{\sigma^2 s^2/2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-sm} e^{\sigma^2 s^2/2} \int_0^{\infty} e^{-(y + \frac{s\sigma}{\sqrt{2}})^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-sm} e^{\sigma^2 s^2/2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr \\ &= \frac{1}{2} e^{-sm} e^{\sigma^2 s^2/2} \end{aligned}$$

όπου στο τέλος κάναμε την αλλαγή μεταβλητής  $y + \frac{s\sigma}{\sqrt{2}} = r$ . □

**ΘΕΩΡΗΜΑ 90** Έστω ότι η  $f$  είναι τμηματικά συνεχής στο  $[0, \infty)$  και εκθετικής τάξεως. Τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-st}| dt$$

συγκλίνει ομοιόμορφα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 91** Αν η  $f$  είναι τμηματικά συνεχής στο  $[0, \infty)$  και εκθετικής τάξης  $a$  τότε

$$F(s) = \mathcal{L}(f)(s) \rightarrow 0 \quad \text{καθώς } \operatorname{Re} s \rightarrow \infty$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι αρκετά σημαντικό καθότι αν μια συνάρτηση  $F(s)$  δεν συγκλίνει στο μηδέν καθώς  $\operatorname{Re} s \rightarrow \infty$  τότε δεν μπορεί να είναι ο μετασχηματισμός Laplace κάποιας συνάρτησης. Για παράδειγμα οι συναρτήσεις  $\frac{s-1}{s+1}$ ,  $\frac{e^s}{s}$ ,  $s^2$  δεν συγκλίνουν στο μηδέν καθώς το  $\operatorname{Re} s \rightarrow \infty$  επομένως δεν είναι ο μετασχηματισμός Laplace κάποιας συνάρτησης.

## Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Λόγω του θεωρήματος 81 γνωρίζουμε ότι οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση  $f$  η οποία είναι εκθετικής τάξεως επιδέχεται μετασχηματισμό Laplace. Ας συμβολίσουμε με  $C_a\mathcal{L}$  το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων  $f$  οι οποίες είναι εκθετικής τάξης  $a$ . Είναι εύκολο να δούμε ότι αν  $f \in C_a\mathcal{L}$  και  $g \in C_a\mathcal{L}$  τότε και ο γραμμικός συνδυασμός τους επιδέχεται μετασχηματισμό Laplace. Άρα ο χώρος  $C_a\mathcal{L}$  είναι ένας διανυσματικός χώρος. Λόγω της γραμμικότητας του ολοκληρώματος εύκολα βλέπουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός

$$\mathcal{L} : C_a\mathcal{L} \rightarrow \text{im } \mathcal{L}$$

Ο πυρήνας  $\ker \mathcal{L}$  αποτελείται από τις συναρτήσεις εκείνες για τις οποίες

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = 0 \quad \text{για κάθε } s \in \mathbb{C}, \quad \text{Re } s > a$$

Με άλλα λόγια, αν  $s = x + iy$  τότε

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) e^{-iyt} dt = 0 \quad \text{για κάθε } x > a, y \in \mathbb{R}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 59 προκύπτει ότι ο πυρήνας του μετασχηματισμού αποτελείται μονάχα από το μηδενικό στοιχείο. Αυτό σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός Laplace είναι 1-1 και συνεπώς αντιστρέψιμος. Ο αντίστροφος του είναι επίσης ένας γραμμικός μετασχηματισμός (βλέπε γραμμική άλγεβρα). Έτσι, χρησιμοποιώντας τα παραδείγματα μετασχηματισμών Laplace και τις ιδιότητες του μετασχηματισμού είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό ορισμένων συναρτήσεων χωρίς να γνωρίζουμε την μορφή του αντιστρόφου.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 92** Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

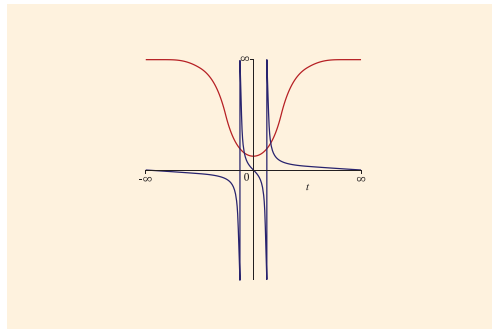
$$\frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2(s+1)}$$

Χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του αντιστρόφου

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2(s+1)}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2(s-1)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2(s+1)}\right) \\ &= \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} \\ &= \cosh t, \quad t \geq 0\end{aligned}$$

□



Σχήμα 5: Τα γραφήματα των συναρτήσεων  $\cosh t$  (με κόκκινη γραμμή) και του μετασχηματισμού της (με μπλε γραμμή).

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 93** Ας δούμε την συνάρτηση

$$u_a(t) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } t \geq a \\ 0, & \text{όταν } t < a \end{cases}$$

η οποία είναι γνωστή και ως συνάρτηση του *Heaviside*. Υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό *Laplace* και έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u_a)(s) &= \int_0^{\infty} u_a(t)e^{-st} dt \\ &= \int_a^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \frac{e^{-sa}}{s} \quad \text{όταν } \operatorname{Re} s > 0\end{aligned}$$

Αν υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό *Laplace* της συνάρτησης

$$v_a(t) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } t > a \\ 0, & \text{όταν } t \leq a \end{cases}$$

η οποία διαφέρει σε ένα σημείο από την  $u_a$ , θα βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα. Αυτό συμβαίνει διότι οι συναρτήσεις  $u_a$  και  $v_a$  δεν είναι συνεχείς για αυτό και δεν ορίζεται καλά ο αντίστροφος σε αυτή την περίπτωση.

Παρόμοια η συνάρτηση

$$u_{ab}(t) = \frac{1}{b-a} (u_a(t) - u_b(t)) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } t < a \\ \frac{1}{b-a}, & \text{όταν } a \leq t < b \\ 0, & \text{όταν } t \geq b \end{cases}$$

έχει ως μετασχηματισμό Laplace την

$$\mathcal{L}(u_{ab})(s) = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s(b-a)}$$

□

**ΘΕΩΡΗΜΑ 94** Αν  $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$  για  $\operatorname{Re} s > 0$  τότε

$$F(s-a) = \mathcal{L}(e^{at} f(t)), \quad a \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Re} s > a$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 95** Έχουμε αποδείξει ότι

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Οπότε

$$\mathcal{L}(te^{at}) = \frac{1}{(s-a)^2}, \quad \operatorname{Re} s > a$$

και γενικότερα

$$\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \operatorname{Re} s > a$$

Εφόσον η συνάρτηση  $t^n e^{at}$  είναι συνεχής τότε προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{(s-a)^{n+1}} \right) = \frac{1}{n!} t^n e^{at}, \quad t \geq 0$$

□

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 96** Δεδομένου ότι

$$\mathcal{L}(\sin xt) = \frac{x}{s^2 + x^2}$$

τότε

$$\mathcal{L}(e^{2t} \sin 3t) = \frac{3}{(s-2)^2 + 9}$$



Επίσης, ισχύουν τα παρακάτω όταν  $\operatorname{Re} s > a$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{at} \cos xt) &= \frac{s - a}{(s - a)^2 + x^2} \\ \mathcal{L}(e^{at} \sin xt) &= \frac{x}{(s - a)^2 + x^2} \\ \mathcal{L}(e^{at} \cosh xt) &= \frac{s - a}{(s - a)^2 - x^2} \\ \mathcal{L}(e^{at} \sinh xt) &= \frac{x}{(s - a)^2 - x^2}\end{aligned}$$

□

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 97** Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό της συνάρτησης

$$\frac{s}{s^2 + 4s + 1}$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4s+1}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s+2)^2-3}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2-3}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+2)^2-3}\right) \\ &= e^{-2t} \cosh(\sqrt{3}t) - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-2t} \sinh(\sqrt{3}t)\end{aligned}$$

□

**ΘΕΩΡΗΜΑ 98** Αν  $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$  τότε

$$\mathcal{L}(u_a(t)f(t-a)) = e^{-as}F(s), \quad a \geq 0$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 99** Έστω η συνάρτηση

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } 0 \leq t < 1 \\ (t-1)^2, & \text{όταν } t \geq 1 \end{cases}$$

Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(g)(s) &= \mathcal{L}(u_1(t)(t-1)^2) \\ &= e^{-s}\mathcal{L}(t^2) \\ &= \frac{2e^{-s}}{s^3}, \quad \operatorname{Re} s > 0\end{aligned}$$

□

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 100** Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$\frac{e^{-2s}}{s^2 + 1}$$

Επειδή

$$\frac{e^{-2s}}{s^2 + 1} = e^{-2s} \mathcal{L}(\sin t)$$

τότε

$$\mathcal{L}^{-1} \left( \frac{e^{-2s}}{s^2 + 1} \right) = u_2(t) \sin(t - 2), \quad t \geq 0$$

□

**ΘΕΩΡΗΜΑ 101** Αν η  $f$  είναι τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξεως  $a$  τότε για τον μετασχηματισμό Laplace ισχύει ότι

$$\frac{d^n}{ds^n} F(s) = \mathcal{L}((-1)^n t^n f(t)), \quad n = 1, 2, \dots \quad \operatorname{Re} s > a$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 102** Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t \cos xt) &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\cos xt) \\ &= -\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2 + x^2} \\ &= \frac{s^2 - x^2}{(s^2 + x^2)^2}\end{aligned}$$

και παρομοίως

$$\mathcal{L}(t \sin xt) = \frac{2xs}{(s^2 + x^2)^2}$$

□

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 103** Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό της συνάρτησης

$$\ln \frac{s+a}{s+b}$$

Εφόσον

$$\frac{d}{ds} \ln \frac{s+a}{s+b} = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}$$

τότε

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left( \ln \frac{s+a}{s+b} \right) \\ &= -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b} \right) \\ &= \frac{1}{t} (e^{-bt} - e^{-at}) \end{aligned}$$

□

**ΘΕΩΡΗΜΑ 104** Αν η  $f$  είναι τμηματικά συνεχής στο  $[0, \infty)$ , εκθετικής τάξης  $a$  και τέτοια ώστε το  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$  να υπάρχει, τότε

$$\int_s^\infty F(x) dx = \mathcal{L} \left( \frac{f(t)}{t} \right), \quad s > a$$

όπου  $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$ .

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 105** Είχαμε υπολογίσει τον μετασχηματισμό Laplace της  $\sin t$  και επομένως έχουμε ότι

$$\mathcal{L} \left( \frac{\sin t}{t} \right) = \int_s^\infty \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2} - \arctan s, \quad s > 0$$

Παρόμοια έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\frac{\sinh xt}{t}\right) &= \int_s^\infty \frac{xdy}{y^2 - x^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_s^\infty \left(\frac{1}{y-x} - \frac{1}{y+x}\right) dy \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{s+x}{s-x}, \quad \text{για } s > |x|\end{aligned}$$

□

Για μια γενίκευση των μετασχηματισμών Fourier και Laplace δείτε την επόμενη [εργασία](#).

## Η συνάρτηση Γάμμα

Έχουμε αποδείξει ότι

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Θα γενικεύσουμε το αποτέλεσμα αυτό για μη ακέραιες δυνάμεις, οπότε θα υπολογίσουμε το

$$\mathcal{L}(t^a)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^a dt, \quad a > -1$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής  $x = st$  όπου  $s > 0$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t^a)(s) &= \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^a \frac{1}{s} dx \\ &= \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^{\infty} x^a e^{-x} dx \end{aligned}$$

Η συνάρτηση

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \quad p > 0$$

ονομάζεται συνάρτηση Γάμμα. Με αυτό τον συμβολισμό έχουμε ότι

$$\mathcal{L}(t^a)(s) = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}, \quad a > -1, \quad s > 0$$

Επομένως όταν  $a = n = 1, 2, \dots$  ισχύει ότι

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Μπορεί να ορισθεί ακόμη και για μιγαδικό εκθέτη  $a$  αρκεί  $a \neq 0, -1, -2, \dots$  και ισχύει ότι

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \quad a \neq 0, -1, -2, \dots$$

Πράγματι, όταν  $a = n \in \mathbb{N}$  μπορεί εύκολα να αποδείξουμε την σχέση αφού

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= \int_0^\infty x^n e^{-x} dx \\ &= \int_0^\infty x^n (-e^{-x})' dx \\ &= [e^{-x} x^n]_0^\infty + n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \\ &= n\Gamma(n) \end{aligned}$$



**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 106** Για  $a = -\frac{1}{2}$  έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}}$$

Για να υπολογίσουμε το  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$  κάνουμε αλλαγή μεταβλητής  $x = u^2$  και έχουμε

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

Συνεπώς

$$\mathcal{L}\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad s > 0$$

οπότε και

$$\mathcal{L}^{-1}\left(s^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}, \quad t > 0$$

□

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 107** Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό

$$\mathcal{L}(\ln t)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \ln t dt$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής  $x = st$  όπου  $s > 0$  έχουμε ότι

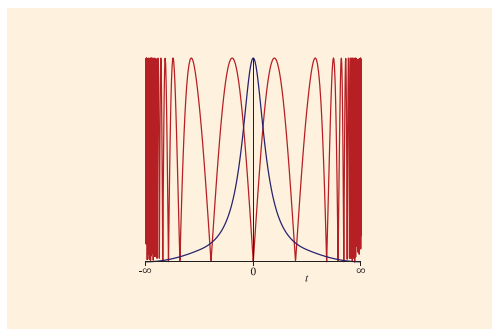
$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\ln t)(s) &= \int_0^\infty e^{-x} \ln\left(\frac{x}{s}\right) \frac{1}{s} dx \\ &= \frac{1}{s} \left( \int_0^\infty e^{-x} \ln x dx - \ln s \int_0^\infty e^{-x} dx \right) \\ &= -\frac{1}{s} (\ln s + \gamma)\end{aligned}$$

όπου  $\gamma = -\int_0^\infty e^{-x} \ln x dx = 0.577 \dots$  και ονομάζεται η σταθερά του Euler την οποία είχαμε ξαναδεί ως την διαφορά  $\sum \frac{1}{n} - \ln n$ .  $\square$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 108** Έστω ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, \infty)$  και εκθετικής τάξης  $a$  και επίσης η  $f'$  είναι τμηματικά συνεχής στο  $[0, \infty)$ . Τότε

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0+) \quad \text{όταν } \operatorname{Re} s > a$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 109** Έστω μια συνάρτηση  $f(t)$ . Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό  $\mathcal{L}(tf'(t))$ . Έχουμε



Σχήμα 6: Το γράφημα της περιοδικής συνάρτησης  $|\sin t|$  (με κόκκινο χρώμα) και του μετασχηματισμού της (με μπλε χρώμα).

ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(tf'(t)) &= (-1) \left( \mathcal{L}(f'(t)) \right)' (s) \text{ (δες θεώρημα 101)} \\ &= - (sF(s) - f(0+))' \\ &= -(sF'(s) + F(s)) \end{aligned}$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 110** Θα υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς

$$\mathcal{L}(\sin^2 xt) \quad \text{και} \quad \mathcal{L}(\cos^2 xt)$$

μέσω των παραγώγων των συναρτήσεων  $f(t) = \sin^2 xt$  και  $g(t) = \cos^2 xt$ . Η παράγωγος της  $f$  είναι η  $f'(t) =$

$2x \sin xt \cos xt = x \sin 2xt$ . Επειδή

$$\mathcal{L}(x \sin 2xt) = s\mathcal{L}(\sin^2 xt) - \sin^2 0$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\sin^2 xt) &= \frac{1}{s}\mathcal{L}(x \sin 2xt) \\ &= \frac{x}{s} \frac{2x}{s^2 + x^2} \\ &= \frac{2x^2}{s(s^2 + x^2)}\end{aligned}$$

Παρομοίως,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\cos^2 xt) &= \frac{1}{s}\mathcal{L}(-x \sin 2xt) + \frac{1}{s} \\ &= -\frac{x}{s} \frac{2x}{s^2 + 4x^2} + \frac{1}{s} \\ &= \frac{s^2 + 2x^2}{s(s^2 + 4x^2)}\end{aligned}$$

□

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 111** Αν για μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  ισχύει ότι  $f(0) = 0$  τότε ισχύει και ότι

$$f'(t) = \mathcal{L}^{-1}(sF(s))$$

όπου  $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$ .

Οπότε, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 - a^2}\right) = \left(\frac{\sinh at}{a}\right)' = \cosh at$$

□

Γενικότερα, ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 112** Έστω ότι οι  $f, f', \dots, f^{(n-1)}$  είναι συνεχείς στο  $(0, \infty)$  και εκθετικής τάξεως ενώ η  $f^{(n)}$  είναι τμηματικά συνεχής στο  $[0, \infty)$ . Τότε

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n \mathcal{L}(f) - s^{n-1} f(0+) - s^{n-2} f'(0+) - \dots - f^{(n-1)}(0+)$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 113** Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace των πολυωνύμων Laguerre

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

Θέτουμε  $y(t) = t^n e^{-t}$  και υπολογίζουμε πρώτα τον μετασχηματισμό

$$\mathcal{L}(y^{(n)}) = s^n \mathcal{L}(y) = \frac{s^n n!}{(s+1)^{n+1}}$$

Επομένως έχουμε ότι

$$\mathcal{L}(L_n) = \mathcal{L}\left(e^t \frac{1}{n!} y^{(n)}\right) = \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} s > 1$$

□

Τέλος, με το επόμενο θεώρημα θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 114** Έστω ότι η  $f$  είναι τμηματικά συνεχής στο  $[0, \infty)$  και εκθετικής τάξεως  $a$ . Αν

$$g(t) = \int_0^t f(u) du$$

τότε

$$\mathcal{L}(g)(s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(f), \quad \operatorname{Re} s > a$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Εφόσον  $g'(t) = f(t)$  εκτός από τα σημεία ασυνέχειας της  $f$  τότε με ολοκλήρωση κατά παράγο-

ντες ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(g)(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \frac{g(t)e^{-st}}{-s} \Big|_0^A + \frac{1}{s} \int_0^A e^{-st} f(t) dt \right]\end{aligned}$$

Θα υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{g(A)e^{-sA}}{-s}$$

Επειδή

$$\begin{aligned}|g(A)e^{-sA}| &\leq e^{-A \operatorname{Re} s} \int_0^A |f(u)| du \\ &\leq M e^{-A \operatorname{Re} s} \int_0^A e^{au} du \\ &= \frac{M}{a} \left( e^{-(\operatorname{Re} s - a)A} - e^{-A \operatorname{Re} s} \right) \\ &\rightarrow 0 \text{ καθώς } A \rightarrow \infty \text{ για } \operatorname{Re} s > a > 0\end{aligned}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και όταν  $a = 0$ . Επομένως

$$\mathcal{L}(g) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(f), \quad \text{για } \operatorname{Re} s > a$$

□

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 115** Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$\int_0^t \frac{\sin u}{u} du$$

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t \frac{\sin u}{u} du\right) = \frac{1}{s} \mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \frac{1}{s} \arctan \frac{1}{s}$$

□

Στα επόμενα δυο θεωρήματα θα μελετήσουμε την συμπεριφορά μιας συνάρτησης  $f$  στο μηδέν και το  $+\infty$  μέσω του μετασχηματισμού της.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 116** Έστω ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, \infty)$  και εκθετικής τάξης  $a$  και επίσης η  $f'$  είναι τμηματικά συνεχής στο  $[0, \infty)$ . Τότε ισχύει ότι

$$f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s), \quad s \in \mathbb{R}$$

όπου  $F(s) = \mathcal{L}(f)$ .



**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Ξεκινώντας από τον μετασχηματισμό Laplace της παραγώγου έχουμε ότι

$$\mathcal{L}(f') = sF(s) - f(0+), \quad s > a$$

Επειδή κάθε μετασχηματισμένη συνάρτηση συγκλίνει στο μηδέν καθώς  $s \rightarrow \infty$  τότε εύκολα προκύπτει ότι

$$sF(s) - f(0+) \rightarrow 0 \quad \text{καθώς } s \rightarrow \infty$$

και άρα και η ζητούμενη σχέση. □

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 117** Έστω

$$\mathcal{L}(f) = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)}$$

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα (υποθέτοντας ότι ικανοποιεί η συνάρτηση  $f$  τις απαιτούμενες συνθήκες) έχουμε ότι

$$f(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left( \frac{s+1}{(s-1)(s+2)} \right) = 1$$

□

**ΘΕΩΡΗΜΑ 118** Έστω ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, \infty)$  και εκθετικής τάξης  $a$  και επίσης η  $f'$  είναι τμηματικά συνεχής στο  $[0, \infty)$ . Ας υποθέσουμε ακόμη ότι το όριο  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  υπάρχει. Τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s), \quad s \in \mathbb{R}$$

όπου  $F(s) = \mathcal{L}(f)$ .

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 119** Έστω  $f(t) = \sin t$ . Τότε

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s^2 + 1} = 0$$

Δεν μπορούμε όμως να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι το ίδιο όριο έχει και η  $f$  καθώς  $t \rightarrow \infty$  διότι στην προκειμένη περίπτωση δεν έχει καν όριο. Αν όμως είχε κάποιο όριο, τότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα θα όφειλε να είναι ίσο με το  $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ .  $\square$

## Συνέλιξη

Στην συνέχεια θα αναφερθούμε στην συνέλιξη δυο συναρτήσεων την οποία ορίζουμε για την προκειμένη

περίπτωση (αφού υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις ορίζονται στο  $[0, +\infty)$ ) να είναι ως εξής

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

Με τον μετασχηματισμό  $u = t - x$  είναι καθαρό ότι  $f * g = g * f$ . Εύκολα αποδεικνύονται και οι παρακάτω τρεις ιδιότητες,

$$(i) c(f * g) = cf * g = f * cg$$

$$(ii) f * (g * h) = (f * g) * h$$

$$(iii) f * (g + h) = f * g + f * h$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 120 (ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ)** Αν οι  $f$  και  $g$  είναι τμηματικά συνεχείς στο  $[0, \infty)$  και εκθετικής τάξεως  $a$ , τότε

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(g)(s), \quad \text{για } \operatorname{Re} s > a$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 121** Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\mathcal{L}(e^{at} * e^{bt}) = \frac{1}{(s-a)(s-b)}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right) &= e^{at} * e^{bt} \\ &= \int_0^t e^{ax} e^{b(t-x)} dx \\ &= \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}, \quad a \neq b\end{aligned}$$

□

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 122** Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό της συνάρτησης

$$\frac{1}{s^2(s-1)}$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα της συνέλιξης. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\mathcal{L}(t * e^t) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s-1}$$

συνεπώς ο αντίστροφος είναι η συνάρτηση  $t * e^t = e^t - t - 1$ .

□

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 123** Γνωρίζουμε ότι

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό της συνάρτησης

$$\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right) &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} * e^t \\ &= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{t-x} dx \\ &= \frac{e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx\end{aligned}$$

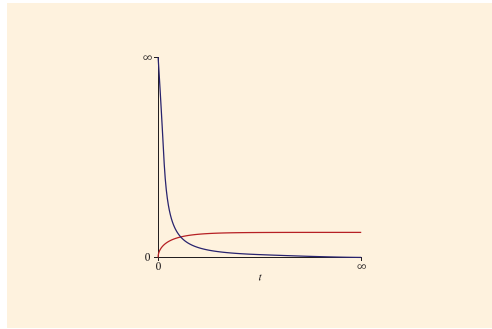
Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής  $u = \sqrt{x}$  προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right) &= \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2} du \\ &= e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t})\end{aligned}$$

Επίσης έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\left(\operatorname{erf}\left(\sqrt{t}\right)\right)(s) = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}$$

□



Σχήμα 7: Το γράφημα της συνάρτησης  $\operatorname{erf}\left(\sqrt{t}\right)$  (με κόκκινο χρώμα) και του μετασχηματισμού της (με μπλε χρώμα).

## Η συνάρτηση Βήτα

Έστω οι συναρτήσεις  $f(t) = t^{a-1}$  και  $g(t) = t^{b-1}$  όπου  $a, b > 0$ . Τότε

$$(f * g)(t) = \int_0^t x^{a-1}(t-x)^{b-1} dx$$

Κάνοντας την αντικατάσταση  $x = ut$  προκύπτει ότι

$$(f * g)(t) = t^{a+b-1} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1} du$$

Η συνάρτηση

$$B(a, b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1} du$$

ονομάζεται **ΣΤΥΝΑΡΤΗΣΗ ΒΗΤΑ**. Εφαρμόζοντας το θεώρημα της συνέλιξης έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f * g) &= \mathcal{L}(t^{a+b-1} B(a, b)) = \mathcal{L}(t^{a-1}) \mathcal{L}(t^{b-1}) \\ &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{s^{a+b}} \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}t^{a+b-1}B(a, b) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{s^{a+b}}\right) \\ &= \Gamma(a)\Gamma(b)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{a+b}}\right) \\ &= \Gamma(a)\Gamma(b)\frac{t^{a+b-1}}{\Gamma(a+b)}\end{aligned}$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι  $\mathcal{L}(t^{a+b-1}) = \frac{\Gamma(a+b)}{s^{a+b}}$  και επομένως  $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\Gamma(a+b)}{s^{a+b}}\right) = \Gamma(a+b)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{a+b}}\right) = t^{a+b-1}$ .

Επομένως προκύπτει η φόρμουλα

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Στον πίνακα 2 συγκεντρώνουμε ορισμένους από τους μετασχηματισμούς Laplace που έχουμε υπολογίσει στα παραδείγματα. Για περισσότερους μετασχηματισμούς και πληρέστερους πίνακες μπορεί κανείς να συμβουλευθεί την προτεινόμενη βιβλιογραφία.



Πίνακας 2: Πίνακας μετασχηματισμών Laplace

$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{st} dy, s \in \mathbb{C}, t \geq 0$	$F(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, s \in \mathbb{C}$
$f(t) = 1$	$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s}, \operatorname{Re} s > 0$
$f(t) = e^{ixt}$	$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s-ix}, \operatorname{Re} s > 0$
$f(t) = \cos xt$	$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{s}{s^2+x^2}, \operatorname{Re} s > 0$
$f(t) = \sin xt$	$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{x}{s^2+x^2}$
$f(t) = e^{at}, a \in \mathbb{C}$	$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s-a}, \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$
$f(t) = t^n$	$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \operatorname{Re} s > 0$

## Εφαρμογές του μετασχηματισμού Laplace

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 124** Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''(t) + y(t) = 1$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

Σε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών όπως το παραπάνω ο μετασχηματισμός Laplace υπερτερεί έναντι του μετασχηματισμού Fourier.

Υποθέτουμε ότι η λύση ικανοποιεί όλες τις απαιτούμενες προϋποθέσεις ούτως ώστε να μπορούμε να μετασχηματίσουμε την παραπάνω εξίσωση κατά Laplace. Έτσι έχουμε

$$\mathcal{L}(y'') + \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(1)$$

οπότε λύνοντας ως προς  $Y(s)$  προκύπτει ότι

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1}$$

Υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό του δεξιού μέλους έχουμε ότι

$$y(t) = 1 - \cos t$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι πράγματι είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών.  $\square$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 125** Θα μπορούσαμε να ορίσουμε τον μονόπλευρο μετασχηματισμό *Fourier* ως εξής

$$\hat{\mathcal{F}}(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-ist} dt = \hat{F}(s)$$

Τότε για κατάλληλη  $f$  θα ισχύει ότι

$$\hat{\mathcal{F}}(f'(t)) = (is)\hat{F}(s) - f(0+)$$

Παρομοίως για μεγαλύτερης τάξης παραγώγους. Με αυτό το μετασχηματισμό θα μπορούσε κανείς να εργαστεί στο προηγούμενο πρόβλημα έτσι ώστε να χρησιμοποιήσει και τις αρχικές συνθήκες. Δεν θα μπορούσε όμως να μετασχηματίσει το δεξί μέλος. Το βασικό προτέρημα του μετασχηματισμού *Laplace* έναντι του μονόπλευρου μετασχηματισμού *Fourier* είναι το γεγονός ότι δύναται να μετασχηματίσει μια συνάρτηση η οποία δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμη στο  $(0, +\infty)$  αλλά βεβαίως να είναι εκθετικής τάξης. Για τις συναρτήσεις οι οποίες δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμες σε όλο το  $\mathbb{R}$  μπορεί να χρησιμοποιήσει κανείς το συμμετρικό μετασχηματισμό *Laplace* ο οποίος είναι μια γενίκευση τόσο του μετασχηματισμού *Fourier*

όσο και του Laplace (δες [εργασία](#)). Ισχύει ότι  $\mathcal{L}(f) = \hat{\mathcal{F}}(e^{-xt} f(t))$  και  $\mathcal{SL}(f) = \mathcal{F}(l(xt)f(t))$  όπου  $l(t)$  κατάλληλη συνάρτηση επομένως σε οποιοδήποτε πρόβλημα μπορούμε να εφαρμόσουμε το μονόπλευρο ή το (δίπλευρο) μετασχηματισμό Fourier πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους με την κατάλληλη συνάρτηση.  $\square$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 126** Θα επιλύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned}y''' + y'' &= e^t + t + 1 \\y(0) &= 0 \\y'(0) &= 0 \\y''(0) &= 0\end{aligned}$$

Μετασχηματίζουμε κατά μέλη την παραπάνω εξίσωση και έχουμε

$$\begin{aligned}s^3 Y(s) - s^2 y(0) - s y'(0) - y''(0) + s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) \\= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\end{aligned}$$

Λύνοντας ως προς  $Y(s)$  έχουμε

$$Y(s) = \frac{2s^2 - 1}{s^4(s+1)(s-1)} = -\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s-1)}$$

Υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό του δεξιού μέλους έχουμε

$$y(t) = -t + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t$$

Στην συνέχεια επιβεβαιώνουμε ότι είναι πράγματι λύση του παραπάνω προβλήματος.  $\square$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 127** Στο προηγούμενο παράδειγμα οι αρχικές συνθήκες ήταν στο  $x_0 = 0$ . Αυτό είναι ιδιαίτερα βολικό για την εφαρμογή του μετασχηματισμού του οποίου η ολοκλήρωση είναι στο  $(0, +\infty)$ . Αν όμως οι αρχικές συνθήκες ήταν στο  $x_0 = \gamma \neq 0$  τότε η άμεση εφαρμογή του μετασχηματισμού δεν θα βοηθήσει. Σε αυτή τη περίπτωση θεωρούμε την συνάρτηση  $z(t) = y(t + \gamma)$ , γράφουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών για τη συνάρτηση  $z$ , εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό και υπολογίζουμε την άγνωστη συνάρτηση  $y(t)$  μέσω της  $z(t)$ .

Ας δούμε ένα παράδειγμα. Έστω το παρακάτω Π.Α.Τ.

$$\begin{aligned}y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) &= t, \\ y(1) &= 0 \\ y'(1) &= 0\end{aligned}$$

θεωρούμε τη συνάρτηση  $z(t) = y(t + 1)$  η οποία θα ικανοποιεί το παρακάτω Π.Α.Τ.

$$\begin{aligned}z''(t) + 2z'(t) + 3z(t) &= t + 1, \\ z(0) &= 0 \\ z'(0) &= 0\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Laplace διαπιστώνουμε ότι η λύση του παραπάνω Π.Α.Τ. είναι

$$z(t) = 1/9 e^{-t} \left( 3 e^t t + e^t - 2 \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t) - \cos(\sqrt{2}t) \right)$$

Επομένως η λύση του αρχικού Π.Α.Τ. είναι η

$$y(t) = 1/9 e^{-t+1} \left( 3 e^{t-1} t - 2 \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}(t-1)) - 2 e^{t-1} - \cos(\sqrt{2}(t-1)) \right)$$

□

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 128** Θα υπολογίσουμε την λύση του παρακάτω προβλήματος συνοριακών τιμών,

$$\begin{aligned}y'' + \lambda^2 y &= \cos \lambda t \\y(0) &= 1 \\y\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right) &= 1\end{aligned}$$

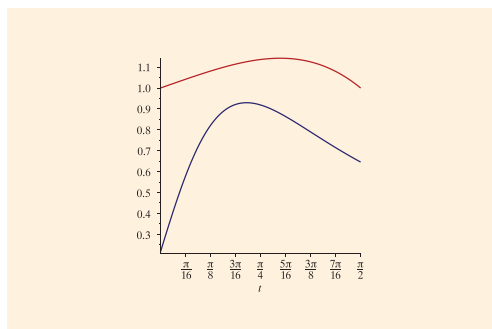
Μετασχηματίζοντας κατά μέλη την παραπάνω εξίσωση κατά Laplace λαμβάνουμε την ισότητα

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2 + \lambda^2)^2} + \frac{sy(0)}{s^2 + \lambda^2} + \frac{y'(0)}{s^2 + \lambda^2}$$

Υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό του δεξιού μέλους έχουμε ότι

$$y(t) = \frac{1}{2\lambda} t \sin \lambda t + \cos \lambda t + \frac{y'(0)}{\lambda} \sin \lambda t$$

Για να υπολογίσουμε το  $y'(0)$  θέτουμε στην τελευταία ισότητα  $t = 0$  και έτσι έχουμε ότι  $y'(0) = \lambda - \frac{\pi}{4\lambda}$ . Τέλος, επιβεβαιώνουμε ότι είναι λύση του προβλήματος.  $\square$



Σχήμα 8: Το γράφημα (με κόκκινη γραμμή) της συνάρτησης  $\frac{1}{2\lambda}t \sin \lambda t + \cos \lambda t + \frac{y'(0)}{\lambda} \sin \lambda t$  για  $\lambda = 1$  στο διάστημα  $(0, \frac{\pi}{2})$ . Διαπιστώνουμε ότι ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες. Με μπλε γραμμή απεικονίζεται ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης αυτής.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 129** Έστω το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} y' &= -z \\ z' &= y \\ y(0) &= 1 \\ z(0) &= 0 \end{aligned}$$

Μετασχηματίζουμε κατά Laplace τις διαφορικές εξισώσεις και έχουμε

$$\begin{aligned} sY(s) - 1 &= -Z(s) \\ sZ(s) &= Y(s) \end{aligned}$$



το οποίο είναι ένα αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων. Λύνοντας το σύστημα αυτό έχουμε ότι

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

άρα  $y(t) = \cos t$ . Επομένως,  $z(t) = -y'(t) = \sin t$  και εύκολα βλέπουμε ότι είναι λύση του συστήματος.  $\square$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 130** Παρόμοια, θα υπολογίσουμε την λύση του συστήματος

$$\begin{aligned}y' + z' + y + z &= 1, \\y' + z &= e^t, \\y(0) &= -1 \\z(0) &= 2\end{aligned}$$

Μετασχηματίζουμε κατά Laplace τις δυο διαφορικές εξισώσεις και λύνοντας το αλγεβρικό σύστημα που προκύπτει έχουμε ότι

$$Y(s) = \frac{-s^2 + s + 1}{s(s-1)^2}$$

Τελικά, η λύση του συστήματος είναι  $y(t) = 1 - 2e^t + te^t$  και  $z(t) = 2e^t - te^t$ .  $\square$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 131** Θα επιλύσουμε την συνήθη διαφορική εξίσωση

$$y'' + ty' - 2y = 4, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$$

χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Laplace. Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό κατά μέλη έχουμε

$$s^2 Y(s) + s - (sY'(s) + Y(s)) - 2Y(s) = \frac{4}{s}$$

και επομένως προκύπτει μια συνήθης διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως ως προς την  $Y(s)$  της οποίας η λύση είναι

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s} + \frac{C}{s^3} e^{s^2/2}$$

Σημειώστε ότι  $\mathcal{L}(ty') = -(sY'(s) + Y(s))$  (δείτε παράδειγμα 109).

Λόγω του θεωρήματος 91 ισχύει ότι  $Y(s) \rightarrow 0$  καθώς  $s \rightarrow \infty$  οπότε αναγκαστικά  $C = 0$ . Επομένως  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^3} - \frac{1}{s}\right) = t^2 - 1$  η οποία πράγματι είναι λύση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης.  $\square$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 132** Θα επιλύσουμε μια ολοκληρωτική εξίσωση εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace. Η εξίσωση είναι

$$f(t) = e^{-t} + \int_0^t \sin(t-x)f(x)dx$$

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό κατά μέλη και έχουμε ότι

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(e^{-t}) + \mathcal{L}(\sin t)\mathcal{L}(f)(s)$$

έχοντας εφαρμόσει το θεώρημα της συνέλιξης. Αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(s) &= \frac{\mathcal{L}(e^{-t})}{1 - \mathcal{L}(\sin t)} \\ &= \frac{s^2 + 1}{s^2(s + 1)} \\ &= \frac{2}{s + 1} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\end{aligned}$$

Επομένως η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης είναι η συνάρτηση  $f(t) = 2e^{-t} + t - 1$ .  $\square$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 133** Θα επιλύσουμε την εξίσωση

$$y(t) - y\left(t - \frac{\pi}{x}\right) = \sin xt, \quad y(0) = 0, \quad t \geq 0$$

χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Laplace. Έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\left(y\left(t - \frac{\pi}{x}\right)\right) = e^{-\frac{s\pi}{x}} \mathcal{L}(y)$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace στην αρχική εξίσωση προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}(y) = \frac{x}{(s^2 + x^2)(1 - e^{-\frac{s\pi}{x}})}$$

και τελικά

$$y(t) = \begin{cases} \sin xt, & \text{για } \frac{2n\pi}{x} < t < \frac{(2n+1)\pi}{x} \\ 0, & \text{για } \frac{(2n+1)\pi}{x} < t < \frac{(2n+2)\pi}{x} \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

□

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 134** Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης  $f(t) = a^{[t]}$  όπου  $[t]$

είναι το ακέραιο μέρος του πραγματικού αριθμού  $t$  και  $a > 0$ . Εφόσον,  $a^{[t]}$  είναι εκθετικής τάξης έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t)) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^1 a^0 e^{-st} dt + \int_1^2 a^1 e^{-st} dt + \dots \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s} + \frac{a(e^{-s} - e^{-2s})}{s} + \dots \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - ae^{-s})}, \quad \operatorname{Re} s > \max\{0, \ln a\}\end{aligned}$$

□

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 135** Θα επιλύσουμε την επόμενη εξίσωση διαφορών

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

Ορίζουμε μια συνάρτηση  $y(t)$  τέτοια ώστε

$$y(t) = a_n, \quad n \leq t \leq n+1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Επομένως, η εξίσωση διαφορών γίνεται

$$y(t+2) - 3y(t+1) + 2y(t) = 0, \quad t \geq 0$$

Λαμβάνοντας τον μετασχηματισμό Laplace της  $y(t+2)$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(y(t+2)) &= \int_0^{\infty} y(t+2)e^{-st} dt \\
 &= \int_2^{\infty} e^{-s(x-2)}y(x)dx \\
 &= e^{2s} \int_0^{\infty} y(x)e^{-sx} dx - e^{2s} \int_0^2 y(x)e^{-sx} dx \\
 &= e^{2s}Y(s) - \frac{e^s}{s}(1 - e^{-s})
 \end{aligned}$$

Παρόμοια, ισχύει ότι

$$\mathcal{L}(y(t+1)) = e^s Y(s)$$

Λαμβάνοντας τον μετασχηματισμό Laplace της εξίσωσης διαφορών κατά μέλη έχουμε ότι

$$\mathcal{L}(y(t)) = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - 2e^{-s})} - \frac{1}{s} = \mathcal{L}(2^{[t]}) - \mathcal{L}(1)$$

Επομένως,  $y(t) = 2^{[t]} - 1$  και αυτό σημαίνει ότι  $a_n = 2^n - 1$ . □

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 136** Θα υπολογίσουμε την λύση του παρακάτω παραβολικού προβλήματος

$$u_{xx}(x, t) = u_t(x, t), \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0+) = 1, \quad x > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 1$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace κατά μέλη ως προς την μεταβλητή  $t$ , προκύπτει η συνήθης διαφορική εξίσωση

$$U_{xx}(x, s) = sU(x, s) - u(x, 0+) = sU(x, s) - 1$$

Επίσης, εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Laplace στην συνθήκη  $u(0, t) = 0$  και έχουμε ότι  $U(0, s) = 0$ . Τέλος, το ίδιο κάνουμε και στην τελευταία συνθήκη, δηλαδή

$$\mathcal{L} \left( \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) \right) = \frac{1}{s} = \lim_{x \rightarrow \infty} U(x, s)$$

Η λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης με άγνωστη την  $U(x, s)$  είναι

$$U(x, s) = c_1(s)e^{x\sqrt{s}} + c_2(s)e^{-x\sqrt{s}} + \frac{1}{s}$$

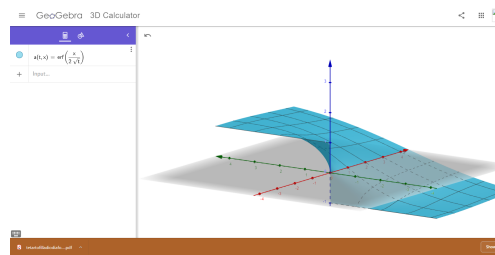
Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις  $U(0, s) = 0$  και  $\frac{1}{s} = \lim_{x \rightarrow \infty} U(x, s)$  καταλήγουμε στην

$$U(x, s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{x\sqrt{s}}}{s}$$

Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό (χρησιμοποιώντας πίνακες μετασχηματισμών) έχουμε ότι

$$u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-u^2} du = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$$

□



Σχήμα 9: Το γράφημα της λύσης χρησιμοποιώντας το Geogebra

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 137** Θα επιλύσουμε την επόμενη υπερ-



βολική μερική διαφορική εξίσωση

$$y_{tt}(x, t) = a^2 y_{xx}(x, t), \quad x > 0, \quad t > 0, \quad a > 0$$

$$y(x, 0+) = 0, \quad x > 0$$

$$y_t(x, 0+) = 0, \quad x > 0$$

$$y(0, t) = f(t), \quad t > 0, \quad f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x, t) = 0$$

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Laplace ως προς την μεταβλητή  $t$  και έχουμε

$$s^2 Y(x, s) - sy(x, 0+) - y_t(x, 0+) = a^2 Y_{xx}(x, s)$$

οπότε

$$Y_{xx}(x, s) - \frac{s^2}{a^2} Y(x, s) = 0$$

Η λύση αυτής της συνήθους διαφορικής εξίσωσης είναι

$$Y(x, s) = c_1(s)e^{\frac{sx}{a}} + c_2(s)e^{-\frac{sx}{a}}$$

Επειδή  $y(x, t) \rightarrow 0$  καθώς  $x \rightarrow \infty$  και  $Y(0, s) = F(s)$  έχουμε τελικά

$$Y(x, s) = F(s)e^{-\frac{sx}{a}}$$

Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό προκύπτει ότι

$$y(x, t) = \begin{cases} f(t - \frac{x}{a}), & \text{όταν } t \geq \frac{x}{a} \\ 0, & \text{όταν } t < \frac{x}{a} \end{cases}$$

□

## Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις δεύτερης τάξης - Εισαγωγικά

**ΟΡΙΣΜΟΣ 138** Μια διαφορική εξίσωση δύο μεταβλητών της μορφής

$$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y),$$

ονομάζεται ημί-γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης.

Αν η

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = F_1(x, y)u + F_2(x, y)u_x + F_3(x, y)u_y + F_4(x, y)$$

τότε η μερική διαφορική εξίσωση ονομάζεται γραμμική.

Θεωρούμε την διακρίνουσα,

$$\Delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y), \quad (x, y) \in G \subseteq \mathbb{R}^2.$$

- Όταν  $\Delta(x, y) > 0$  στο  $G$  τότε η Μ.Δ.Ε. ονομάζεται υπερβολικού τύπου, π.χ. η εξίσωση κύματος,  $z_{xx} - c^2 z_{yy} = f(x, y)$ .
- Αν  $\Delta(x, y) = 0$  στο  $G$  τότε η Μ.Δ.Ε. ονομάζεται παραβολικού τύπου, π.χ. η εξίσωση θερμότητας,  $z_x - a^2 z_{yy} = f(x, y)$ .

- Αν  $\Delta(x, y) < 0$  στο  $G$  ονομάζεται ελλειπτικού τύπου, π.χ. η εξίσωση του Laplace,  $z_{xx} + z_{yy} = f(x, y)$ .

Με κατάλληλους μετασχηματισμούς  $x = v_1(\xi, \eta)$  και  $y = v_2(\xi, \eta)$  κάθε μια από τις παραπάνω μορφές μπορεί να μετασχηματιστεί σε αρκετά πιο απλή μορφή η οποία ονομάζεται **κανονική μορφή** της εξίσωσης. Η άγνωστη συνάρτηση  $u(x, y)$  θα μετασχηματιστεί στην  $w(\xi, \eta)$  η οποία θα είναι λύση της κανονικής μορφής.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 139** Η κανονική μορφή μιας υπερβολικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$w_{\xi\eta} + L[w] = G(\xi, \eta)$$

όπου  $L[w]$  είναι γραμμικός τελεστής και περιέχει μέχρι πρώτης τάξης μερικές παραγώγους της συνάρτησης  $w$ .

Η κανονική μορφή μιας παραβολικής εξίσωσης είναι

$$w_{\xi\xi} + L[w] = G(\xi, \eta)$$

Η κανονική μορφή μιας ελλειπτικής εξίσωσης είναι

$$w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} + L[w] = G(\xi, \eta)$$

## Η εξίσωση θερμότητας σε άπειρο χωρίο

Θα ασχοληθούμε με την ίδια εξίσωση σε άπειρο χωρίο. Το πρόβλημα είναι το επόμενο

$$u_t = ku_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad k > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$u(x, t) \text{ φραγμένη και } u_x(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{καθώς } |x| \rightarrow \infty$$

### Μοναδικότητα Λύσης

Θα αποδείξουμε ότι το πρόβλημα έχει μοναδική λύση. Έστω ότι έχει δυο λύσεις, τις  $u_1(x, t)$  και  $u_2(x, t)$ , τότε η διαφορά τους  $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$  λόγω γραμμικότητας του προβλήματος, θα ικανοποιεί το παρακάτω πρόβλημα

$$u_t = ku_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad k > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$u(x, t) \text{ φραγμένη και } u_x(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{καθώς } |x| \rightarrow \infty$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με  $u(x, t)$  και ολοκληρώνουμε ως προς  $t$  στο  $(0, t)$ . Στο αριστερό μέλος θα έχουμε, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι  $u(x, 0) = 0$ ,

$$\int_0^t u_t(x, y)u(x, y)dy = u^2(x, t) - \int_0^t u(x, y)u_t(x, y)dy$$

Συνεπώς

$$\int_0^t u_t(x, y)u(x, y)dy = \frac{1}{2}u^2(x, t)$$

Στην συνέχεια ολοκληρώνουμε την εξίσωση ως προς  $x$  σε όλο το  $\mathbb{R}$ . Στο δεξί μέλος θα έχουμε

$$\begin{aligned} k \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t u_{xx}(y, r)u(y, r)drdy &= k \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(y, r)u(y, r)dydr \\ &= k \int_0^t \left( u_x(y, r)u(y, r) \Big|_{y=-\infty}^{y=\infty} \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(y, r)dy \right) dr \\ &= -k \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(y, r)dydr \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι  $u_x(x, t) \rightarrow 0$  καθώς  $|x| \rightarrow \infty$ . Τελικά, ισχύει ότι

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(y, t)dy + k \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(y, r)dydr = 0$$

το οποίο ικανοποιείται μονάχα όταν  $u(x, t) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $t > 0$ , δηλαδή  $u_1(x, t) = u_2(x, t)$  άρα το πρόβλημα έχει μοναδική λύση.

## Υπολογισμός της λύσης με τον μετασχηματισμό *Fourier*

Για να υπολογίσουμε την λύση, θα εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό *Fourier*. Δεν θα αναφερθούμε στις προϋποθέσεις που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση  $f$  για να είναι καλά ορισμένος ο μετασχηματισμός *Fourier*. Αρκεί η συνάρτηση που θα υπολογίσουμε να είναι πράγματι λύση του προβλήματος.

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό *Fourier* στην εξίσωση κατά μέλη ως προς την μεταβλητή  $x$ . Χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του μετασχηματισμού προκύπτει ότι

$$U_t(s, t) = -ks^2U(s, t)$$

Η εφαρμογή του μετασχηματισμού *Fourier* στην αρχική συνθήκη είναι ως εξής

$$U(s, 0) = F(s)$$

όπου  $U(s, t)$  και  $F(s)$  οι μετασχηματισμοί *Fourier* των συναρτήσεων  $u(x, t)$  και  $f(x)$ .

Το παραπάνω πρόβλημα είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης της οποίας η λύση είναι

$$U(s, t) = F(s)e^{-ks^2t}$$

Για να βρούμε την  $u(x, t)$  αντιστρέφουμε τον μετασχηματισμό και χρησιμοποιώντας το θεώρημα της συνέλιξης παίρνουμε

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{kt\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(r)e^{-\frac{(x-r)^2}{4kt}} dr \quad (21)$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 140** Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$g(x, t, r) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-r)^2}{4kt}}$$

τότε παρατηρούμε ότι  $g_t = kg_{xx}$ . Αν αποδείξουμε ότι οι παράγωγοι περνούν στο ολοκλήρωμα της συνάρτησης  $u(x, t)$  τότε προφανώς προκύπτει ότι η συνάρτηση αυτή είναι μια λύση της εξίσωσης θερμότητας. Θεωρώντας τη συνάρτηση

$$F(x, t, r) = f(r)g(x, t, r)$$

θα πρέπει να αποδείξουμε (εφαρμόζοντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης) ότι οι συναρτήσεις  $F_t, F_x, F_{xx}$



είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες έτσι ώστε να έχουμε το συμπέρασμα ότι οι παράγωγοι περνούν στο ολοκλήρωμα και άρα η  $u(x, t)$  αποτελεί λύση του προβλήματος.  $\square$

Σημειώστε ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα (και άρα και η λύση) είναι καλά ορισμένη ακόμη και σε περιπτώσεις όπου η συνάρτηση  $f$  δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμη (αν για παράδειγμα  $f(x) = e^x$ ) και ενδεχομένως να μην μετασχηματίζεται κατά Fourier. Αυτό αποτελεί μια «αδυναμία» της μεθόδου εύρεσης της λύσης (δηλαδή του μετασχηματισμού Fourier) και όχι του προβλήματος. Για να διαπιστώσουμε ότι πράγματι είναι λύση του προβλήματος αρκεί να δικαιολογήσουμε το γεγονός ότι η παράγωγος περνά μέσα στο ολοκλήρωμα. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής  $y = \frac{x-r}{2\sqrt{kt}}$  εύκολα αποδεικνύουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f(x)$$

Συνοψίζοντας, η απόδειξη του ότι η μοναδική λύση είναι η παραπάνω προκύπτει από την επαλήθευση της λύσης (και όχι από την εφαρμογή του μετασχηματι-

σμού Fourier!), κάτι το οποίο δεν είναι καθόλου προφανές αφού περιέχει την δικαιολόγηση του γεγονότος ότι οι παράγωγοι περνούν μέσα στο ολοκλήρωμα. Σημειώστε ότι αν  $f(x) = e^x$  τότε η συνάρτηση δεν μετασχηματίζεται κατά Fourier και επομένως δεν είναι μαθηματικά ορθό να εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό κατά μέλη. Σημειώστε επίσης ότι στην περίπτωση όπου  $f(x) = e^{x^3}$  τότε το παραπάνω ολοκλήρωμα δεν είναι καλά ορισμένο.

Για να δούμε τη σχέση μεταξύ διαφορικών εξισώσεων και θεωρίας πιθανοτήτων - στοχαστικής ανάλυσης - θεωρήσουμε μια τυχαία μεταβλητή  $X$  η οποία ακολουθεί τη κανονική κατανομή με μέση τιμή  $x$  και διακύμανση  $2kt$ . Τότε

$$\mathbb{E}f(X) = \frac{1}{2\sqrt{kt\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(r) e^{-\frac{(x-r)^2}{4kt}} dr$$

και επομένως η μέση τιμή  $\mathbb{E}f(X)$  είναι μια λύση της παραπάνω εξίσωσης θερμότητας. Με μια τέτοια συσχέτιση ανοίγει ο δρόμος επίλυσης διαφορικών εξισώσεων με μεθόδους στοχαστικής ανάλυσης και αντίστροφα.

Για παράδειγμα, είναι γνωστό ότι μπορούμε να προσεγγίσουμε τη λύση μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών όπως επίσης να προσεγγίσουμε τη μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής με τη μέθοδο Monte Carlo. Με τη παραπάνω συσχέτιση λοιπόν μπορεί κανείς να υπολογίσει τη λύση μιας μερικής διαφορικής με τη μέθοδο Monte Carlo ή τη μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 141** Θα υπολογίσουμε μια λύση του παρακάτω προβλήματος

$$\begin{aligned}u_t &= ku_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\u(x, 0) &= e^{ax}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Σκοπός μας είναι να εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό *Fourier*. Διαπιστώνουμε όμως ότι η συνάρτηση  $e^{ax}$  δεν μετασχηματίζεται κατά *Fourier* και επομένως δεν είναι μαθηματικά ορθό να εφαρμόσουμε αυτό το μετασχηματισμό. Θα το κάνουμε όμως προκειμένου να έχουμε τη μορφή της λύσης και στη συνέχεια θα επαληθεύσουμε ότι πράγματι πρόκειται για μια λύση του παραπάνω προβλήματος.

Όπως είδαμε μια λύση (πιθανό) να έχει την εξής μορφή

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{4kt}} e^{ay} dy \\&= \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-(x+2kta))^2}{4kt} + ax + a^2 kt} dy \\&= e^{ax + a^2 kt}\end{aligned}$$

Η μορφή της λύσης είναι απλή και μπορούμε πολύ εύκολα να επαληθεύσουμε ότι πράγματι αποτελεί μια λύση του παραπάνω προβλήματος. Πράγματι,

$$\begin{aligned}u_t &= e^{ax+a^2kt} a^2 k \\u_x &= e^{ax+a^2kt} a \\u_{xx} &= e^{ax+a^2kt} a^2\end{aligned}$$

Επομένως ισχύει ότι  $u_t = ku_{xx}$  καθώς και  $u(x, 0) = e^{ax}$  δηλαδή αποτελεί μια λύση του προβλήματος. Σημειώστε ότι δεν έχουμε αποδείξει για τη περίπτωση αυτή μοναδικότητα λύσης. Το συμπέρασμα είναι ότι μπορεί κάποιος να εφαρμόσει το μετασχηματισμό *Fourier* χωρίς καν να αυτό να είναι επιτρεπτό από τα δεδομένα του προβλήματος και να δημιουργήσει τη πιθανή μορφή της λύσης. Η μαθηματικά αυστηρή απόδειξη του ότι πράγματι πρόκειται για λύση θα γίνει μέσω της επαλήθευσης!

Αν μελετήσουμε το παρακάτω πρόβλημα

$$u_t = ku_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = e^{-a|x|}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

$$u(x, t) \quad \text{φραγμένη και } u_x(x, t) \rightarrow 0 \text{ καθώς } |x| \rightarrow \infty$$

θα δούμε ότι η μοναδική λύση του είναι η  $u(x, t) = e^{-a|x|+a^2kt}$ . □

## Η Εξίσωση των *Black – Scholes*

Η εξίσωση των Black-Scholes είναι η επόμενη

$$V_t(t, S) + rSV_s(t, S) + \frac{\sigma^2 S^2}{2} V_{ss}(t, S) - rV(t, S) = 0 \quad (22)$$
$$t \in [0, T], S > 0$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια παραβολική εξίσωση συνεπώς με κατάλληλους μετασχηματισμούς μπορούμε να την μετασχηματίσουμε στην κανονική της μορφή η οποία είναι η εξίσωση θερμότητας που έχουμε ήδη μελετήσει.

Μετασχηματισμός της εξίσωσης στην εξίσωση  
θερμότητας

Θα δώσουμε στην συνέχεια τους κατάλληλους μετασχηματισμούς ούτως ώστε η εξίσωση αυτή να μετασχηματισθεί στην εξίσωση θερμότητας. Θέτουμε

$$t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, \quad \tau \in [0, \frac{\sigma^2}{2}T]$$

$$S = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$V(t, S) = v(\tau, x), \quad x \in \mathbb{R}, \tau \in [0, \frac{\sigma^2}{2}T]$$

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους της  $V$  και έχουμε, σημειώνοντας ότι  $V(t, S) = v\left(\frac{\sigma^2}{2}(T - t), \ln S\right)$

$$V_t = -\frac{\sigma^2}{2}v_\tau$$

$$V_s = \frac{1}{S}v_x$$

$$V_{SS} = -\frac{1}{S^2}v_x + \frac{1}{S^2}v_{xx}$$

Τότε η αρχική διαφορική εξίσωση γίνεται, θέτοντας  $k = \frac{2r}{\sigma^2}$ ,

$$v_\tau = v_{xx} + (k - 1)v_x - kv$$

έχοντας χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι η  $V$  ικανοποιεί την 22.

Στην συνέχεια θέτουμε

$$v(\tau, x) = e^{ax+b\tau}u(\tau, x)$$

Αντικαθιστώντας την  $v$  στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει η παρακάτω

$$bu + u_\tau = a^2u + 2au_x + u_{xx} + (k - 1)(au + u_x) - ku$$



Προκειμένου να απλουστευθεί διαλέγουμε

$$a = -\frac{1}{2}(k-1), \quad b = -\frac{1}{4}(k+1)^2$$

Τελικά προκύπτει ότι η συνάρτηση  $V$  είναι λύση της [22](#) αν και μόνο αν η  $u(\tau, x)$  ικανοποιεί την εξίσωση θερμότητας

$$u_\tau = u_{xx}, \quad \tau \in [0, \frac{\sigma^2}{2}T], \quad x \in \mathbb{R}$$

Στην περίπτωση όπου έχουμε μια τελική συνθήκη στην [22](#), όπως για παράδειγμα

$$V(T, S) = F(S), \quad S > 0$$

όπου  $F(\cdot)$  δοσμένη συνάρτηση, τότε η αντίστοιχη μετασχηματισμένη εξίσωση θερμότητας παίρνει την μορφή

$$u_\tau = u_{xx}, \quad \tau \in [0, \frac{\sigma^2}{2}T], \quad x \in \mathbb{R}$$

$$u(0, x) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x} F(e^x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Συμβολίζοντας με  $f(x) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x} F(e^x)$  έχουμε ότι το πρόβλημα αυτό έχει ως λύση την (δείτε το αντίστοιχο

εδάφιο στο [;]),

$$u(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\tau\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-\frac{(x-z)^2}{4\tau}} dz, \quad \tau \in [0, \frac{\sigma^2}{2}T], \quad x \in \mathbb{R} \quad (23)$$

## Αξία Ευρωπαϊκού Συμβολαίου Αγοράς

Ας δούμε ποια είναι η αξία ενός Ευρωπαϊκού συμβολαίου αγοράς με βάση την συνάρτηση  $V(t, S)$  που έχουμε υπολογίσει. Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση  $F(x) = (x - K)^+$  όπου  $K$  είναι η τιμή εξάσκησης.

Θα υπολογίσουμε την συνάρτηση  $u(\tau, x)$  από την σχέση 23 κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής  $y = \frac{z-x}{\sqrt{2\tau}}$ . Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} u(\tau, x) &= \frac{1}{2\sqrt{\tau\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-\frac{(x-z)^2}{4\tau}} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln K - \ln S}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy - \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln K - \ln S}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι  $f(x) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x} \max\{e^x - K, 0\}$ .

Το πρώτο ολοκλήρωμα στην τελευταία σχέση γίνε-

ταυ

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln K - \ln S}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln K - \ln S}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}(y-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2} dy \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln K - \ln S}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho \\
&= e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1)
\end{aligned}$$

όπου

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

και

$$d_1 = \frac{\ln S - \ln K}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau} = \frac{\ln \frac{S}{K} + r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Παρόμοια έχουμε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln K - \ln S}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2)$$

όπου

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{1}{2}u^2} du \quad \text{και} \quad d_2 = \frac{\ln \frac{S}{K} + r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει την σχέση

$$N(d) = 1 - N(-d)$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} N(-d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= 1 - \int_{-\infty}^d e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (\text{θέσαμε } t = -u) \\ &= 1 - N(d) \end{aligned}$$

Οπότε

$$V(t, S) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Μπορούμε να συσχετίσουμε την  $V(t, S)$  με την συνάρτηση σφάλματος  $\text{erf}(x)$  και να πάρουμε το εξής

$$V(t, S) = S \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{erf} \left( \frac{d_1}{\sqrt{2}} \right) \right) - Ke^{-r(T-t)} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{erf} \left( \frac{d_2}{\sqrt{2}} \right) \right) \quad (24)$$

Η συσχέτιση αυτή προκύπτει εύκολα ως εξής

$$\begin{aligned} N(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-y^2} \sigma \sqrt{2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-y^2} dy + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-y^2} dy \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

## Η εξίσωση κύματος σε άπειρο χωρίο

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned}u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, & t > 0 \\u(x, 0) &= f(x), & x \in \mathbb{R} \\u_t(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Θα παρουσιάσουμε την μέθοδο του d'Alembert με την οποία θα βρούμε την γενική λύση της εξίσωσης  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ . Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών  $\xi = x - ct$  και  $\phi = x + ct$  επομένως  $x = \frac{\xi + \phi}{2}$ ,  $t = \frac{\phi - \xi}{2c}$ , οπότε  $u(x, t) = u\left(\frac{\xi + \phi}{2}, \frac{\phi - \xi}{2c}\right)$ .

Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας για συναρτήσεις δυο μεταβλητών θα υπολογίσουμε την  $u_{\xi\phi}$ . Εύκολα διαπιστώνουμε ότι, εφόσον  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ , ισχύει ότι  $u_{\xi\phi} = 0$ .

Ολοκληρώνοντας ως προς  $\xi$  παίρνουμε το αποτέλεσμα

$$u_{\phi} = \hat{f}(\phi)$$

για μια αυθαίρετη συνάρτηση  $\hat{f}$ . Ολοκληρώνοντας ως προς  $\phi$  έχουμε τελικά ότι

$$u(x, t) = a(\phi) + b(\xi) = a(x + ct) + b(x - ct)$$

όπου  $a$  και  $b$  αυθαίρετες συναρτήσεις. Αυτή την μορφή έχει η γενική λύση της κυματικής εξίσωσης, δηλαδή οποιαδήποτε λύση μπορεί να γραφεί με αυτό τον τρόπο.

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή  $u(x, 0) = f(x)$  και  $u_t(x, 0) = g(x)$  προκύπτει ότι η λύση είναι της μορφής

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct)) + G(x + ct) - G(x - ct)$$

όπου

$$G(x) = \frac{1}{2c} \int g(x) dx$$

Από την σχέση αυτή προκύπτει εύκολα και η μοναδικότητα. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν δυο λύσεις  $u_1, u_2$  τότε η διαφορά τους  $u = u_1 - u_2$  θα ικανοποιεί το ίδιο πρόβλημα με αρχικές συνθήκες τέτοιες ώστε  $f(x) = g(x) = 0$ . Επομένως, αναγκαστικά θα ισχύει ότι  $u = u_1 - u_2 = 0$  δηλαδή  $u_1 = u_2$ .



**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 142** Έστω το παρακάτω πρόβλημα

$$\begin{aligned}u_{tt} &= 4u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, & t > 0 \\u(x, 0) &= 1, & x \in \mathbb{R} \\u_t(x, 0) &= x, & x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω η λύση θα είναι

$$u(x, t) = 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{(x + 2t)^2}{2} - \frac{(x - 2t)^2}{2} \right) = 1 + xt$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για την μοναδική λύση του παραπάνω προβλήματος.  $\square$

## Η εξίσωση του Laplace σε άπειρο χωρίο

Θα μελετήσουμε την εξίσωση του Laplace σε άπειρο χωρίο. Έστω το πρόβλημα

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & x \in \mathbb{R}, & y > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & x \in \mathbb{R} \\ u(x, y) &\rightarrow 0 & u_x(x, y), u_y(x, y) \text{ φραγμένες} & \text{καθώς } |x|, |y| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

### Μοναδικότητα Λύσης

Για να αποδείξουμε ότι έχει μοναδική λύση θα υποθέσουμε ότι έχει δυο λύσεις, τις  $u_1(x, y)$  και  $u_2(x, y)$ . Τότε η διαφορά τους  $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$  θα ικανοποιεί το παρακάτω πρόβλημα

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & x \in \mathbb{R}, & y > 0 \\ u(x, 0) &= 0, & x \in \mathbb{R} \\ u(x, y) &\rightarrow 0 & u_x(x, y), u_y(x, y) \text{ φραγμένες} & \text{καθώς } |x|, |y| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με την συνάρτηση  $u(x, y)$  και ολοκληρώνουμε στο  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ . Αλλάζοντας κατάλληλα την σειρά ολοκλήρωσης προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y)) dy dx = 0$$

Η σχέση αυτή μαζί με την απαίτηση  $u(x, 0) = 0$  σημαίνει ότι  $u(x, y) = 0$  για  $x \in \mathbb{R}$  και  $y \in \mathbb{R}_+$ . Επομένως το πρόβλημα αυτό έχει μοναδική λύση.

## Υπολογισμός λύσης με τον μετασχηματισμό *Fourier*

Στην συνέχεια θα εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό Fourier στην εξίσωση ως προς την μεταβλητή  $x$ . Έχουμε τότε

$$\begin{aligned} U_{yy}(s, y) - s^2 U(s, y) &= 0, & s \in \mathbb{R}, y > 0 \\ U(s, 0) &= F(s), & s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η

$$U(s, y) = c_1(s)e^{sy} + c_2(s)e^{-sy}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad y > 0$$

Λόγω του θεωρήματος 62 θα πρέπει  $U(s, y) \rightarrow 0$  καθώς  $s \rightarrow \pm\infty$ . Αυτό σημαίνει ότι  $c_1(s) = 0$  όταν  $s > 0$  και  $c_2(s) = 0$  όταν  $s < 0$ . Λόγω της αρχικής συνθήκης, δηλαδή  $U(s, 0) = F(s)$  προκύπτει ότι

$$U(s, y) = \begin{cases} F(s)e^{-sy}, & \text{όταν } s > 0 \\ F(s)e^{sy}, & \text{όταν } s < 0 \end{cases}$$

Τελικά η λύση θα είναι

$$U(s, y) = F(s)e^{-|s|y}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad y > 0$$

Λόγω του ότι

$$\mathcal{F}\left(e^{-a|t|}\right) = \frac{2a}{a^2 + s^2}, \quad a > 0$$

και λόγω του θεωρήματος 63 προκύπτει ότι

$$\mathcal{F}\left(\frac{2a}{a^2 + s^2}\right) = 2\pi e^{-a|t|}$$

οπότε

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-a|s|}\right) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + s^2}$$

Αρα

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|s|y}\right) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + x^2}$$

Τέλος, εφαρμόζοντας το θεώρημα της συνέλιξης υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό του γινομένου  $F(s)e^{-|s|y}$  ο οποίος θα δίνεται ως εξής

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0$$

(ολοκλήρωμα Poisson)

## Αριθμητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών για την προσέγγιση της λύσης της εξίσωσης θερμότητας σε πεπερασμένο χωρίο.

Η εξίσωση θερμότητας σε πεπερασμένο χωρίο είναι επόμενη,

$$u_t = c^2 u_{xx}, \quad x \in [0, L], \quad t > 0$$

μαζί με τις συνοριακές συνθήκες

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(L, t) = 0, \quad t > 0$$

καθώς και την αρχική συνθήκη

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, L]$$

όπου  $f$  δοσμένη συνάρτηση με  $f(0) = f(L) = 0$  και  $c > 0$ .

Θα εργαστούμε και σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα  $[0, T]$ . Έστω  $N \in \mathbb{N}$  και έστω τα  $N + 2$

ισαπέχοντα σημεία  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = L$  και συμβολίζουμε με  $h = x_{i+1} - x_i$ . Επιπλέον, έστω  $M \in \mathbb{N}$  και έστω τα  $M + 1$  ισαπέχοντα σημεία  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$  και συμβολίζουμε με  $k = t_{j+1} - t_j$ . Σκοπός μας είναι να προσεγγίσουμε τις τιμές της λύσης πάνω στα σημεία  $(x_i, t_j)$ , δηλαδή να δώσουμε κάποιες τιμές  $U_{i,j} \simeq u(x_i, t_j)$  όπου  $u(\cdot, \cdot)$  είναι η ακριβής λύση του προβλήματος και  $U_{i,j}$  η προσεγγιστική τιμή της λύσης στο σημείο  $(x_i, t_j)$ .

Όπως και στην μέθοδο του Euler για την προσέγγιση της λύσης μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης, έτσι και εδώ θα αντικαταστήσουμε τις παραγώγους που εμφανίζονται στην εξίσωση με «πεπερασμένες διαφορές». Δηλαδή,

$$u_t(x_i, t_j) \simeq \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k}$$

$$u_{xx}(x_i, t_j) \simeq \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην διαφορική εξίσωση λαμβάνουμε ένα σύστημα εξισώσεων όπου όμως οι άγνωστες ποσότητες είναι προσεγγίσεις

της πραγματικής τιμής της λύσης. Όπως είπαμε και προηγούμενα θα συμβολίζονται με  $U_{i,j}$  και θα προσεγγίζουν την ακριβή τιμή της  $u(x_i, t_j)$ . Το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει είναι το εξής

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} &= \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}, \quad i = 1, \dots, N \quad j = 0, \dots, M-1 \\ U_{0,j} &= U_{N+1,j} = 0, \quad j = 0, \dots, M \\ U_{i,0} &= f(x_i), \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Για να γράψουμε καλύτερα το παραπάνω σύστημα εξισώσεων θα συμβολίσουμε με  $\lambda = \frac{k}{h^2}$  και επίσης με  $U^j \in \mathbb{R}^N$  το διάνυσμα με συνιστώσες  $U_{1,j}, \dots, U_{N,j}$ . Άρα το παραπάνω σύστημα γράφεται ισοδύναμα ως εξής

$$U^{j+1} = AU^j, \quad j = 0, \dots, M-1, \quad U^0 = F$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1-2\lambda \end{pmatrix}$$

και  $F = (f(x_1), \dots, f(x_N))^T$ .

Με τον τρόπο αυτό υπολογίζουμε σε κάθε βήμα ένα διάνυσμα, το  $U^{j+1}$ , απλά πολλαπλασιάζοντας τον πίνα-

κα  $A$  με ένα γνωστό διάνυσμα  $U^j$  λαμβάνοντας έτσι τις προσεγγίσεις  $U_{i,j}$ . Το παρακάτω θεώρημα αναφέρει ότι οι προσεγγιστικές τιμές  $U_{i,j}$  όπως τις υπολογίζουμε παραπάνω συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές της συνάρτησης καθώς τα  $k, h$  τείνουν στο μηδέν.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 143** Έστω ότι η λύση  $u$  του αρχικού προβλήματος είναι αρκετά ομαλή και  $U_{i,j}$  οι τιμές όπως τις υπολογίζουμε παραπάνω. Τότε, αν  $\lambda = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ , υπάρχει μια σταθερά  $C$  ανεξάρτητη των  $k, h$  τ.ω.

$$\max_{1 \leq j \leq M} \max_{0 \leq i \leq N+1} |U_{i,j} - u(x_i, t_j)| \leq C(k + h^2)$$



## Τριγωνομετρικές Σειρές

**ΟΡΙΣΜΟΣ 144** Μια συνάρτηση  $f(x)$  ορισμένη στο  $[a, b]$  θα λέμε ότι είναι **τμηματικά συνεχής** όταν υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους σημεία ασυνέχειας, όπου όμως τα πλευρικά όρια να είναι πεπερασμένα.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 145** Μια συνεχής συνάρτηση  $f(x)$  στο  $\mathbb{R}$  θα λέμε ότι είναι **περιοδική** όταν υπάρχει  $T > 0$ , έτσι ώστε

$$f(x + T) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Ο αριθμός  $T$  ονομάζεται **περίοδος** της  $f(x)$ . Μια συνάρτηση  $f(x)$  θα λέμε ότι είναι **άρτια** (αντίστοιχα **περιττή**) όταν

$$f(-x) = f(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (\text{άρτια})$$

$$f(-x) = -f(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (\text{περιττή})$$

Γενικά, μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $[0, l]$  μπορεί

να επεκταθεί ως άρτια στο  $[-l, l]$  ως εξής,

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{για } x \in [0, l] \\ f(-x), & \text{για } x \in [-l, 0] \end{cases}$$

Επίσης, μπορεί να επεκταθεί ως περιττή στο  $[-l, l]$  (χωρίς να είναι συνεχής κατ' ανάγκη) ως εξής,

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{για } x \in [0, l] \\ -f(-x), & \text{για } x \in [-l, 0] \end{cases}$$

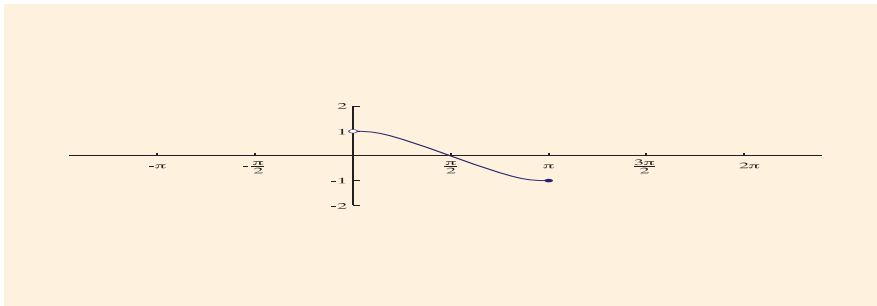
Στην συνέχεια μπορούμε να την επεκτείνουμε σε όλο το  $\mathbb{R}$  ως περιοδική με περίοδο  $2l$  θέτοντας

$$G(x + 2kl) = F(x) \quad \text{για } x \in [-l, l] \quad \text{και για κάθε } k \in \mathbb{Z}$$

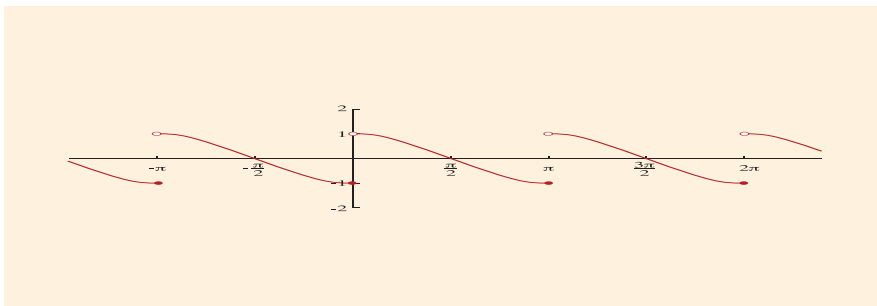
Μια  $f(x)$  ορισμένη στο  $[0, l]$  μπορεί να επεκταθεί κατά άπειρους τρόπους σε μια περιοδική  $G(x)$  με περίοδο  $2l$  ορίζοντας αρχικά την,

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{για } x \in [0, l] \\ \phi(x), & \text{για } x \in [-l, 0] \end{cases}$$

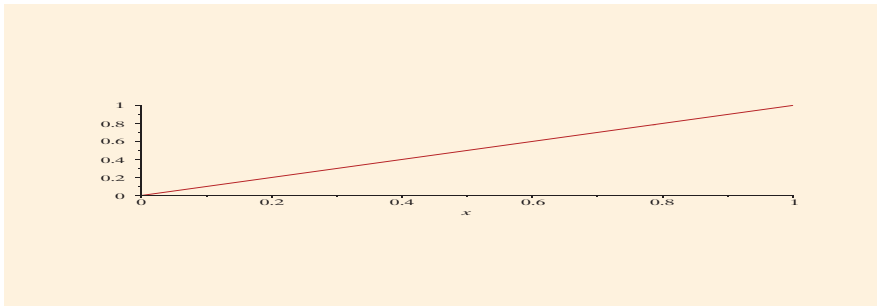
και έπειτα  $G(x + 2kl) = F(x)$  για κάθε  $x \in [-l, l]$  και για κάθε  $k \in \mathbb{Z}$ , όπου  $\phi(x)$  αυθαίρετη συνάρτηση στο  $[-l, 0]$ .



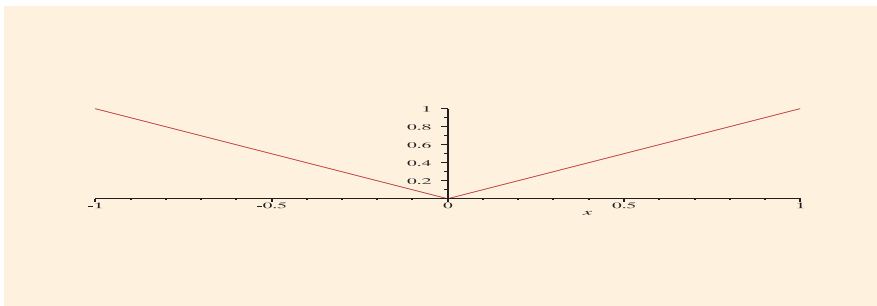
Σχήμα 10: Συνάρτηση ορισμένη στο  $(0, \pi]$



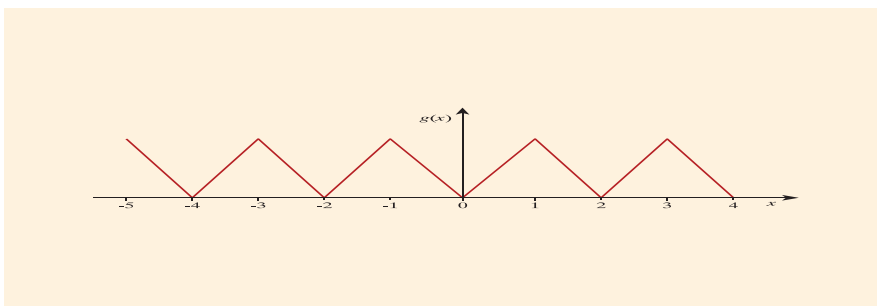
Σχήμα 11: Περιττή και περιοδική επέκταση της συνάρτησης



Σχήμα 12: Συνάρτηση ορισμένη στο  $[0, 1]$



Σχήμα 13: Αρτια επέκταση της συνάρτησης στο  $[-1, 1]$



Σχήμα 14: Άρτια και περιοδική επέκταση της συνάρτησης

**ΟΡΙΣΜΟΣ 146** Κάθε σειρά της μορφής

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

με  $a_0, a_n, b_n, x \in \mathbb{R}$  ονομάζεται **τριγωνομετρική σειρά**.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 147** Αν η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|)$  συγκλίνει, τότε η τριγωνομετρική σειρά συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση  $f(x)$  στο  $\mathbb{R}$ , η οποία είναι συνεχής και περιοδική με περίοδο  $2\pi$ .

## Μορφή των συντελεστών

Έστω ότι η τριγωνομετρική σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε  $x \in [-\pi, \pi]$  στην  $f(x)$ , δηλαδή

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (\text{ομοιόμορφα})$$

για κάθε  $x \in [-\pi, \pi]$ .

Θα προσδιορίσουμε τους συντελεστές  $a_0, a_n, b_n$  της τριγωνομετρικής σειράς. Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη με  $\cos mx$  και έπειτα ολοκληρώνουμε κατά μέλη στο  $[-\pi, \pi]$ . Αν η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα τότε μπο-

ρούμε να ολοκληρώσουμε όρο προς όρο , οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx dx \right. \\ &\left. + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx dx \right) \Rightarrow \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \pi a_m \Rightarrow \\ a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx. \end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε τα  $b_n$  πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη με  $\sin kx$  και ολοκληρώνουμε ενώ για να υπολογίσουμε το  $a_0$  ολοκληρώνουμε ως έχει.

Τελικά, οι συντελεστές θα είναι

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 148** Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι αν

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

όπου οι συντελεστές  $a_n, b_n$  δεν είναι οι *Fourier* συντελεστές τότε η σύγκλιση δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφη. Επιπλέον θα ισχύει ότι  $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) = \infty$  διότι αλλιώς η σύγκλιση θα ήταν ομοιόμορφη (δες 147) και επομένως οι συντελεστές  $a_n, b_n$  θα ήταν αναγκαστικά οι συντελεστές *Fourier* της  $f$ .  $\square$



**ΟΡΙΣΜΟΣ 149** Έστω  $f(x)$  ολοκληρώσιμη στο  $[-\pi, \pi]$ . Ονομάζουμε σειρά *Fourier* της  $f(x)$  την τριγωνομετρική σειρά

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

με συντελεστές όπως προηγούμενα. Γράφουμε

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

**ΠΡΟΤΑΣΗ 150** Αν η  $f$  είναι άρτια (αντίστοιχα περιττή) η σειρά *Fourier* έχει την μορφή,

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad \left( \text{αντίστοιχα } f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \right)$$

**ΑΣΚΗΣΗ 151** Να υπολογισθεί η σειρά *Fourier* της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{για } x \in (-\pi, \pi) \\ 0, & \text{όταν } x = \pm\pi \end{cases}$$

**ΛΥΣΗ.** Θα εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι η  $f(x)$  είναι περιττή συνάρτηση το οποίο σημαίνει ότι  $a_k = 0$  ενώ

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (-x) \sin kx dx = (-1)^k \frac{2}{k}$$

Οπότε

$$f(x) \sim 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin kx$$

□

**ΑΣΚΗΣΗ 152** Να υπολογισθεί η σειρά *Fourier* της  $f(x) = |x|$  για  $x \in [-\pi, \pi]$ .

**ΛΥΣΗ.** Σε αυτή την περίπτωση η  $f(x)$  είναι άρτια επομένως  $b_k = 0$  ενώ

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx = -4 \frac{1}{(2k-1)^2}$$

Δηλαδή

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$$

□

**ΘΕΩΡΗΜΑ 153** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ , συνεχής και κατά τμήματα λεία σε κάθε φραγμένο και κλειστό διάστημα τότε οι συντελεστές *Fourier* της  $f$  συγκλίνουν στο μηδέν με τον παρακάτω τρόπο

$$|a_n| \leq \frac{c}{n} \quad \text{και} \quad |b_n| \leq \frac{c}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Επιπλέον, η σύγκλιση της σειράς *Fourier* είναι ομοιόμορφη.

Σημειώστε ότι δεν θα μπορούσαμε να έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση στην περίπτωση που η  $f$  δεν είναι συνεχής. Αυτό θα ήταν άτοπο με το γεγονός ότι τα μερικά αθροίσματα της σειράς *Fourier* είναι συνεχείς συναρτήσεις και την υπόθεση ότι συγκλίνουν ομοιόμορφα διότι τότε και το όριο θα πρέπει να είναι

συνεχής συνάρτηση. Επιπλέον, μπορεί να αποδειχθεί ότι ούτε η συνέχεια είναι ικανή συνθήκη διότι μπορεί να κατασκευαστεί συνεχής συνάρτηση για την οποία η σειρά Fourier δεν συγκλίνει (δες [;], θεώρημα 480).

**ΠΟΡΙΣΜΑ 154 (Parseval ΓΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ)**

Έστω ότι οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι περιοδικές με περίοδο  $2\pi$  και κατά τμήματα συνεχείς με πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών. Τότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx,$$

$$\frac{a_0 a'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k a'_k + b_k b'_k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

όπου  $(a_k, b_k)$  και  $(a'_k, b'_k)$  οι συντελεστές Fourier των  $f$  και  $g$  αντίστοιχα.

Παραδείγματα

- Εξετάζοντας την σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

ως προς την σύγκλιση διαπιστώνουμε ότι συγκλίνει. Σε ποιον αριθμό όμως συγκλίνει; Αναπτύσσουμε την  $|x|$  σε σειρά Fourier και έχουμε ότι  $b_k = 0$  ενώ  $a_k = -\frac{4}{\pi(2k-1)^2}$  επομένως η σειρά Fourier συγκλίνει ομοιόμορφα στην  $|x|$ . Δηλαδή,

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

- Ας εξετάσουμε την συνάρτηση προσήμου

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{όταν } -\pi < x < 0 \\ 0, & \text{όταν } x = 0 \\ 1, & \text{όταν } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι περιττή και αναπτύσσοντας την σε σειρά Fourier έχουμε ότι

$$\operatorname{sgn} x \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος 153 και επομένως η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στην  $\operatorname{sgn}$  στο διάστημα  $(-\pi, \pi)$ . Διαλέγοντας  $x = \frac{\pi}{2}$  έχουμε ότι

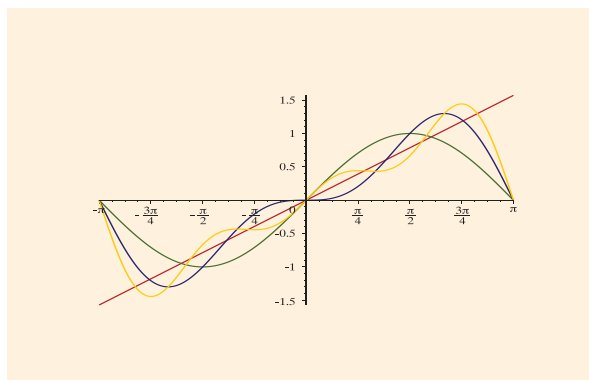
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

Με το κριτήριο του Leibniz γνωρίζαμε ότι η σειρά αυτή συγκλίνει αλλά δεν γνωρίζαμε το όριο της.

• Θα δούμε τώρα την επίσης περιττή συνάρτηση  $f(x) = x$  στο  $(-\pi, \pi)$ . Αναπτύσσοντάς τη σε σειρά Fourier έχουμε ότι

$$\frac{x}{2} \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k}$$

Η δοσμένη συνάρτηση ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος 153 επομένως η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στην  $f(x)$ .



Σχήμα 15: Το γράφημα της συνάρτησης  $\frac{x}{2}$  καθώς και των τριών πρώτων προσεγγίσεων με κόκκινο, μπλε, πράσινο και κίτρινο αντίστοιχα χρώμα.

- Θα αναπτύξουμε σε σειρά Fourier την  $f(x) = x^2$  στο διάστημα  $(-\pi, \pi)$  η οποία είναι άρτια και επομένως  $b_n = 0$ . Όμως

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = (-1)^n \frac{4}{n^2},$$

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$$

Εφόσον, η  $f$  ικανοποιεί τις αντίστοιχες προϋποθέσεις, η σειρά Fourier συγκλίνει ομοιόμορφα στην  $f$  και έχου-

με

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left( \frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} \cdots \right)$$

Μπορούμε να παραγωγίσουμε όρο προς όρο και διαιρώντας με το 2 παίρνουμε την σειρά Fourier της  $f(x) = x$ . Για  $x = 0$  έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

ενώ για  $x = \pi$  λαμβάνουμε το όριο

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Αν όμως επεκτείνουμε την συνάρτηση  $g(x) = x$  σε άρτια περιοδική συνάρτηση και υπολογίσουμε την σειρά Fourier θα δούμε ότι δεν συμπίπτει με την σειρά των παραγώγων της  $f(x) = x^2$ .

• Θα αναπτύξουμε σε σειρά Fourier την  $f(x) = x \cos x$  στο διάστημα  $(-\pi, \pi)$  η οποία είναι περιττή και επο-



μένως  $a_n = 0$  ενώ

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos x \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x (\sin(n+1)x + \sin(n-1)x) dx \\ &= (-1)^n \left( \frac{2n}{n^2-1} \right) \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

και  $b_1 = -1/2$ . Άρα

$$x \cos x = -1/2 \sin x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2-1} \sin nx$$

• Θα εξετάσουμε τώρα την  $f(x) = |\sin x|$  στο διάστημα  $(-\pi, \pi)$  η οποία είναι άρτια και άρα  $b_n = 0$ . Υπολογίζοντας τους συντελεστές  $a_n$  προκύπτει ότι

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$$

Για  $x = 0$  λαμβάνουμε το όριο

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}$$

• Θα μελετήσουμε την  $f(x) = \cos mx$  στο διάστημα  $(-\pi, \pi)$  όπου  $m$  δεν είναι ακέραιος. Η συνάρτηση αυτή είναι άρτια και άρα  $b_n = 0$ . Η σειρά Fourier είναι ως εξής

$$\cos mx = \frac{2m \sin m\pi}{\pi} \left( \frac{1}{2m^2} - \frac{\cos x}{m^2 - 1^2} + \frac{\cos 2x}{m^2 - 2^2} + \dots \right)$$

Θέτοντας  $x = \pi$  και διαιρώντας με  $\sin m\pi$  και ύστερα γράφοντας το  $m$  ως  $x$  προκύπτει ότι

$$\cot \pi x := \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{2x}{\pi} \left( \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2 - 1^2} + \frac{1}{x^2 - 2^2} + \dots \right)$$

Μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω σειρά στην μορφή

$$\cot \pi x - \frac{1}{\pi x} = -\frac{2x}{\pi} \left( \frac{1}{1^2 - x^2} + \frac{1}{2^2 - x^2} + \dots \right)$$

Όταν  $x \in [0, q]$  με  $q < 1$  τότε η σειρά στο δεξί μέλος συγκλίνει ομοιόμορφα, άρα μπορούμε να ολοκληρώσουμε όρο προς όρο και να πάρουμε

$$\pi \int_0^x \left( \cot \pi t - \frac{1}{\pi t} \right) dt = \ln \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 - \frac{x^2}{k^2} \right)$$

από το οποίο προκύπτει ότι

$$\sin \pi x = \pi x \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) \cdots$$

Για  $x = 1/2$  λαμβάνουμε το γινόμενο Wallis

$$\frac{1}{2}\pi = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1}$$

• Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$  ορισμένη στο  $(0, \pi)$ . Αφού την επεκτείνουμε ως περιττή στο διάστημα  $(-\pi, \pi)$ , δηλαδή

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x), & \text{για } x \in (0, \pi) \\ -\frac{1}{2}(\pi + x), & \text{για } x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

τότε  $a_n = 0$  ενώ

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx dx = \frac{1}{n}$$

Δηλαδή,

$$g(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots, \quad \text{για } x \in (-\pi, \pi)$$

Η συνάρτηση αυτή είναι ασυνεχής στο  $x = 0$  και η σειρά Fourier στο σημείο αυτό συγκλίνει στο  $\frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = 0$ .

• Θα αναπτύξουμε την  $f(x) = \sin x$  ορισμένη στο  $(0, \pi)$  σε συνημιτονική σειρά. Προφανώς, θα πρέπει να την επεκτείνουμε κατάλληλα έτσι ώστε να γίνει άρτια συνάρτηση στο  $(-\pi, \pi)$ . Επομένως, ορίζουμε την

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{όταν } x \in [0, \pi] \\ -f(x), & \text{όταν } x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

Συνεχίζουμε με την γνωστή διαδικασία υπολογίζοντας τους συντελεστές.

• Σε προηγούμενα παραδείγματα είχαμε αναπτύξει σε σειρά Fourier τις συναρτήσεις  $\frac{x}{2}$  και  $x \cos x$  και το αποτέλεσμα ήταν

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k}, \\ x \cos x &= -\frac{\sin x}{2} + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2 - 1} \sin kx \end{aligned}$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 154 στην συνάρτηση  $\frac{x}{2}$  για παράδειγμα με αποτέλεσμα την παρακάτω ισότητα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{4} dx = \frac{\pi^2}{6}$$

Παρομοίως, εφαρμόζοντας το ίδιο θεώρημα στην δεύτερη συνάρτηση έχουμε

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos^2(x) dx = \frac{1}{4} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k^2}{(k^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2}$$

Επίσης, μπορούμε να εφαρμόσουμε το 154 στο γινόμενο των δυο συναρτήσεων με αποτέλεσμα την επόμενη ισότητα

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2 \cos x}{2} dx = -\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^2 - 1} = -2$$

και επομένως

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{3}{4}$$

## Η εξίσωση θερμότητας σε πεπερασμένο χωρίο

Θεωρούμε την παρακάτω μερική διαφορική εξίσωση

$$u_t = k^2 u_{xx}, \quad x \in [0, L], \quad t > 0$$

μαζί με τις συνοριακές συνθήκες

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(L, t) = 0, \quad t > 0$$

καθώς και την αρχική συνθήκη

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, L]$$

όπου  $f$  δοσμένη συνάρτηση με  $f(0) = f(L) = 0$  και  $k > 0$ .

### Μοναδικότητα Λύσης

Θα αποδείξουμε ότι το πρόβλημα αυτό έχει μοναδική λύση. Πράγματι, έστω δυο λύσεις του προβλήματος,  $u_1(x, t)$  και  $u_2(x, t)$ . Τότε η διαφορά τους

$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$  θα ικανοποιεί το παρακάτω πρόβλημα

$$\begin{aligned} u_t &= k^2 u_{xx}, & x \in [0, L], & t > 0 \\ u(0, t) &= 0, & & t > 0 \\ u(L, t) &= 0, & & t > 0 \\ u(x, 0) &= 0, & x \in [0, L] & \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με την συνάρτηση  $u(x, t)$  και ολοκληρώνουμε κατά μέλη στο  $[0, L] \times [0, t]$ , δηλαδή έχουμε αλλάζοντας στο δεξί μέλος την σειρά ολοκλήρωσης

$$\int_0^L \int_0^t u_t(x, r) u(x, r) dr dx = k^2 \int_0^t \int_0^L u_{xx}(x, r) u(x, r) dx dr$$

Ισχύει όμως το εξής

$$\int_0^t u_t(x, r) u(x, r) dr = u^2(x, r) \Big|_{r=0}^{r=t} - \int_0^t u_t(x, r) u(x, r) dr$$

Συνεπώς

$$\int_0^t u_t(x, r) u(x, r) dr = \frac{1}{2} u^2(x, t)$$

Από την άλλη μεριά έχουμε

$$\int_0^L u_{xx}(x, r)u(x, r)dx = u_x(x, r)u(x, r)\Big|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L u_x^2(x, r)dx$$

Αντικαθιστώντας προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2} \int_0^L u^2(x, t)dx + k^2 \int_0^t \int_0^L u_x^2(x, r)dxdr = 0$$

από το οποίο λαμβάνουμε το συμπέρασμα ότι  $u(x, t) = 0$  για  $x \in [0, L]$  και για οποιοδήποτε  $t > 0$  (δες πρόταση ;). Άρα  $u_1(x, t) = u_2(x, t)$  για κάθε  $x \in [0, L]$  και  $t > 0$ .

### Μέθοδος Χωρισμού των Μεταβλητών

Για να υπολογίσουμε την μορφή της λύσης θα εφαρμόσουμε την μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών ή αλλιώς την μέθοδο Fourier. Θα υποθέσουμε δηλαδή ότι η λύση  $u(t, x)$  γράφεται στην μορφή

$$u(t, x) = G(t)\phi(x)$$

Υπολογίζοντας τις παραγώγους που εμφανίζονται στην



εξίσωση έχουμε

$$\begin{aligned}u_t &= G'(t)\phi(x) \\u_{xx} &= G(t)\phi''(x)\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση προκύπτει ότι

$$G'(t)\phi(x) = kG(t)\phi''(x)$$

ενώ διαχωρίζοντας τις συναρτήσεις με διαφορετικές μεταβλητές προκύπτει ότι

$$\frac{G'(t)}{kG(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}$$

Αυτή η ισότητα μπορεί να αληθεύει μονάχα όταν και τα δυο κλάσματα είναι σταθεροί αριθμοί, ανεξάρτητοι δηλαδή της μεταβλητής  $x$  ή  $t$ . Συμβολίζουμε με  $-\lambda$  την σταθερά αυτή και την ονομάζουμε **σταθερά χωρισμού μεταβλητών**. Δηλαδή, ισχύει ότι

$$\frac{G'(t)}{kG(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = -\lambda$$

Παρόμοιο χωρισμό μεταβλητών κάνουμε και στις συνοριακές συνθήκες, δηλαδή

$$u(0, t) = G(t)\phi(0) = 0$$

από το οποίο προκύπτει ότι  $\phi(0) = 0$  αλλιώς θα πρέπει να υποθέσουμε ότι  $G(t) = 0$  το οποίο μας οδηγεί στην συνάρτηση  $u(x, t) = 0$  που όμως δεν ικανοποιεί κατά ανάγκη την αρχική συνθήκη. Παρόμοια,

$$u(L, t) = G(t)\phi(L) = 0$$

από την οποία προκύπτει ότι  $\phi(L) = 0$ .

Συνεπώς, έχουμε τις εξής συνήθειες διαφορικές εξισώσεις

$$G'(t) = -\lambda k G(t)$$

και

$$\begin{aligned}\phi''(x) &= -\lambda\phi(x) \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(L) &= 0\end{aligned}$$

Θα συνεχίσουμε μελετώντας την τελευταία συνήθη διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού. Ξεχωρίζουμε τρεις περιπτώσεις για την σταθερά  $\lambda$ .

- $\lambda < 0$ .

Σε αυτή την περίπτωση συμβολίζουμε για ευκολία  $\lambda = -s$  με  $s > 0$ . Επομένως, έχουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\phi''(x) = s\phi(x)$$

$$\phi(0) = 0$$

$$\phi(L) = 0$$

του οποίου η λύση δίνεται από

$$\phi(x) = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x}$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες προκύπτει ότι  $c_1 = c_2 = 0$  και επομένως  $u(x, t) = 0$  η οποία δεν είναι εν γένει αποδεκτή λύση.

- $\lambda = 0$ .

Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση γίνεται

$$\phi''(x) = 0$$

η οποία έχει ως λύση την  $\phi(x) = d_1 x + d_2$ . Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες προκύπτει πάλι η μηδενική συνάρτηση  $u(x, t)$  ως λύση η οποία δεν είναι εν γένει αποδεκτή.

- $\lambda > 0$ .

Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση έχει ως λύση την

$$\phi(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Εφαρμόζοντας την συνοριακή συνθήκη  $\phi(0) = 0$  προκύπτει ότι  $c_1 = 0$  ενώ εφαρμόζοντας την δεύτερη συνθήκη  $\phi(L) = 0$  προκύπτει ότι

$$c_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$$

Προφανώς θα υποθέσουμε ότι  $\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$  αλλιώς θα καταλήξουμε πάλι στην μηδενική συνάρτηση  $u(x, t) = 0$ . Η ισότητα  $\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$  ικανοποιείται για άπειρα  $\lambda$ , τα εξής

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Τα συγκεκριμένα  $\lambda_n$  ονομάζονται *ιδιοτιμές* και οι συναρτήσεις

$$\phi_n(x) = c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

οι οποίες είναι λύσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών για οποιαδήποτε σταθερά  $c_n$ , ονομάζονται **ιδιοσυναρτήσεις**.

Έχοντας υπολογίσει μια μη μηδενική λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών, στην πραγματικότητα άπειρες λύσεις, θα προχωρήσουμε στην επίλυση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης με άγνωστη συνάρτηση την  $G(t)$ . Προφανώς, θα επιλύσουμε την διαφορική αυτή εξίσωση επιλέγοντας ως  $\lambda$  τα  $\lambda_n$ . Δηλαδή, η διαφορική εξίσωση που αφορά την συνάρτηση  $G$  γίνεται

$$G'_n(t) = - \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 k G_n(t)$$

της οποίας η λύση είναι

$$G_n(t) = c_n e^{-k\lambda_n t}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Συνεπώς, η λύση της εξίσωσης θερμότητας έχει την μορφή

$$u_n(x, t) = c_n e^{-k\lambda_n t} \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

όπου  $c_n$  αυθαίρετες σταθερές. Λόγω της γραμμικότητας της εξίσωσης και των συνοριακών συνθηκών προ-

κύπτει εύκολα ότι η συνάρτηση

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-k\lambda_n t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

είναι λύση του προβλήματος αρκεί να ικανοποιούνται οι κατάλληλες προϋποθέσεις ούτως ώστε να περνά η παράγωγος μέσα στο άθροισμα. Η συνάρτηση αυτή πρέπει να ικανοποιεί και την αρχική συνθήκη, δηλαδή

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad x \in [0, L]$$

Επεκτείνουμε την συνάρτηση  $f$  σε περιττή στο διάστημα  $[-L, L]$  ως εξής

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{όταν } x \in [0, L] \\ -f(-x), & \text{όταν } x \in [-L, 0) \end{cases}$$

και έπειτα περιοδικά σε όλο το  $\mathbb{R}$ . Στην συνέχεια θεωρούμε την συνάρτηση  $g(x) = \hat{f}\left(\frac{L}{\pi}x\right)$  (δες ;;) η οποία είναι περιττή και περιοδική με περίοδο  $2\pi$ . Αναπτύσ-

σουμε την  $g(x)$  σε σειρά Fourier και έχουμε

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx dx$$

Κάνοντας την κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η  $\hat{f}$  είναι περιττή έχουμε τελικά ότι

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Αφού πρέπει να ισχύει ότι

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad x \in [0, L]$$

επιλέγουμε τις αυθαίρετες σταθερές  $c_n$  να είναι ως εξής

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

Τελικά η μοναδική λύση θα έχει την μορφή

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-k\lambda_n t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad x \in [0, L], \quad t > 0 \\
 c_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\
 \lambda_n &= \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

Στην συνέχεια πρέπει να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση που υπολογίσαμε είναι όντως λύση του προβλήματος.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 155** Θα μελετήσουμε το πρόβλημα

$$\begin{aligned}
 u_t(0, t) &= 1.14u_{xx}, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0 \\
 u(0, t) &= 0, \quad t > 0 \\
 u_x(1, t) &= 0, \quad t > 0 \\
 u(x, 0) &= -x^2 + 2x, \quad x \in [0, 1]
 \end{aligned}$$

Όπως πριν μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι το πρόβλημα αυτό έχει μοναδική λύση. Στην συνέχεια θα την υπολογίσουμε. Εφαρμόζουμε την μέθοδο του χωρισμο-



ύ των μεταβλητών και άρα υποθέτουμε ότι  $u(x, t) = G(t)\phi(x)$ . Προκύπτει έτσι το πρόβλημα

$$G'(t) = -1.14\lambda G(t)$$

και το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\phi''(x) = -\lambda\phi(x)$$

$$\phi(0) = 0$$

$$\phi'(1) = 0$$

για  $\lambda > 0$ . Το τελευταίο πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις, τις συναρτήσεις

$$\phi_n(x) = c_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

για  $\lambda = \lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2$  και  $c_n$  αυθαίρετες σταθερές. Τελικά, η λύση του αρχικού προβλήματος θα έχει την μορφή

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-1.14\lambda_n t} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

Προκειμένου να ικανοποιηθεί και η αρχική συνθήκη, αναπτύσσουμε την συνάρτηση  $-x^2+2x$  σε σειρά *Fourier* (αφού πρώτα την επεκτείνουμε ως περιττή στο διάστημα  $[-1, 1]$  και έπειτα περιοδικά σε όλο το  $\mathbb{R}$ ) και επιλέγουμε τις αυθαίρετες σταθερές  $c_n$  να έχουν την μορφή

$$c_n = \frac{2}{1} \int_0^1 (-x^2 + 2x) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2} dx = \frac{32}{(2n-1)^3 \pi^3}$$

και επομένως η τελική μορφή της λύσης θα είναι

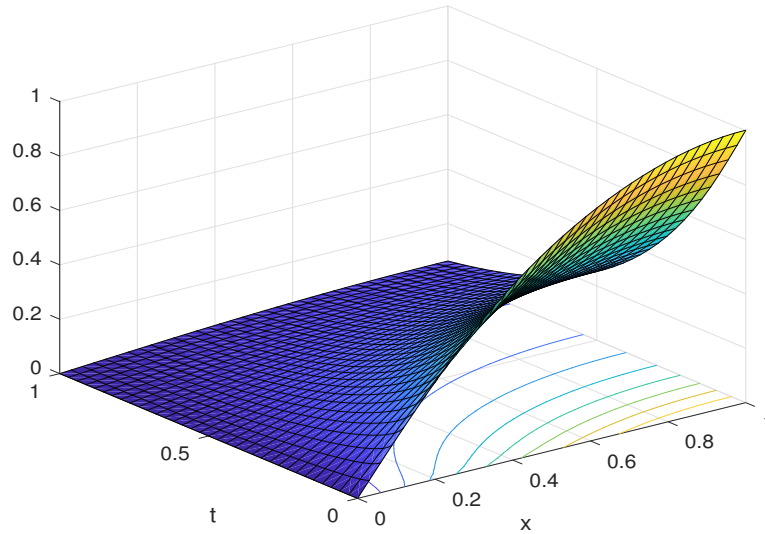
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32}{(2n-1)^3 \pi^3} e^{-1.14\lambda_n t} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0$$

$$\lambda_n = \left( \frac{(2n-1)\pi}{2} \right)^2$$

Επειδή

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{32}{(2n-1)^3 \pi^3} < \infty$$

έπεται ότι η σύγκλιση της σειράς *Fourier* της συνάρτησης  $-x^2+2x$  είναι ομοιόμορφη (δες 147).



Σχήμα 16: Το γράφημα της λύσης του παραδείγματος 155

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση  $u$  είναι πράγματι λύση του προβλήματος. Πράγματι,

$$|u_n(x, t)| \leq C \frac{1}{(2n - 1)^3}$$

συνεπώς λόγω της πρότασης ;; προκύπτει ότι η σειρά της  $u_n$  συγκλίνει ομοιόμορφα (για κάθε μεταβλητή χωριστά) στην συνάρτηση  $u(x, t)$ . Επομένως, η συνάρτηση  $u(x, t)$  είναι συνεχής συνάρτηση ως προς την

μεταβλητή  $x$  (με σταθερό το  $t$ ) και ως προς την μεταβλητή  $t$  (με σταθερό το  $x$ ).

Στην συνέχεια ορίζουμε το σύνολο  $D_\varepsilon = \{(x, t) : 0 < x < 1, t > \varepsilon\}$ . Διαπιστώνουμε ότι

$$|(u_n(x, t))_t| \leq C e^{-1.14\varepsilon(2n-1)^2}$$

Η σειρά της  $e^{-1.14\varepsilon(2n-1)^2}$  συγκλίνει (συγκρίνετέ τη με την σειρά της  $\frac{1}{n^2}$ ) επομένως σύμφωνα με το ;; προκύπτει ότι η σειρά της  $(u_n(x, t))_t$  (ως συνάρτηση του  $t$ ) συγκλίνει ομοιόμορφα στην  $u_t(x, t)$ . Με παρόμοιους συλλογισμούς προκύπτει ότι η σειρά της  $(u_n(x, t))_{xx}$  (ως συνάρτηση του  $x$ ) συγκλίνει ομοιόμορφα στην  $u_{xx}(x, t)$ . Επειδή η  $u_n(x, t)$  είναι λύση της εξίσωσης για κάθε  $n$  τότε προκύπτει ότι και η  $u(x, t)$  είναι επίσης λύση της εξίσωσης αφού πλέον οι παράγωγοι εναλλάσσονται με το άπειρο άθροισμα. Το  $\varepsilon > 0$  είναι ένας οποιοδήποτε θετικός αριθμός, άρα η  $u(x, t)$  είναι λύση της εξίσωσης στο  $D = \{(x, t) : x \in (0, 1), t > 0\}$ .

Συνεπώς διαπιστώνουμε ότι η  $u$  ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση, την αρχική συνθήκη καθώς και τις

συνοριακές συνθήκες επομένως αποτελεί την μοναδική λύση του προβλήματος.  $\square$

## Η εξίσωση κύματος σε πεπερασμένο χωρίο

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε την εξίσωση κύματος, η οποία είναι η επόμενη

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in [0, L], \quad t > 0$$

μαζί με τις συνοριακές συνθήκες

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(L, t) = 0, \quad t > 0$$

αλλά και τις αρχικές συνθήκες

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, L]$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, L]$$

Μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών

Εν συνεχεία θα εφαρμόσουμε την μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών στο αρχικό πρόβλημα. Υποθέτουμε

ότι η λύση γράφεται στην μορφή  $u(x, t) = G(t)\phi(x)$  και υπολογίζουμε τις παραγώγους

$$\begin{aligned}u_{tt} &= G''(t)\phi(x) \\u_{xx} &= G(t)\phi''(x)\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην κυματική εξίσωση παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα

$$G''(t)\phi(x) = c^2G(t)\phi''(x)$$

συνεπώς διαχωρίζοντας τις συναρτήσεις με διαφορετικές μεταβλητές έχουμε ότι

$$\frac{G''(t)}{c^2G(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = -\lambda$$

Κάνοντας το ίδιο στην συνοριακή συνθήκη  $u(0, t) = G(t)\phi(0) = 0$  προκύπτει το αποτέλεσμα ότι  $\phi(0) = 0$  αλλιώς παίρνουμε την μηδενική συνάρτηση ως λύση η οποία εν γένει δεν είναι αποδεκτή. Με την συνθήκη  $u(L, t) = 0$  έχουμε ότι  $\phi(L) = 0$ . Επομένως έχουμε

το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned}\phi''(x) &= -\lambda\phi(x) \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(L) &= 0\end{aligned}$$

στο οποίο εργαζόμαστε ακριβώς όπως στην εξίσωση θερμότητας λαμβάνοντας έτσι τις ίδιες ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις. Αντικαθιστώντας το  $\lambda$  με τις  $\lambda_n$  στην εξίσωση

$$G''(t) = -\lambda_n c^2 G(t)$$

παίρνουμε την λύση

$$G_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Τελικά, η λύση του προβλήματος θα έχει την μορφή

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{n\pi ct}{L} \right) + b_n \sin \left( \frac{n\pi ct}{L} \right) \right) \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$$

Για να ικανοποιηθούν οι αρχικές συνθήκες, εργαζόμαστε όπως στην εξίσωση θερμότητας, αναπτύσσοντας δηλαδή τις συναρτήσεις  $f$  και  $g$  κατά Fourier αφού πρώτα τις επεκτείνουμε ως περιττές και στην συνέχεια τις επεκτείνουμε περιοδικά σε όλο το  $\mathbb{R}$ . Κάνοντας τους υπολογισμούς προκύπτει ότι οι συντελεστές  $a_n$  και  $b_n$  πρέπει να είναι ως εξής

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

Δίνουμε στην συνέχεια ένα συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα.



**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 156** Έστω το πρόβλημα

$$\begin{aligned}u_{tt} &= 4u_{xx}, & x \in [0, 1], & t > 0 \\u_x(0, t) &= 0, & & t > 0 \\u(1, t) &= 0, & & t > 0 \\u(x, 0) &= x^3 + 2x^2 - 3, & x \in [0, 1] \\u_t(x, 0) &= x^2 - 1, & x \in [0, 1]\end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε την μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών, οπότε υποθέτουμε ότι  $u(x, t) = G(t)\phi(x)$ . Έτσι προκύπτει το πρόβλημα

$$\begin{aligned}\phi''(x) &= -\lambda\phi(x) \\ \phi'(0) &= 0 \\ \phi(1) &= 0\end{aligned}$$

Οι λύσεις του παραπάνω προβλήματος είναι οι συναρτήσεις

$$\phi_n(x) = c_n \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{για } \lambda = \lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2.$$

Από την εξίσωση

$$G_n''(t) = -4\lambda_n G_n(t)$$

έχουμε ότι

$$G_n(t) = a_n \cos((2n-1)\pi t) + b_n \sin((2n-1)\pi t)$$

Τελικά, η γενική λύση του προβλήματος είναι

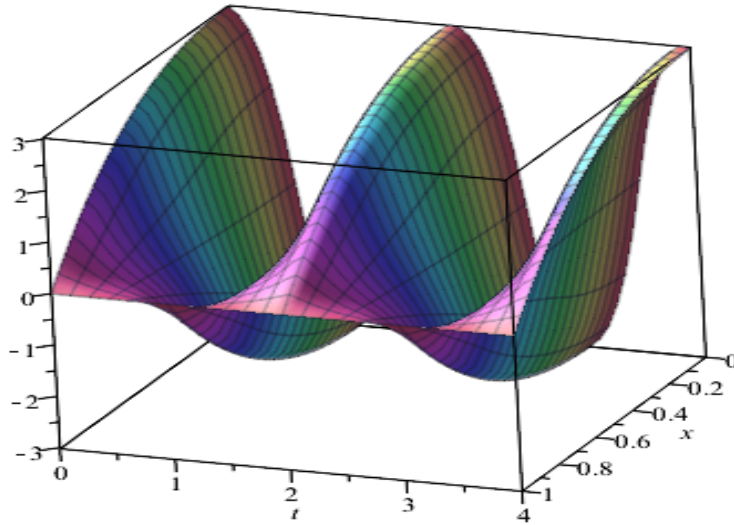
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos((2n-1)\pi t) + b_n \sin((2n-1)\pi t) \right] \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

Αναπτύσσοντας τις συναρτήσεις  $x^3 + 2x^2 - 3$  και  $x^2 - 1$  κατά Fourier υπολογίζουμε τους συντελεστές  $a_n$  και  $b_n$  οι οποίοι είναι

$$a_n = \frac{-2(96 + 80\pi(-1)^{n+1}(1 - 2n))}{(2n-1)^4\pi^4}$$
$$b_n = \frac{-32(-1)^{n+1}}{(2n-1)^4\pi^4}$$

Ακριβώς όπως στην περίπτωση του παραβολικού προβλήματος αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση  $u$  είναι πραγματι λύση του προβλήματος.

□



Σχήμα 17: Το γράφημα της λύσης του παραδείγματος 156

## Η εξίσωση του *Laplace* σε ορθογώνιο

Θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα

$$\begin{aligned}
 u_{xx} + u_{yy} &= 0, & x \in [0, d], & y \in [0, b] \\
 u(0, y) &= 0, & & y \in [0, b] \\
 u(d, y) &= f(y), & & y \in [0, b] \\
 u(x, 0) &= 0, & x \in [0, d] \\
 u(x, b) &= 0, & x \in [0, d]
 \end{aligned}$$

## Μοναδικότητα Λύσης

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι το πρόβλημα αυτό έχει μοναδική λύση. Έστω ότι έχει δυο λύσεις, τις  $u_1(x, y)$  και  $u_2(x, y)$ . Λόγω γραμμικότητας η διαφορά τους  $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$  θα ικανοποιεί το παρακάτω πρόβλημα

$$\begin{aligned}u_{xx} + u_{yy} &= 0, & x \in [0, d], & y \in [0, b] \\u(0, y) &= 0, & & y \in [0, b] \\u(d, y) &= 0, & & y \in [0, b] \\u(x, 0) &= 0, & x \in [0, d] \\u(x, b) &= 0, & x \in [0, d]\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη την εξίσωση με την συνάρτηση  $u(x, y)$  και ολοκληρώνουμε κατά μέλη στο  $[0, b] \times [0, d]$ . Αφού κάνουμε αλλαγή ολοκλήρωσης προκύπτει η εξής ισότητα,

$$\int_0^b \int_0^d u_{xx}(x, y)u(x, y)dx dy + \int_0^d \int_0^b u_{yy}(x, y)u(x, y)dy dx = (25)$$

Όμως

$$\int_0^d u_{xx}(x, y)u(x, y)dx = u_x(x, y)u(x, y)\Big|_0^d - \int_0^d u_x^2(x, y)dx$$
$$\int_0^b u_{yy}(x, y)u(x, y)dy = u_y(x, y)u(x, y)\Big|_0^b - \int_0^b u_y^2(x, y)dy$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση 25 και αλλάζοντας την σειρά ολοκλήρωσης προκύπτει ότι

$$\int_0^b \int_0^d (u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y))dx dy = 0$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να ικανοποιηθεί μονάχα όταν  $u_x(x, y) = u_y(x, y) = 0$  για  $x \in [0, d]$  και  $y \in [0, b]$ . Αυτό όμως μπορεί να συμβεί όταν  $u(x, y) = k \in \mathbb{R}$  για  $x \in [0, d]$  και  $y \in [0, b]$ . Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες τελικά έχουμε ότι  $u(x, y) = 0$  για  $x \in [0, d]$  και  $y \in [0, b]$  και επομένως η λύση είναι μοναδική.

### Μέθοδος Χωρισμού των Μεταβλητών

Θα υπολογίσουμε την λύση εφαρμόζοντας την μέθο-

δο χωρισμού των μεταβλητών. Θεωρούμε ότι

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

και αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση προκύπτει η γνωστή σχέση

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = k \in \mathbb{R}$$

Οι συνοριακές συνθήκες μας δίνουν  $X(0) = Y(0) = Y(b) = 0$ . Για την εξίσωση  $Y'' = -kY$  έχουμε μη μηδενική λύση όταν  $k = p^2$  η οποία είναι

$$Y(y) = A \cos py + B \sin py$$

Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες  $Y(0) = Y(b) = 0$  έχουμε ότι  $A = 0$  και  $\sin pb = 0$ . Από αυτό προκύπτει ότι

$$k = k_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Δηλαδή

$$Y_n(y) = B_n \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Αντικαθιστώντας το  $k$  με το  $k_n$  στην εξίσωση  $X'' = kX$  παίρνουμε την λύση

$$X_n(x) = C_n e^{\frac{n\pi x}{b}} + D_n e^{-\frac{n\pi x}{b}}$$

Όμως  $X(0) = 0$  από το οποίο παίρνουμε την σχέση  $D_n + C_n = 0$  και άρα

$$X_n = 2C_n \sinh \frac{n\pi x}{b}$$

Η λύση λοιπόν θα δίνεται ως εξής

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Επειδή  $u(d, y) = f(y)$ , αναπτύσσουμε την  $f$  κατά Fourier και επομένως

$$E_n \sinh \frac{n\pi d}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$

από όπου υπολογίζουμε τις σταθερές  $E_n$ . Αντικαθιστώντας, προκύπτει η λύση

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{b \sinh \frac{n\pi d}{b}} \left( \int_0^b f(r) \sin \frac{n\pi r}{b} dr \right) \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Στην συνέχεια θα πρέπει να αποδείξουμε ότι πράγματι η συνάρτηση  $u$  αποτελεί λύση του προβλήματος (όπως στο παραβολικό πρόβλημα).



## Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις πρώτης τάξης

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης της μορφής

$$a(x, y)z_x(x, y) + b(x, y)z_y(x, y) + c(x, y)z(x, y) = f(x, y) \quad (26)$$

όπου  $a(\cdot, \cdot)$ ,  $b(\cdot, \cdot)$ ,  $c(\cdot, \cdot)$ ,  $f(\cdot, \cdot)$  δοσμένες συναρτήσεις και  $z(x, y)$  η άγνωστη συνάρτηση. Στην συνέχεια θα περιγράψουμε πως μπορεί να επιλυθεί μια τέτοια εξίσωση. Η βασική ιδέα είναι να γίνει κατάλληλη αλλαγή των μεταβλητών έτσι ώστε να καταλήξουμε σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.

Ας δούμε καταρχάς ένα απλούστερο πρόβλημα όπου η συνάρτηση  $b(x, y)$  είναι ταυτοτικά ίση με το μηδέν. Τότε το παραπάνω πρόβλημα γίνεται

$$a(x, y)z_x(x, y) + a(x, y)z(x, y) = f(x, y)$$

Η εξίσωση αυτή είναι στην πραγματικότητα μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης ως προς την μεταβλητή  $x$  (θεωρούμε την μεταβλητή  $y$  ως μια παράμε-

τρο). Η λύση της είναι γνωστή και είναι η επόμενη

$$\frac{h(y) + \int \frac{f(s,y)}{a(s,y)} e^{\int \frac{c(r,y)}{a(r,y)} dr} ds}{e^{\int \frac{c(r,y)}{a(r,y)} dr}}$$

όπου  $h(y)$  είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση της μεταβλητής  $y$ .

Ξαναγυρνώντας στην εξίσωση 26 θα υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι  $a(x, y) \neq 0$  σε ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}^2$ . Στην συνέχεια επιλύουμε την παρακάτω συνήθη διαφορική εξίσωση

$$y' = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}$$

γράφοντας την λύση στην μορφή

$$\omega(x, y) = d$$

Θεωρούμε τώρα τον μετασχηματισμό

$$r = x \quad p = \omega(x, y)$$

καθώς και τις κατάλληλες συναρτήσεις  $u_1(r, p)$  και  $u_2(r, p)$  έτσι ώστε  $x = u_1(r, p)$  και  $y = u_2(r, p)$ . Ε-

φαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας (δες Θεώρημα ;;) προκύπτει ότι  $\omega_x + \omega_y y' = 0$  άρα  $y' = -\frac{\omega_x}{\omega_y}$  και επομένως  $a(x, y)\omega_x + b(x, y)\omega_y = 0$ . Ισχύει ότι  $z(x, y) = z(u_1(r, p), u_2(r, p)) =: Z(r, p)$  οπότε παραγωγίζοντας την  $Z(r, p)$  ως προς  $x$  και ως προς  $y$  θα έχουμε

$$Z_x(r, p) = Z_r \frac{dr}{dx} + Z_p \frac{dp}{dx} = Z_r + Z_p \omega_x$$

$$Z_y(r, p) = Z_r \frac{dr}{dy} + Z_p \frac{dp}{dy} = Z_p \omega_y$$

δεδομένου ότι  $p = \omega(x, y)$ . Θέτοντας

$$A(r, p) = a(u_1(r, p), u_2(r, p))$$

$$B(r, p) = b(u_1(r, p), u_2(r, p))$$

$$C(r, p) = c(u_1(r, p), u_2(r, p))$$

$$F(r, p) = f(u_1(r, p), u_2(r, p))$$

καταλήγουμε στην εξίσωση

$$A(r, p)Z_r(r, p) + C(r, p)Z_p(r, p) = F(r, p)$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση

πρώτης τάξης. Υπολογίζουμε την λύση της και στην συνέχεια αντιστρέφουμε τον μετασχηματισμό.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 157** Θα επιλύσουμε την επόμενη μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$kz_x + lz_y + mz = 0$$

όπου  $k, l, m \in \mathbb{R}$  και  $k \neq 0$ . Στην περίπτωση αυτή θα επιλύσουμε την συνήθη διαφορική εξίσωση

$$y' = \frac{l}{k}$$

Η λύση της είναι η  $y(x) = \frac{l}{k}x + c$  και την γράφουμε στην μορφή  $lx - ky = d$ . Οπότε θέτουμε  $\omega(x, y) = lx - ky$  και κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών  $r = x$  και  $p = lx - ky$ . Η αρχική εξίσωση μετασχηματίζεται στην

$$kz_r + mz = 0$$

της οποίας η λύση είναι  $z(r, p) = e^{-\frac{m}{k}r}h(p)$  όπου  $h(\cdot)$  μια αυθαίρετη συνάρτηση του  $p$ . Αντιστρέφοντας τον

μετασχηματισμό προκύπτει ότι η λύση του αρχικού προβλήματος είναι η

$$z(x, y) = e^{-\frac{m}{k}x} h(lx - ky)$$

□