Σημειώσεις Μαρκοβιανών Αλυσίδων

Οι σημειώσεις αυτές είναι μέρος του βιβλίου

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Οικονομολόγους και Μηχανικούς

Χρησιμοποιούμε το ελεύθερο μαθηματικό λογισμικό Geogebra για υπολογισμούς καθώς επίσης και το Matlab.

Μπορείτε να στείλετε παρατηρήσεις στην ηλεκτρονική διεύθυνση Νίκος Χαλιδιάς.

```
for i=1:3, disp('cool'); end;
```

```
>> syms x y
>> A=[1 0 0; 0.4 0.6 0; 0 0.4 0.6]

A =

    1.0000         0         0
    0.4000    0.6000         0
         0    0.4000    0.6000

>> roots(minpoly(A))

ans =

    1.0000
    0.6000
    0.6000
```

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Διακριτού Χρόνου

Ας φανταστούμε δυο ανθρώπους, τον Α και τον Β, οι οποίοι παίζουν ένα τυχερό παιχνίδι. Στρίβουν ένα νόμισμα διαδοχικά και ο παίκτης Α κερδίζει ένα Ευρώ κάθε φορά που έρχεται κορώνα ενώ χάνει ένα Ευρώ όταν έρχεται γράμματα. Ο παίκτης Α ξεκινά με 30 Ευρώ και αποφασίζει να τελειώσει το παιχνίδι είτε όταν τα χάσει όλα είτε όταν γίνουν 100 Ευρώ ενώ αντίθετα ο παίκτης Β θα σταματήσει το παιχνίδι όποτε το σταματήσει ο Α. Ποια είναι η πιθανότητα για τον παίκτη Α να τελειώσει το παιχνίδι έχοντας 100 Ευρώ;

Το πρόβλημα αυτό (αλλά και άλλα πιο περίπλοκα προβλήματα) ανάγεται στην μελέτη των λεγόμενων Μαρκοβιανών αλυσίδων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 *Μια ακολουθία* $X_0, X_1, X_2, \cdots$ *τ.μ. με τιμές στο* $\mathbb{R}$ *ονομάζεται* **στοχαστική διαδικασία**. *Για δεδομένο* $\omega \in \Omega$, *η ακολουθία* $X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots$, *ονομάζεται τροχιά της στοχαστικής διαδικασίας.*

Ας υποθέσουμε ότι ένας περιπατητής (πραγματοποιώντας ένα πείραμα) μετακινείται από την μια γωνία στην άλλη ενός οικοδομικού τετραγώνου στρίβοντας ένα νόμισμα. Αν έρθει κορώνα μετακινείται μια γωνία δεξιόστροφα αλλιώς μια γωνία αριστερόστροφα. Ονομάζουμε τις γωνίες του οικοδομικού τετραγώνου v_1, v_2, v_3, v_4 δεξιόστροφα και ας υποθέσουμε ότι ξεκινάει από την γωνία v_1. Έστω η στοχαστική διαδικασία $X_0, \cdots, X_n, \cdots$ η οποία στο k-βήμα δίνει τον αριθμό της γωνίας στην οποία βρίσκεται ο περιπατητής και επομένως $X_k \in \{1, 2, 3, 4\}$ με $X_0 = 1$.
Αφού το νόμισμα είναι δίκαιο τότε η $P(X_1 = 2) = P(X_1 = 4) = 1/2$ δεδομένου ότι $P(X_0 = 1) = 1$. Μπορούμε να πούμε και το εξής,

$$P(X_{n+1} = 1 | X_n = 2) = P(X_{n+1} = 3 | X_n = 2) = 1/2.$$

Αυτό όμως είναι το ίδιο με το παρακάτω,

$$P(X_{n+1}=1|X_0=1,X_1=i_1,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=2)=1/2,$$
$$P(X_{n+1}=3|X_0=1,X_1=i_1,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=2)=1/2$$

διότι δεν έχει καμία σημασία στο πως βρέθηκε στην γωνία v_2 αλλά σημασία έχει το αποτέλεσμα του στριψίματος του νομίσματος δεδομένου ότι έχει βρεθεί στην γωνία v_2.

Το ότι η δεσμευμένη πιθανότητα δεν εξαρτάται από όλη την ιστορία του περιπατητή αλλά μόνο από το τελευταίο βήμα ονομάζεται Μαρκοβιανή ιδιότητα. Επίσης, παρατηρούμε ότι η πιθανότητα δεν εξαρτάται από το βήμα (ή αλλιώς την χρονική στιγμή) στο οποίο βρισκόμαστε (δηλαδή το n). Αυτή η ιδιότητα είναι γνωστή ως **χρονική ομοιογένεια**.

Βασικοί ορισμοί και δυο σημαντικά θεωρήματα

Ορισμος 2 *Έστω ένας πίνακας P με στοιχεία τα*

$$p(i,j) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

(ο οποίος ονομάζεται πίνακας μετάβασης της X_n). Θα λέμε ότι η X_n είναι μια **διακριτού χρόνου Μαρκοβιανή αλυσίδα** *με πίνακα μετάβασης $p(i,j)$ αν για κάθε*

$$j, i, i_{n-1}, \cdots, i_0 \in \{s_0, s_2, \cdots ,\}$$

με $\{s_0, s_1, \cdots ,\}$ το πεδίο τιμών, έχουμε

$$P\left(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0\right) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p(i,j).$$

Από τον ορισμό καταλαβαίνουμε πως σε μια διακριτή Μαρκοβιανή αλυσίδα δεν έχει σημασία η τιμή της X_k για $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ για να προβλέψουμε την τιμή X_{n+1} αλλά μόνο η τιμή της X_n. Ας δώσουμε παρακάτω ένα ακόμη παράδειγμα (**τυχαίος περίπατος με δυο απορροφητικά εμπόδια**). Έστω ένα παιχνίδι τύχης (π.χ. ρουλέτα) και έστω ότι ο παίκτης κερ-

δίζει 1 ευρώ με πιθανότητα $p = 0.4$ και χάνει 1 ευρώ με πιθανότητα $p = 0.6$. Ας υποθέσουμε ότι ο παίκτης θα σταματήσει το παιχνίδι αν κερδίσει συνολικά N-ευρώ ή όταν τα χάσει όλα ξεκινώντας με M-ευρώ. Έστω η στοχαστική διαδικασία X_n η οποία δίνει το ποσό του παίκτη έπειτα από n παιχνίδια. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία αυτή είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα.
Εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$P(X_{n+1} = i + 1 | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = M) = 0.4$$

και επομένως ο παίκτης θα αυξήσει το κέρδος του κατά ένα ευρώ με πιθανότητα 0.4 ανεξάρτητα από το τι έχει γίνει μέχρι τότε.
Αν $N = 5$ τότε ο πίνακας μετάβασης είναι ο επόμενος πίνακας,

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1.0	0	0	0	0	0
1	0.6	0	0.4	0	0	0
2	0	0.6	0	0.4	0	0
3	0	0	0.6	0	0.4	0
4	0	0	0	0.6	0	0.4
5	0	0	0	0	0	1.0

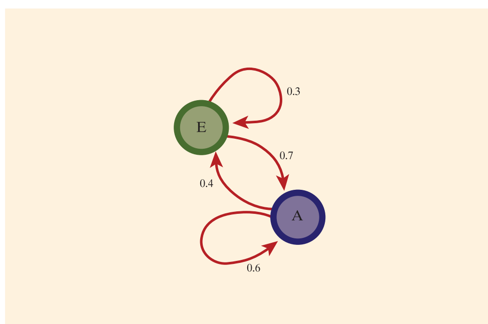
ΟΡΙΣΜΟΣ 3 *Έστω P ένας τετραγωνικός πίνακας $n \times n$ (όπου n ενδεχομένως να είναι άπειρο). Θα ονομάζεται* **στοχαστικός** *αν $P(i,j) \geq 0$ για κάθε $i,j = 1,2,\cdots,n$ και αν $\sum_{j=1}^{n} P(i,j) = 1$ για κάθε $i = 1,2,\cdots,n$*

ΑΣΚΗΣΗ 4 *Αποδείξτε ότι αν P είναι ένας στοχαστικός πίνακας τότε και ο P^n είναι στοχαστικός για κάθε n. Γενικότερα, αν A και B είναι στοχαστικοί πίνακες τότε και ο $A \cdot B$ είναι στοχαστικός.*

Συχνά μια Μαρκοβιανή αλυσίδα αποτυπώνεται σχηματικά αντί να γράφουμε τον στοχαστικό πίνακα. Ως παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα δύο καταστάσεων, τις E και A, και πίνακα μετάβασης τον

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Την ίδια Μαρκοβιανή αλυσίδα μπορούμε να την αποτυπώσουμε με το σχήμα 1.



Σχήμα 1: Σχεδιάγραμμα Μαρκοβιανής αλυσίδας δυο καταστάσεων.

Γενικότερα, μπορούμε να θεωρούμε Μαρκοβιανές αλυσίδες για τις οποίες δεν γνωρίζουμε ακριβώς την αρχική κατάσταση αλλά γνωρίζουμε την πιθανότητα να ξεκινήσει από μια δοσμένη κατάσταση. Αν η αλυσίδα παίρνει τιμές στο $S = \{s_1, s_2, \cdots,\}$ τότε θεωρούμε γνωστή την $P(X_0 = s_j) = m_j^{(0)}$ όπου $j \in \{1, 2 \cdots,\}$. Επομένως ορίζουμε την αρχική κατανομή $m^{(0)}$ το οποίο είναι ένα διάνυσμα και το κάθε στοιχείο είναι η πιθανότητα η αλυσίδα να ξεκινήσει από την αντίστοιχη κατάσταση.

Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα X_n με τιμές σε ένα διακριτό σύνολο S, με $X_0 = i_0 \in S$ με πιθανότητα v_{i_0} και πίνακα μετάβασης $P = (p(i, j))$. Με αυτά ως δεδομένα μπορούμε να υπολογίσουμε οποιαδήποτε πιθανότητα χρειαστεί.

Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε την πιθανότητα

$$P(X_3 = i_3, X_2 = i_2, X_1 = i_1, X_0 = i_0)$$

η οποία είναι η πιθανότητα η ακολουθία τ.μ. X_n να ακολουθήσει μια συγκεκριμένη διαδρομή. Η παραπάνω πιθανότητα γράφεται ως εξής,

$$P(X_3 = i_3, X_2 = i_2, X_1 = i_1, X_0 = i_0) =$$
$$P(X_3 = i_3 | X_2 = i_2, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \times$$
$$P(X_2 = i_2, X_1 = i_1, X_0 = i_0)$$

Η πρώτη πιθανότητα στο δεξί μέλος, είναι ίση με $P(X_3 = i_3 | X_2 = i_2) = p(i_2, i_3)$ χρησιμοποιώντας την Μαρκοβιανή ιδιότητα της ακολουθίας. Η δεύτερη πιθανότητα στο δεξί μέλος, παρομοίως, θα είναι ίση με $v_{i_0} p(i_1, i_2) p(i_0, i_1)$. Τελικά, θα έχουμε ότι

$$P(X_3 = i_3, X_2 = i_2, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = v_{i_0} p(i_0, i_1) p(i_1, i_2) p(i_2, i_3).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα* X_n *με χώρο καταστάσεων το* $S = \{\, s_1, s_2, \cdots, \}$*, με αρχική κατανομή* $m^{(0)}$ *και πίνακα μετάβασης* P*. Τότε έχουμε ότι*

$$m^{(n)} = m^{(0)} P^n$$

Με $m^{(n)}$ συμβολίζουμε το εξής διάνυσμα

$$m^{(n)} = (P(X_n = s_1), \cdots, P(X_n = s_k), \cdots)$$

και με P^n την n-οστή δύναμη του πίνακα μετάβασης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 *Έστω* X_n *μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων* $S = \{s_1, s_2, \cdots, \}$*, με αρχική κατανομή* $m^{(0)}$ *και πίνακα μετάβασης* P*. Τότε έχουμε ότι*

$$P(X_{m+n} = s_j | X_m = s_i) = P^n_{i,j}$$

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα μπορούμε να δώσουμε έναν ισοδύναμο ορισμό της Μαρκοβιανής αλυσίδας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7 *Θα λέμε ότι η X_n είναι μια* **διακριτού χρόνου Μαρκοβιανή αλυσίδα** *με πίνακα μετάβασης $p(i,j)$ αν για κάθε $j, i, i_{k-1}, \cdots, i_0 \in \{s_0, s_2, \cdots,\}$ με $\{s_0, s_1, \cdots,\}$ το πεδίο τιμών, ισχύει το εξής*

$$P\left(X_{n+1} = j | X_k = i, X_{k-1} = i_{k-1}, \cdots, X_0 = i_0\right)$$
$$= P(X_{n+1} = j | X_k = i)$$

για κάθε $k \leq n$.

Διαπιστώνουμε ότι για να υπολογίσουμε τις παραπάνω ποσότητες θα πρέπει να υπολογίσουμε την n-οστή δύναμη του πίνακα A.

Εξισώσεις Chapman-Kolmogorov

Αν συμβολίσουμε με $P_{ij}^{(n)} = P(X_{n+t} = j | X_t = i)$ με $n, t \geq 0$ τότε οι εξισώσεις Chapman-Kolmogorov είναι

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{l=0}^{k} P_{il}^{(n)} P_{lj}^{(m)},$$

για μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με k το πλήθος καταστάσεις. Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει εύκολα από το θεώρημα 6 αφού $P_{ij}^{(n+m)} = P_{ij}^{n+m}$ δηλαδή το ij στοιχείο της $n+m$ δύναμης του πίνακα μετάβασης. Όμως,

$$P_{ij}^{n+m} = (P^n P^m)_{ij} = \sum_{l=0}^{k} P_{il}^{n} P_{lj}^{m},$$

από ιδιότητες πινάκων.

Δικατάστατη Μαρκοβιανή Αλυσίδα

Έστω X_n μια Μαρκοβιανή διαδικασία με δυο καταστάσεις, 0 και 1. Υποθέτουμε ότι ο πίνακας μετάβασης P είναι

$$\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

με $a, b \in [0,1]$. Αυτό που βλέπουμε είναι ότι η πιθανότητα στο $n+1$ βήμα να βρεθεί στην κατάσταση 0 δεδομένου ότι στο βήμα n ήταν στην θέση 0 είναι $1-a$ και άρα η πιθανότητα να βρεθεί στην κατάσταση 1 είναι a. Αντίστοιχα και οι άλλες πιθανότητες, όπως π.χ. η πιθανότητα στο βήμα $n+1$ να είναι στην κατάσταση 1 δεδομένου ότι στο βήμα n ήταν στην ίδια κατάσταση είναι $1-b$.

Μπορούμε να γράψουμε τον παραπάνω πίνακα ως εξής, $P = I - S$ με S τον παρακάτω πίνακα,

$$\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$$

Δείξτε επαγωγικά ότι $S^k = (a+b)^{k-1}S, k = 1, 2, \cdots$.

Θα υπολογίσουμε το P^n χρησιμοποιώντας το διωνυμικό θεώρημα,

$$\begin{aligned} P^n &= (I-S)^n \\ &= I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k S^k \\ &= I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (a+b)^{k-1} S \\ &= I + S\frac{(1-a-b)^n - 1}{a+b}. \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε ότι

$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix} + (1-a-b)^n \begin{pmatrix} \frac{a}{a+b} & -\frac{a}{a+b} \\ -\frac{b}{a+b} & \frac{b}{a+b} \end{pmatrix}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα θα πάρουμε αν χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο που έχουμε περιγράψει. Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές οι οποίες είναι οι $k_1 = 1$ και $k_2 = 1 - a - b$. Παρατηρούμε ότι $k_1 = k_2$ όταν $a = b = 0$ αφού $a, b \in [0, 1]$. Θα υποθέσουμε ότι $k_1 \neq k_2$ ή αλλιώς $a + b \neq 0$. Κατασκευάζουμε ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού, το $v(k) = c_1 k + c_2$ και τέτοιο ώστε να ικανοποιεί τις παρακάτω εξισώσεις

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ c_1(1-a-b) + c_2 &= (1-a-b)^n \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα υπολογίζουμε τους c_1 και c_2 και στην συνέχεια έχουμε ότι $A^n = c_1 A + c_2 \mathbb{I}$. Θα προκύψει τελικά ο ίδιος πίνακας όπως παραπάνω. Αν $a = b = 0$ τότε ο πίνακας μετάβασης είναι ο μοναδιαίος και επομένως η νιοστή του δύναμη είναι πάλι ο μοναδιαίος.

Αν $|1-a-b| < 1$ τότε

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix}$$

Στην περίπτωση όμως που $a = b = 1$ τότε

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ενώ στην περίπτωση που $a = b = 0$ τότε

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Στην πρώτη περίπτωση παρατηρούμε ότι

$$P^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$P^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Τι σημαίνει αυτό;

Στην δεύτερη περίπτωση παρατηρούμε ότι

$$P^{n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Τι σημαίνει αυτό;

Τυχαίος Περίπατος

Έστω $S = \mathbb{Z}$. Αν x_n μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με $P(x_n = 1) = p$, $P(x_n = -1) = 1 - p$ τότε κατασκευάζουμε μια νέα ακολουθία τ.μ. $s_n = x_1 + \cdots + x_n$, με $s_0 = 0$. Θα αποδείξουμε ότι η s_n είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης $P_{ij} = p$ όταν $j = i + 1$, $P_{ij} = 1 - p$ όταν $j = i - 1$ και μηδέν αλλιώς. Η s_n ονομάζεται τυχαίος περίπατος που ξεκινά από το 0. Αν $s_0 = i$ έχουμε έναν τυχαίο περίπατο που ξεκινά από το i.

Θα αποδείξουμε ότι η s_n είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα. Έχουμε,

$$\begin{aligned}
& P(s_{n+1} = i_{n+1} | s_0 = i_0, \cdots, s_n = i_n) \\
= \ & P(x_{n+1} + s_n = i_{n+1} | s_0 = i_0, \cdots, s_n = i_n) \\
= \ & P(x_{n+1} = i_{n+1} - i_n | s_0 = i_0, \cdots, s_n = i_n) \\
= \ & P(x_{n+1} = i_{n+1} - i_n) \\
= \ & P(x_{n+1} = i_{n+1} - i_n | s_n = i_n) \\
= \ & P(s_{n+1} = i_{n+1} | s_n = i_n).
\end{aligned}$$

Σημειώστε ότι το ενδεχόμενο $\{x_{n+1} = i_{n+1} - i_n\}$ είναι ανεξάρτητο του $\{s_n = i_n\}$. Επίσης, η x_{n+1} μπορεί να πάρει μόνο δυο τιμές, 1 και -1, ανεξαρτήτως με την τιμή που έχει το άθροισμα μέχρι το προηγούμενο βήμα. Αρα, $P(x_{n+1} = i_{n+1} - i_n | s_0 = i_0, \cdots, s_n = i_n) = P(x_{n+1} = i_{n+1} - i_n)$.

Επαναληπτικές και μεταβατικές καταστάσεις

Θεωρούμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με τιμές στο S και πίνακα μετάβασης P.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8 *Θα λέμε ότι μια κατάσταση $i \in S$ είναι* **επαναληπτική** *αν η Μαρκοβιανή αλυσίδα x_n θα επιστρέψει τελικά στην i δεδομένου ότι κάποια στιγμή βρίσκεται στην i, δηλαδή,*

$$P(x_n = i \text{ για κάποιο } n > k | x_k = i) = 1.$$

Αν το παραπάνω δεν ισχύει τότε λέμε ότι η κατάσταση i είναι **μεταβατική**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 9 *Λέμε ότι η κατάσταση i* **επικοινωνεί** *με την κατάσταση j εάν με θετική πιθανότητα η αλυσίδα θα επισκεφτεί την κατάσταση j ξεκινώντας από την i, δηλαδή,*

$$P(x_n = j \text{ για κάποιο } n \geq k | x_k = i) > 0.$$

Αν η i επικοινωνεί με την j τότε γράφουμε $i \to j$. Αν επιπλέον $j \to i$ γράφουμε $i \leftrightarrow j$ και λέμε ότι οι i, j επικοινωνούν.

Προταση 10 *Ισχύει ότι* $i \to j$ **ανν** $P_{ij}^k > 0$ *για κάποιο* $k \geq 1$.

Προταση 11 *Έστω ότι* $i \to j$ *όπου* $i, j \in S$ *με* S *ένας πεπερασμένος χώρος καταστάσεων μια Μαρκοβιανής αλυσίδας με πλήθος καταστάσεων* m. *Τότε υπάρχει κάποιο* $n \leq m - 1$ *τέτοιο ώστε* $P_{ij}^n > 0$.

Προταση 12 *Ισχύει ότι* $i \leftrightarrow i$. *Αν* $i \leftrightarrow j$ *τότε και* $j \leftrightarrow i$. *Τέλος, αν* $i \to j$ *και* $j \to k$ *τότε και* $i \to k$. *Οι ιδιότητες αυτές αποδεικνύουν ότι η επικοινωνία είναι σχέση ισοδυναμίας.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 13 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα X_n ορισμένη σε έναν αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων S. Τότε, ένα υποσύνολο $C \subseteq S$ ονομάζεται* **κλειστό** *στην περίπτωση που η αλυσίδα παίρνει τιμές στο C, και μόνο στο C, από την στιγμή που για πρώτη φορά θα πάρει κάποια τιμή του συνόλου αυτού ή αλλιώς*

$$P\left(X_k \in S \setminus C \text{ για οποιοδήποτε } k \geq n | X_n \in C\right) = 0.$$

Θα λέμε ένα υποσύνολο $C \subseteq S$ ότι είναι **αδιαχώριστο** *αν οποιεσδήποτε δυο καταστάσεις $i, j \in C$ επικοινωνούν μεταξύ τους, δηλαδή για κάθε $i, j \in C$ έχουμε $i \leftrightarrow j$. Επίσης, μια κατάσταση $j \in S$ θα ονομάζεται* **απορροφητική** *αν $P_{jj} = 1$.*

Το επόμενο θεώρημα είναι χρήσιμο στην πράξη για να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο είναι κλειστό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 14 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα X_n ορισμένη σε έναν αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων S. Ένα υποσύνολο $C \subseteq S$ είναι κλειστό* **ανν** *$P_{ij} = 0$ για κάθε $i \in C$ και $j \in S \setminus C$.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15 *Για παράδειγμα, έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με καταστάσεις* $0, 1, 2$ *και πίνακα μετάβασης,*

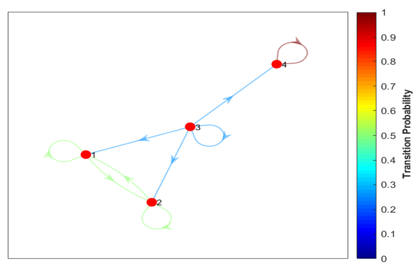
$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Διαπιστώνουμε ότι από την κατάσταση 0 *στην* 1 *η πιθανότητα μετάβασης είναι* 1/2 *και άρα* $0 \to 1$. *Επίσης, από την κατάσταση* 1 *η πιθανότητα μετάβασης στην* 0 *είναι* 1/2 *οπότε* $0 \leftrightarrow 1$. *Η πιθανότητα μετάβασης από την* 2 *στην* 1 *είναι* 1/3 *και η πιθανότητα μετάβασης από την* 1 *στην* 2 *είναι* 1/4 *άρα* $1 \leftrightarrow 2$. *Τελικά, προκύπτει ότι και* $0 \leftrightarrow 2$ *οπότε και η συγκεκριμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι αδιαχώριστη.* □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16 *Θεωρούμε το επόμενο παράδειγμα Μαρκοβιανής αλυσίδας με καταστάσεις* 0, 1, 2, 3 *και πίνακα*

μετάβασης

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Σχήμα 2: Το γράφημα της αλυσίδας του παραδείγματος 16

Διαπιστώνουμε ότι $0 \leftrightarrow 1$ *και ότι* $2 \to 0$, $2 \to 1$, $2 \to 3$ *όμως αντίστροφα δεν γίνεται και τέλος από την κατάσταση* 3 *η πιθανότητα μετάβασης σε οποιαδήποτε άλλη είναι* 0. *Επομένως, μπορούμε να χωρίσουμε σε τρεις κλάσεις τις καταστάσεις* $\{0,1\}$, $\{2\}, \{3\}$. *Η κατάσταση* 3 *είναι απορροφητική και το υποσύνολο* $C = \{0,1\}$ *είναι κλειστό.* $\square$

ΛΗΜΜΑ 17 *Ισχύει ότι*

$$P_{ij}^n = \sum_{k=1}^{n} f_k(i|j) P_{jj}^{n-k}, \quad i, j \in S$$

όπου $f_n(i|j) = P(x_n = j, x_k \neq j, k = 1, \cdots, n-1 | x_0 = i)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Πράγματι,

$$\begin{aligned} P_{ij}^n &= P(x_n = j | x_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(x_n = j, x_k = j, x_l \neq j, 1 \leq l \leq k-1 | x_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(x_k = j, x_l \neq j, 1 \leq l \leq k-1 | x_0 = i) \times \\ &\quad \times P(x_n = j | x_k = j, x_l \neq j, 1 \leq l \leq k-1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f_k(i|j) P(x_n = j | x_k = j) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f_k(i|j) P_{jj}^{n-k}. \end{aligned}$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 18 *Για* $|x| < 1$ *και* $i, j \in S$ *ορίζουμε*

$$R_{ij}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^n x^n = I_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^n x^n, \quad F_{ij}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(i|j) x^n,$$

όπου I_{ij} *είναι το* ij *στοιχείο του μοναδιαίου πίνακα. Οι παραπάνω σειρές συγκλίνουν απολύτως και ομοιόμορφα για* $|x| < 1$ *και επίσης*

$$\begin{aligned} R_{ij}(x) &= F_{ij}(x) R_{jj}(x), \ \text{αν } i \neq j, \\ R_{ii}(x) &= 1 + F_{ii}(x) R_{ii}(x). \end{aligned}$$

Τέλος, ισχύει ότι

$$\lim_{x \uparrow 1} R_{jj}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^n \quad \text{και} \quad \lim_{x \uparrow 1} F_{jj}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(j|j)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφαρμόζοντας το κριτήριο της n-οστής ρίζας στις δυναμοσειρές των απολύτων τιμών και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $P_{ij}^n \leq 1$ και $f_n(i|j) \leq 1$ έχουμε ότι οι σειρές συγκλίνουν απολύτως και ομοιόμορφα όταν $|x| < 1$.

Από το λήμμα 17 έχουμε ότι

$$P_{ij}^n = \sum_{k=1}^{n} f_k(i|j) P_{jj}^{n-k}$$

Πολλαπλασιάζουμε με x^n κατά μέλη και έχουμε για $i \neq j$

$$\begin{aligned} R_{ij}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(i|j) P_{jj}^{n-k} x^k x^{n-k} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f_k(i|j) P_{jj}^{n-k} x^k x^{n-k} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=k}^{m} f_k(i|j) P_{jj}^{n-k} x^k x^{n-k} \qquad \text{(δες σχήμα ;;} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} f_k(i|j) x^k \sum_{n=k}^{m} P_{jj}^{n-k} x^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(i|j) x^k \sum_{k=0}^{\infty} P_{jj}^{k} x^k \\ &= F_{ij}(x) R_{jj}(x) \end{aligned}$$

Για $i = j$ ακολουθούμε την ίδια διαδικασία και έχουμε

$$R_{ii}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^n x^n = 1 + F_{ii}(x)R_{ii}(x)$$

Από το θεώρημα του Abel (Πρόταση ;; και Πόρισμα ;;) προκύπτουν εύκολα τα όρια

$$\lim_{x\uparrow 1} R_{jj}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^n \quad \text{και} \quad \lim_{x\uparrow 1} F_{jj}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(j|j)$$

Οι ισότητες αυτές ισχύουν είτε οι σειρές $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(j|j)$ συγκλίνουν είτε αποκλίνουν και οι δυο στο $+\infty$. $\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 19 *Σημειώστε ότι η $f_n(j|j)$ είναι η πιθανότητα να επισκεφθεί την κατάσταση j για πρώτη φορά στο n-βήμα δεδομένου ότι έχει ξεκινήσει από την κατάσταση j. Είναι εύκολο να δούμε ότι*

$$P(X_n \neq j, \forall n \geq 1 | X_0 = j) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(j|j) = 1.$$

Από αυτό έχουμε ότι η κατάσταση j είναι επαναληπτική **ανν**

$$f_{jj} := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(j|j) = 1$$

Σημειώστε ότι το f_{jj} είναι η πιθανότητα η αλυσίδα να επιστρέψει στην κατάσταση j κάποια στιγμή δεδομένου ότι ξεκίνησε από την j. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 20 *Μια κατάσταση j είναι επαναληπτική* **ανν**

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^n = \infty$$

Επίσης, η j είναι μεταβατική **ανν**

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^n < \infty$$

Αν η j είναι μεταβατική τότε για κάθε $i \in S$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^n < \infty, \quad \forall i \in S$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = 0, \quad \forall i \in S, \qquad \text{(δες ;;)}$$

Αν η j είναι επαναληπτική τότε για κάθε $i \in S$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^n = \infty$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 21 *Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων (έστω m) θα έχει τουλάχιστον μια επαναληπτική κατάσταση. Πράγματι, έστω ότι δεν ισχύει, δηλαδή όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές, τότε $\lim_{n\to\infty} P_{ik}^n = 0$ για κάθε $i, k \in S$. Όμως, $1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} P_{ik}^n$ αφού και ο P^n είναι στοχαστικός πίνακας και παίρνοντας το όριο καθώς $n \to \infty$ φτάνουμε σε άτοπο. Σε αλυσίδα με άπειρο πλήθος καταστάσεων δεν έχουμε το ίδιο συμπέρασμα διότι δεν είναι εφικτή η εναλλαγή ορίου και άπειρου αθροίσματος. Για μια τέτοια εναλλαγή θα βοηθούσαν τα λήμματα κυριαρχημένης και μονότονης σύγκλισης τα οποία όμως δεν ικανοποιούνται ενώ το λήμμα Fatou το οποίο ικανοποιείται δεν μας δίνει κάποια επιπλέον πληροφορία.* $\square$

Σε μια αλυσίδα με άπειρο πλήθος καταστάσεων μπορεί όλες οι καταστάσεις να είναι μεταβατικές, κάτι το οποίο δεν ισχύει σε μια αλυσίδα με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων όπως είδαμε στην προηγούμενη παρατήρηση. Ένα τέτοιο παράδειγμα αλυσίδας είναι ο τυχαίος περίπατος. Στο επόμενο θεώρημα αποδεικνύουμε βασικές ιδιότητές του.

ΘΕΩΡΗΜΑ 22 *Για τον τυχαίο περίπατο ισχύει ότι για* $n \geq 1$

$$P(s_n = j | s_0 = i) = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ \frac{n+j-i}{2} \end{pmatrix} p^{\frac{n+j-i}{2}} q^{\frac{n-j+i}{2}}, & \text{όταν } \frac{n-|j-i|}{2} \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Επίσης, για $p \in (0,1)$ *έχουμε ότι* $P(s_n = i | s_0 = i) \to 0$ *καθώς* $n \to \infty$. *Όταν* $p = \frac{1}{2}$ *(συμμετρικός τυχαίος περίπατος) οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές αλλιώς όταν* $p \neq \frac{1}{2}$ *οι καταστάσεις είναι μεταβατικές.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στο n. Για

$n = 1$ έχουμε ότι

$$P(s_1 = j | s_0 = i) = \begin{cases} p, & \text{αν } j = i + 1 \\ q, & \text{αν } j = i - 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Επομένως ικανοποιείται για $n = 1$. Υποθέτουμε ότι ικανοποιείται για κάποιο n και θα αποδείξουμε ότι ικανοποιείται και για $n + 1$. Έστω ότι $\frac{n-|j-1-i|}{2} \in \mathbb{N}$. Τότε παρατηρούμε ότι και $\frac{n-|j+1-i|}{2} \in \mathbb{N}$ και αντίστροφα. Οπότε σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\begin{aligned} & P(s_{n+1} = j | s_0 = i) \\ = \ & P(s_{n+1} = j | s_0 = i, s_n = j - 1) P(s_n = j - 1 | s_0 = i) \\ & + P(s_{n+1} = j | s_0 = i, s_n = j + 1) P(s_n = j + 1 | s_0 = i) \\ = \ & P(s_{n+1} = j | s_n = j - 1) P(s_n = j - 1 | s_0 = i) \\ & + P(s_{n+1} = j | s_n = j + 1) P(s_n = j + 1 | s_0 = i) \\ = \ & \binom{n+1}{\frac{n+1+j-i}{2}} p^{\frac{n+1+j-i}{2}} q^{\frac{n+1-j+i}{2}} \end{aligned}$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει την πρώτη ταυτότητα της Πρότασης ;;. Για την περίπτωση που $\frac{n-|j+1-i|}{2} \notin \mathbb{N}$ έχουμε δυο πιθανές περιπτώσεις. Η πρώτη είναι $\frac{n-|j+1-i|}{2} < 0$ οπότε σε αυτή την περίπτωση έχουμε και $\frac{n-|j-1-i|}{2} < 0$ και η δεύτερη περίπτωση είναι $n - |j+1-i| = 2k+1$ οπότε και πάλι $n - |j-1-i| = 2k-1$ άρα επαναλαμβάνοντας τους προηγούμενους υπολογισμούς έχουμε ότι σε αυτή την περίπτωση $P(s_{n+1} = j|s_0 = i) = 0$.

Για το δεύτερο μέρος υποθέτουμε αρχικά ότι $p \neq 1/2$. Όταν $j = i$ η πιθανότητα $P(s_n = i|s_0 = i) = \frac{(2k)!}{(k!)^2} p^k (1-p)^k$ όταν $n = 2k$ και μηδέν αλλιώς. Συμβολίζουμε με $a_k = \frac{(2k)!}{(k!)^2} p^k (1-p)^k$. Θα αποδείξουμε ότι η σειρά θετικών όρων $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$ και αυτό σημαίνει αναγκαστικά ότι $a_k \to 0$ καθώς $k \to \infty$ (δες ;;). Χρησιμοποιούμε το κριτήριο του λόγου (δες ;;) και έχουμε

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \to 4p(1-p) < 1.$$

'ρα, η σειρά συγκλίνει οπότε και $a_k \to 0$.

Για την περίπτωση που $p = 1/2$ δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα από το κριτήριο του λόγου και για αυτό θα το δούμε διαφορετικά. Θα χρησιμοποιήσουμε την φόρμουλα του Stirling (δες ;;) η οποία είναι,

$$k! \backsim \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k \text{ καθώς } k \to \infty.$$

Αυτό σημαίνει ότι το $k!$ συμπεριφέρεται στο όριο όπως και η ποσότητα δεξιά. Γράφουμε $a_k \backsim b_k$ και εννοούμε $a_k/b_k \to 1$ καθώς $k \to \infty$. Επομένως έχουμε ότι

$$a_k \sim \frac{\sqrt{4\pi k}}{2\pi k}\left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}\left(\frac{e}{k}\right)^{2k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \to 0, \text{ καθώς } k \to \infty.$$

Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γινόμενο Wallis (δες ;;). Παρατηρήστε όμως ότι όταν $p = 1/2$ έχουμε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$ καθότι $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} = \infty$. Αυτό σημαίνει ότι στην περίπτωση του συμμετρικού τυχαίου περιπάτου ($p = 1/2$) όλες οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές ενώ στην περίπτωση όπου $p \neq 1/2$ είδαμε ότι το αντίστοιχο άθροισμα είναι πεπερασμένο άρα όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές. Σημειώστε ότι το πλήθος καταστάσεων είναι άπειρο αλλιώς τουλάχιστον μια κατάσταση θα έπρεπε να είναι επαναληπτική. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 23 *Το θεώρημα 18 έχει και πρακτική αξία εκτός από την θεωρητική. Είναι συχνά χρήσιμο στον υπολογισμό πιθανοτήτων και ιδιαίτερα των* $f_n(i|i)$ *(δείτε επόμενο παράδειγμα). Αν κάποιος γνωρίζει τις πιθανότητες* P_{ii}^n *(π.χ. υπολογίζοντας την νιοστή δύναμη του* P*) τότε μέσω της σχέσης* $R_{ii}(x) = 1+F_{ii}(x)R_{ii}(x)$ *(αφού υπολογίσει την* $R_{ii}(x) = \sum P_{ii}^n x^n$*) μπορεί να υπολογίσει την* $F_{ii}(x)$*. Στην συνέχεια θα την αναπτύξει σε σειρά Taylor γύρω από το μηδέν, δηλαδή θα γραφεί στην μορφή*

$$F_{ii}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Όμως, ταυτόχρονα, εξ ορισμού

$$F_{ii}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(i|i) x^n$$

Λόγω μοναδικότητας του αναπτύγματος Taylor θα ι-

σχύει αναγκαστικά ότι

$$f_n(i|i) = a_n, \quad \text{για } n = 1, 2, \cdots,$$

Παρόμοια μπορούν να υπολογισθούν οι πιθανότητες $f_n(i|j)$. *Έτσι για παράδειγμα μπορούμε να υπολογίσουμε την*

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(i|j)$$

δηλαδή την πιθανότητα η αλυσίδα να ξεκινήσει από την κατάσταση i *και να μεταβεί κάποια στιγμή στην* j. *Αν* $i = j$ *θα έχουμε υπολογίσει την* f_{ii} *δηλαδή την πιθανότητα να ξεκινήσει από την* i *και να επανέρθει κάποια στιγμή στην* i. *Τις πιθανότητες* f_{ij} *όταν* $i \neq j$ *μπορούμε να τις υπολογίσουμε και διαφορετικά (εν γένει ευκολότερα) μέσω του θεωρήματος 64 (εκεί τις συμβολίζουμε με* h_i^j*).* □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24 (Πιθανότητα Επιστροφής του Τυχαίου Περιπάτ

Έστω ο τυχαίος περίπατος που ξεκινά από το μηδέν. Ποια είναι η πιθανότητα να επιστρέψει κάποια στιγμή στο μηδέν; Ποια είναι η πιθανότητα να επιστρέψει στο *μηδέν μετά από n βήματα και όχι νωρίτερα; Η πρώτη πιθανότητα είναι η* f_{00} *και είναι ίση με*

$$f_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(0|0) = F_{00}(1) = 1 - \frac{1}{R_{00}(1)} \qquad \text{(δείτε θεώρημα 18)}$$

Από το θεώρημα 22 προκύπτει ότι

$$P(s_n = 0|s_0 = 0) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n}{2}} (pq)^{\frac{n}{2}}, & \text{όταν } n = 2k \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Επομένως,

$$R_{00}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} (pq)^n x^{2n} = (1 - 4pqx^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Αρα

$$f_{00} = 1 - (1 - 4pq)^{\frac{1}{2}} = 1 - |p - q|$$

Στην περίπτωση του συμμετρικού τυχαίου περιπάτου ($p = \frac{1}{2}$) *έχουμε ότι* $f_{00} = 1$, *δηλαδή είναι βέβαιο ότι κάποια στιγμή θα επιστρέψει στο μηδέν από όπου και ξεκίνησε.*

Εφόσον

$$F_{00}(x) = 1 - (1-4pqx^2)^{\frac{1}{2}}$$

μπορούμε να την αναπτύξουμε σε σειρά Taylor γύρω από το μηδέν, χρησιμοποιώντας την ;;. Το αποτέλεσμα θα είναι

$$F_{00}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^{k-1}(4pq)^k x^{2k}$$

Σημειώστε ότι $F_{00}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(0|0)x^n$ *άρα λόγω μοναδικότητας του αναπτύγματος Taylor (δείτε Πόρισμα ;; και Παρατήρηση ;;) θα ισχύει ότι*

$$f_n(0|0) = \begin{cases} \binom{1/2}{k} (-1)^{k-1}(4pq)^k, & \text{όταν } n = 2k \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Δηλαδή υπολογίσαμε την πιθανότητα η αλυσίδα να επιστρέψει στο μηδέν ακριβώς σε n *το πλήθος βήματα και όχι νωρίτερα. Προφανώς θα ισχύει ότι* $f_n(0|0) \leq P(s_n = 0|s_0 = 0)$. *Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;*

Για λόγους συμμετρίας τα ίδια ισχύουν και για τις πιθανότητες f_{ii} *και* $f_n(i|i)$. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 25 *Έστω i επαναληπτική κατάσταση και έστω ότι $i \to j$. Τότε και j είναι επαναληπτική και*

$$f_{ij} := P(\exists\, n \in \mathbb{N} : X_n = j | X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(i|j) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(j|i) = f_{ji} = 1$$

Προκύπτει επίσης ότι και $j \to i$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 26 *Αν $i \leftrightarrow j$ τότε δεν μπορεί η μια να είναι επαναληπτική και η άλλη μεταβατική. Είτε και οι δυο θα είναι επαναληπτικές είτε μεταβατικές. Επομένως, σε ένα αδιαχώριστο σύνολο όλες οι καταστάσεις χαρακτηρίζονται το ίδιο ως προς την επαναληπτικότητα. Αν το σύνολο είναι αδιαχώριστο και πεπερασμένο τότε αναγκαστικά όλες οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές.* □

ΑΣΚΗΣΗ 27 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα*

μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

με $a, b \in (0,1]$. *Δείξτε ότι και οι δύο καταστάσεις είναι επαναληπτικές. Τι συμβαίνει στις περιπτώσεις* $b = 0, a \in (0,1]$ *ή* $a = 0, b \in (0,1]$ *ή* $a = b = 0$;

ΛΥΣΗ. Θα αποδείξουμε ότι η 0 είναι επαναληπτική. Για την άλλη κατάσταση ισχύουν τα ίδια. Για να το κάνουμε αυτό θα αποδείξουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{00}^{n} = \infty.$$

Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να υπολογίσουμε τον P^n το οποίο έχουμε κάνει σε προηγούμενη άσκηση. Διαπιστώνουμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις το άθροισμα είναι άπειρο.

Μπορούμε να αποδείξουμε το ίδιο χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η αλυσίδα έχει πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων και ότι αυτές επικοινωνούν μεταξύ τους. Αρα και οι δυο θα είναι επαναληπτικές. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 28 *Μια κατάσταση $j \in S$ είναι επαναληπτική* **ανν**

$$P(X_n = j \text{ για άπειρα } n | X_0 = j) = 1,$$

και είναι μεταβατική **ανν**

$$P(X_n = j \text{ για άπειρα } n | X_0 = j) = 0.$$

Στα επόμενα δυο θεωρήματα δίνουμε τα κατάλληλα κριτήρια για να αποφασίζουμε αν μια αδιαχώριστη αλυσίδα είναι μεταβατική ή επαναληπτική. Είναι ιδιαίτερα χρήσιμα όταν η αλυσίδα έχει άπειρο πλήθος καταστάσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 29 *Έστω $s \in S$ μια οποιαδήποτε κατάσταση μιας αδιαχώριστης Μαρκοβιανής αλυσίδας. Τότε η αλυσίδα είναι μεταβατική* **αν και μόνο αν** *υπάρχει μια μη μηδενική λύση $\{y_i : i \neq s\}$ του συστήματος*

$$y_i = \sum_{j \neq s} P_{ij} y_j, \quad i \neq s$$

τέτοια ώστε $|y_j| \leq 1$ για κάθε $j \neq s$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 30 *Έστω X_n μια αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα στο χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, 2, \cdots\}$. Αν το σύστημα*

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij} y_j \leq y_i, \qquad \textit{για } i > 0$$

έχει μια λύση y_i τέτοια ώστε $y_i \to \infty$ καθώς $i \to \infty$ τότε η αλυσίδα είναι επαναληπτική.

Εξισώσεις Διαφορών

Θα αναφέρουμε μερικά στοιχεία για τις ομογενείς και γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές οι οποίες εμφανίζονται συχνά στην μελέτη των στοχαστικών διαδικασιών. Σκοπός μας σε αυτή την περιγραφή είναι να μελετήσουμε τις πιο απλές μορφές χωρίς να διατυπώσουμε και αποδείξουμε αντίστοιχα θεωρήματα.

• Έστω μια ακολουθία αριθμών $y(n)$ η οποία ικανοποιεί την παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned} y(n+1) &= ay(n) \quad \text{(εξίσωση διαφορών)} \\ y(0) &= y_0 \quad \text{(αρχική συνθήκη)} \end{aligned}$$

όπου $a, y_0 \in \mathbb{R}$ δοσμένοι αριθμοί. Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε την ακολουθία αριθμών που ικανοποιεί τα παραπάνω. Εφόσον $y(n+1) = ay(n) = a^2y(n-1)$ προκύπτει εύκολα ότι $y(n) = a^n y(0)$. Αντικαθιστώντας και το δεδομένο $y(0) = y_0$ καταλήγουμε στο ότι $y(n) = a^n y_0$. Ως παράδειγμα μπορούμε να δούμε την παρακάτω εξίσωση διαφορών

$$\begin{aligned} y(n+1) &= \frac{1}{2}y(n) \\ y(0) &= 3 \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω καταλήγουμε εύκολα στο συμπέρασμα ότι $y(n) = 3\frac{1}{2^n}$.

• Θα γενικεύσουμε στην συνέχεια την παραπάνω εξίσωση διαφορών εργαζόμενοι σε μια εξίσωση σε μορφή πινάκων. Έστω $z(n) = \begin{pmatrix} z_1(n) \\ z_2(n) \\ \vdots \\ z_k(n) \end{pmatrix}$ μια ακολουθία διανυσμάτων και έστω ένας δοσμένος πίνακας $A_{k\times k}$. Θεωρούμε την παρακάτω εξίσωση διαφορών

$$\begin{aligned} z(n+1) &= A \cdot z(n) \\ z(0) &= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

όπου $c_1, c_2, \cdots, c_k \in \mathbb{R}$ δοσμένοι αριθμοί. Σκεπτόμενοι όπως προηγούμενα προκύπτει ότι $z(n) = A^n \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$.

Συνεπώς θα πρέπει να υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του πίνακα A έτσι ώστε να πάρουμε την λύση της παραπάνω εξίσωσης διαφορών.

• Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με εξισώσεις διαφορών ανώτερης τάξης.

Έστω μια ακολουθία $y(n)$ τ.ω.

$$y(n+k) + a_{k-1}y(n+k-1) + \cdots + a_1 y(n+1) + a_0 y(n) = 0 (1)$$

όπου $a_{k-1}, \cdots, a_0$ δοσμένοι πραγματικοί αριθμοί. Μια τέτοια σχέση ονομάζεται ομογενής και γραμμική εξίσωση διαφορών k τάξης. Ένας απλός τρόπος να υπολογίσουμε την ακολουθία αυτή είναι να μετατρέψουμε το πρόβλημα αυτό στον υπολογισμό της νιοστής δύναμης ενός πίνακα A κάτι το οποίο έχουμε μελετήσει διεξοδικά στο κεφάλαιο γραμμικής άλγεβρας. Για να γίνει αυτό κατασκευάζουμε k νέες ακολουθίες $b_1(n), b_2(n), \cdots, b_k(n)$

τ.ω.

$$\begin{aligned} b_1(n) &= y(n) \\ b_2(n) &= y(n+1) \\ &\vdots \\ b_k(n) &= y(n+k-1) \end{aligned}$$

Στην συνέχεια σχηματίζουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} b_1(n+1) &= b_2(n) \\ b_2(n+1) &= b_3(n) \\ &\vdots \\ b_{k-1}(n+1) &= b_k(n) \\ b_k(n+1) &= -a_0 b_1(n) - a_1 b_2(n) - \cdots - a_{k-1} b_k(n) \end{aligned} \tag{2}$$

Έπειτα θέτουμε $x_n = \begin{pmatrix} b_1(n) \\ b_2(n) \\ \vdots \\ b_k(n) \end{pmatrix}$ και επομένως το σύστημα 2 γράφεται $x_{n+1} = A \cdot x_n$ όπου $A_{k\times k}$ είναι ο παρακάτω πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας αυτής της μορφής είναι γνωστός στην γραμμική άλγεβρα ως ο **συνοδός πίνακας** του πολυωνύμου $\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_0$ (δες [;]). Αποδεικνύεται ότι τόσο το χαρακτηριστικό όσο και το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A είναι ίσο με το $d_A(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_0$ (συγκρίνετε το με την εξίσωση διαφορών!).

Συνεπώς ισχύει ότι

$$x_n = A^n \cdot x_0$$

άρα το αρχικό πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση της νιοστής δύναμης του πίνακα A. Για να υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του πίνακα A θα πρέπει να σχηματίσουμε ένα πολυώνυμο $k-1$ βαθμού, το $v(\lambda) =$

$c_{k-1}\lambda^{k-1}+\cdots+c_0$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned}
v(\lambda_1) &= f(\lambda_1) \\
v^{'}(\lambda_1 &= f^{'}(\lambda_1) \\
&\vdots \\
v^{(r_1-1)}(\lambda_1) &= f^{(r_1-1)}(\lambda_1) \\
&\vdots \\
v(\lambda_2) &= f(\lambda_2) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

όπου $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ οι ιδιοτιμές του πίνακα A (δηλαδή οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου) και $r_1,\cdots,r_m$ οι αντίστοιχες πολλαπλότητες τους και επίσης $f(x)=x^n$. Αν συμβολίσουμε με F τον πίνακα του παραπάνω συστήματος τότε η λύση θα είναι η

$$\begin{pmatrix} c_{k-1} \\ \vdots \\ c_0 \end{pmatrix} = F^{-1}\cdot\begin{pmatrix} f(\lambda_1) \\ f^{'}(\lambda_1) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Δηλαδή οι συντελεστές $c_{k-1},\cdots,c_0$ είναι γραμμικός συνδυασμός του δεξί μέλους του παραπάνω συστήματος. Επειδή $A^n=c_{k-1}A^{k-1}+c_{k-2}A^{k-2}+\cdots+c_0I_{k\times k}$

έπεται ότι η $y(n)$ θα έχει την μορφή

$$\begin{aligned} y(n) = b_1(n) = & \quad \lambda_1^n(d_0 + d_1 n + d_2 n^2 + \cdots + d_{r_1-1} n^{r_1-1}) \\ & + \lambda_2^n(f_0 + f_1 n + \cdots + f_{r_2-1} n^{r_2-1}) \\ & + \lambda_3^n \cdots \end{aligned}$$

όπου $d_0, d_1, \cdots, f_0, f_1, \cdots$ αυθαίρετες σταθερές οι οποίες θα υπολογισθούν αν μας δίνονται ισάριθμες αρχικές συνθήκες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 31 *Έστω η παρακάτω εξίσωση διαφορών*

$$y(n+3) + 5y(n+2) + 3y(n+1) - 9y(n) = 0$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda - 9$$

το οποίο έχει ρίζες τις $\lambda_1 = 1$ *πολλαπλότητας 1 (δηλαδή* $r_1 = 1$*) και* $\lambda_2 = -3$ *πολλαπλότητας 2 (δηλαδή* $r_2 = 2$*).*

Συνεπώς η λύση θα έχει την μορφή

$$y(n) = c_0 1^n + (-3)^n (d_0 + d_1 n)$$

όπου $c_0, d_0, d_1 \in \mathbb{R}$ *αυθαίρετες σταθερές.* □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 32 (Τυχαίος Περίπατος με ένα ανακλαστικό εμπόδ
Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα X_n *με τιμές στο* $\mathbb{N} \cup \{0\}$ *και* $X_0 = i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Έστω ότι ο πίνακας μετάβασης είναι τ.ω.* $P_{i,i-1} = q$, $P_{i,i+1} = p$ *για* $i \geq 1$ *ενώ* $P_{00} = q$ *και* $P_{01} = p$ *με* $p + q = 1$ *και* $pq \neq 0$.

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα 29. Διαλέγουμε $s = 0$ *και σχηματίζουμε το σύστημα των εξισώσεων*

$$y_i = \sum_{j \neq 0} P_{ij} y_j, \quad i \neq 0$$

ή αλλιώς

$$\begin{aligned} y_1 &= p y_2 \\ y_i &= p y_{i+1} + q y_{i-1}, \quad i = 2, 3, \cdots, \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την θεωρία που αναπτύξαμε περί εξισώσεων διαφορών θα ισχύει ότι

$$y_i = C + D \left(\frac{q}{p} \right)^i, \quad \text{όταν } p \neq q$$

και

$$y_i = C + Di, \quad \text{όταν } p = q = \frac{1}{2}$$

• *Αν* $q > p$ *τότε αναγκαστικά* $D = 0$ *αλλιώς η λύση θα είναι μη φραγμένη. Επομένως* $y_i = C$ *για* $i = 2, 3, \cdots$, *και επιπλέον* $y_1 = pC$. *Αρα από την σχέση* $y_2 = qy_1 + py_3$ *προκύπτει ότι* $C = qpC + pC$. *Αν* $C \neq 0$ *τότε αναγκαστικά* $p = 1$ *το οποίο είναι άτοπο με την υπόθεση ότι* $q > p$. *Αρα* $C = 0$ *επομένως δεν υπάρχει μη μηδενική και φραγμένη λύση του συστήματος και συνεπώς η αλυσίδα είναι επαναληπτική.*

• *Αν* $q = p = \frac{1}{2}$ *τότε η λύση της εξίσωσης διαφορών είναι η* $y_i = A + Bi$ *για* $i = 2, 3, \cdots$, *Προφανώς,* $B = 0$ *αλλιώς η λύση είναι μη φραγμένη και επομένως* $y_i = A$ *για* $i = 2, 3, \cdots$,. *Όμως* $y_1 = py_2 = pA$ *και όπως προηγούμενα έχουμε το συμπέρασμα ότι αναγκαστικά* $A = 0$, *δηλαδή η αλυσίδα είναι πάλι επαναληπτική.*

• *Αν* $q < p$ *τότε μπορούμε να δούμε ότι μια λύση* *της εξίσωσης διαφορών θα είναι η*

$$y_i = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i, \qquad \text{για } i = 1, 2, \cdots, \tag{3}$$

Προφανώς πρόκειται για μια μη μηδενική και φραγμένη από την μονάδα λύση των εξισώσεων επομένως σε αυτή την περίπτωση η αλυσίδα είναι μεταβατική.

Αυτό θα μπορούσαμε να το δούμε και ως εξής: οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} y_1 &= p y_2 \\ y_i &= p y_{i+1} + q y_{i-1}, \quad i = 2, 3, \cdots, \end{aligned}$$

είναι ισοδύναμες με τις

$$\begin{aligned} y_i &= q y_{i-1} + p y_{i+1}, \quad i = 1, 2, \cdots, \\ y_0 &= 0 \end{aligned}$$

Όταν $p \neq q$ τότε η γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης διαφορών είναι η $y_i = C + D\left(\frac{q}{p}\right)^i$. Αφού $y_0 = 0$ έπεται ότι $D = -C$ και άρα $y_i = C\left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i\right)$ για *οποιοδήποτε* C. *Διαλέγοντας* $C = 1$ *παίρνουμε την μη μηδενική και φραγμένη από την μονάδα λύση της ισότητας 3.* □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 33 (Τυχαίος Περίπατος) *Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα 29 στον τυχαίο περίπατο για να επιβεβαιώσουμε το γεγονός ότι είναι επαναληπτική Μαρκοβιανή αλυσίδα όταν* $p = q = \frac{1}{2}$ *και μεταβατική αλλιώς (δες θεώρημα 22). Διαλέγουμε* $s = 0$ *και σχηματίζουμε τις εξισώσεις*

$$y_i = \sum_{j \neq 0} P_{ij} y_j, \quad i \neq 0$$

Το σύστημα αυτό μπορούμε να το χωρίσουμε σε δυο συστήματα εξισώσεων. Το πρώτο θα είναι

$$\begin{aligned} y_1 &= p y_2 \\ y_i &= q y_{i-1} + p y_{i+1}, \quad i = 2, 3, \cdots, \end{aligned}$$

και το δεύτερο θα είναι

$$\begin{aligned} y_{-1} &= q y_{-2} \\ y_{-i} &= q y_{-i-1} + p y_{-i+1}, \quad i = 2, 3, \cdots, \end{aligned}$$

Θέτοντας $z_i = y_{-i}$ *το δεύτερο σύστημα γράφεται*

$$\begin{aligned} z_1 &= q z_2 \\ z_i &= p z_{i-1} + q z_{i+1}, \quad i = 2, 3, \cdots, \end{aligned}$$

• *Αν* $q > p$ *τότε η λύση του πρώτου συστήματος θα είναι της μορφής* $y_i = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^i$. *Αναγκαστικά θα πρέπει* $B = 0$ *για να είναι φραγμένη και επομένως* $y_i = A$ *για* $i = 2, 3, \cdots$, *καθώς και* $y_1 = pA$. *Από την σχέση* $y_2 = qy_1 + py_3$ *προκύπτει ότι αν* $A \neq 0$ *τότε αναγκαστικά* $p = 1$ *το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεση* $q > p$. *Αρα* $A = 0$. *Στο δεύτερο όμως σύστημα μια μη μηδενική και φραγμένη από την μονάδα λύση είναι της μορφής* $z_i = 1 - \left(\frac{p}{q}\right)^i$. *Επομένως η αλυσίδα σε αυτή την περίπτωση είναι μεταβατική.*

• *Αν* $q < p$ *εργαζόμαστε εντελώς ανάλογα και καταλήγουμε στο γνωστό συμπέρασμα ότι η αλυσίδα είναι μεταβατική.*

• *Αν* $q = p = \frac{1}{2}$ *τότε η λύση του πρώτου συστήματος θα είναι της μορφής* $y_i = A + Bi$. *Αρα πρέπει* $B = 0$ *αλλιώς θα είναι μη φραγμένη. Αν* $A \neq 0$ *τότε* από τις σχέσεις $y_1 = py_2$ και $y_2 = qy_1 + py_2$ προκύπτει ότι $p = 1$ το οποίο είναι άτοπο με την υπόθεση ότι $p = q = \frac{1}{2}$. Δηλαδή αναγκαστικά $A = 0$. Εργαζόμενοι στο δεύτερο σύστημα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μοναδική λύση των εξισώσεων είναι η μηδενική. Επομένως, σε αυτή την περίπτωση η αλυσίδα είναι επαναληπτική. □

Άσκηση 34 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με σύνολο καταστάσεων το $S = \mathbb{N} \cup \{0\}$ και πίνακα μετάβασης τον P τέτοιος ώστε $P_{00} = 0$, $P_{01} = 1$. Επίσης $P_{i-1,i} = q$ και $P_{i,i+1} = p$ όπου $p, q \in (0,1)$ και $p + q = 1$. Σε ποιες περιπτώσεις η αλυσίδα είναι μεταβατική και σε ποιες επαναληπτική;*

Άσκηση 35 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με σύνολο καταστάσεων το $S = \mathbb{Z}$ και πίνακα μετάβασης τον P τέτοιος ώστε $P_{i-1,i} = q$, $P_{i,i} = w$ και $P_{i,i+1} = e$ όπου $q, w, e \in (0,1)$ και τέτοια ώστε $q + w + e = 1$. Σε ποιες περιπτώσεις η αλυσίδα είναι μεταβατική και σε ποιες επαναληπτική;*

ΘΕΩΡΗΜΑ 36 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα X_n ορισμένη σε έναν αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων S. Τότε,*

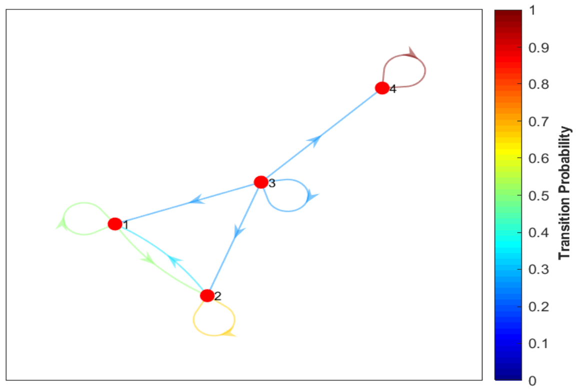
$$S = T \cup \bigcup_{j=1}^{N} C_j,$$

όπου T είναι υποσύνολο του S και περιέχει όλες τις μεταβατικές καταστάσεις της S, C_j είναι κλειστό και αδιαχώριστο υποσύνολο επαναληπτικών καταστάσεων και N είναι το πλήθος αυτών των συνόλων C_j.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 37 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Διαπιστώνουμε ότι το $\{1,2\}$ είναι κλειστό σύνολο αφού $P_{ij} = 0$ με $i \in \{1,2\}$ και $j \notin \{1,2\}$ καθώς και το



Σχήμα 3: Το γράφημα της αλυσίδας του παραδείγματος 37

$\{4\}$ *το οποίο επίσης είναι απορροφητικό. Η κατάσταση 4 ως απορροφητική είναι και επαναληπτική. Επίσης οι καταστάσεις 1 και 2 είναι επαναληπτικές. Για να το δικαιολογήσουμε αυτό μπορούμε να σκεφτούμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα η οποία έχει πίνακα μετάβασης τον*

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

και σύνολο καταστάσεων τις $1, 2$. *Οι δυο καταστάσεις συνεπικοινωνούν και λόγω ότι το σύνολο καταστάσεων* *είναι πεπερασμένο η μια τουλάχιστον είναι επαναληπτική. Λόγω συνεπικοινωνίας θα είναι και οι δυο επαναληπτικές. Η αρχική Μαρκοβιανή αλυσίδα αν μεταβεί στο σύνολο* $\{1,2\}$, *λόγω του ότι είναι κλειστό, θα απορροφηθεί και επομένως θα συμπεριφέρεται σαν μια νέα Μαρκοβιανή αλυσίδα με σύνολο καταστάσεων τις* $1,2$ *και πίνακα μετάβασης τον* $\hat{P}$.

Η κατάσταση 3 είναι μεταβατική αφού υπάρχει θετική πιθανότητα να περάσει από την 3 και να απορροφηθεί στην 4 ή στο $\{1,2\}$ *και άρα να μην ξαναγυρίσει στην 3. Δηλαδή, αν* $T=\{3\}$, $C_1=\{1,2\}$ *και* $C_2=\{4\}$ *τότε*

$$S=\{1,2,3,4\}=\underbrace{\overbrace{\{3\}}^{T}}_{\text{σύνολο μεταβατικών}}\bigcup\underbrace{\overbrace{\{1,2\}}^{C_1}\cup\overbrace{\{4\}}^{C_2}}_{\text{ένωση κλειστών συνόλων επαναληπτικών}}$$

$\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 38 *Είναι σημαντικό να αναλύσουμε τον χώρο καταστάσεων σε μεταβατικές και σε ένωση κλειστών συνόλων επαναληπτικών καταστάσεων. Εάν η Μαρκοβιανή αλυσίδα απορροφηθεί σε ένα κλειστό σύνο-*

λο επαναληπτικών καταστάσεων δεν υπάρχει περίπτωση να πάρει τιμές εκτός του συνόλου αυτού για όλα τα επόμενα n. Συνεπώς είναι σαν να έχουμε μια νέα Μαρκοβιανή αλυσίδα η οποία έχει σύνολο καταστάσεων το κλειστό αυτό σύνολο και πίνακα μετάβασης τον πίνακα που προέρχεται από τον αρχικό διαγράφοντας στήλες και γραμμές καταστάσεων που δεν ανήκουν στο κλειστό αυτό σύνολο. Επομένως εργαζόμαστε σε έναν μικρότερο πίνακα για την μελέτη των καταστάσεων αυτών. Συνεπώς, κάθε κλειστό σύνολο επαναληπτικών καταστάσεων ορίζει μια νέα Μαρκοβιανή αλυσίδα η οποία μπορεί να μελετηθεί χωριστά. □

Μηδενικά και θετικά επαναληπτικές καταστάσεις

Έστω $j \in S$ μια κατάσταση μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας X_n. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή

$$T_j = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = j | X_0 = j\}$$

Δηλαδή, σε κάθε πιθανό μονοπάτι η T_j μας δίνει το πλήθος βημάτων για το οποίο η αλυσίδα επανήλθε στην κατάσταση j ξεκινώντας από την j. Ο μέσος χρόνος επαναφοράς είναι

$$\begin{aligned} m_j = \mathbb{E}(T_j) &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(X_n = j, X_l \neq j, 1 \leq l \leq n-1 | X_0 = j) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n f_n(j|j) \end{aligned}$$

είναι δηλαδή η μέση τιμή του πλήθους των βημάτων για επαναφορά αν το πείραμα επαναληφθεί άπειρες φορές (κάθε μονοπάτι αναπαριστά ένα πείραμα).

ΟΡΙΣΜΟΣ 39 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα X_n. Θα λέμε ότι η $i \in S$ είναι* **μηδενικά επαναληπτική** *κατάσταση εάν είναι επαναληπτική και αν ο μέσος χρόνος επαναφοράς*

$$m_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n(i|i) = \infty.$$

Μια κατάσταση $i \in S$ ονομάζεται **θετικά επαναληπτική** *αν είναι επαναληπτική και $m_i < \infty$.*

ΑΣΚΗΣΗ 40 *Αποδείξτε ότι η κατάσταση i είναι απορροφητική* **ανν** *ο μέσος χρόνος επαναφοράς της είναι μονάδα, δηλαδή $m_i = 1$.*

ΛΥΣΗ. Θα χρειαστούμε την σημαντική παρατήρηση 19, η οποία στην ουσία λέει ότι αν μια κατάσταση είναι επαναληπτική τότε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(i|i) = 1$.

· Έστω ότι είναι απορροφητική. Τότε $P_{ii} = 1$. Θα υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο επαναφοράς m_i. Έχουμε ότι $m_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n(i|i)$. Παρατηρούμε ότι $f_1(i|i) = P_{ii} = 1$ ενώ $f_m(i|i) = 0$ για κάθε $m \geq 2$

διότι η πιθανότητα $P_{ij} = 0$ για κάθε $j \neq i$. Αρα προκύπτει ότι $m_i = 1$.

· Αντίστροφα, αν $m_i = 1$ θα αποδείξουμε ότι η i είναι απορροφητική. Εφόσον $m_i = 1$ έπεται ότι η κατάσταση i είναι θετικά επαναληπτική και άρα επαναληπτική. Επομένως ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(i|i) = 1$. Έστω ότι υπάρχει κάποιος ακέραιος $n_j \in \{n \in \mathbb{N} : f_n(i|i) > 0\}$ τέτοιος ώστε $n_j > 1$. Τότε

$$m_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n(i|i) > \sum_{n=1}^{\infty} f_n(i|i) = 1$$

Αυτό όμως είναι άτοπο διότι έχουμε υποθέσει ότι $m_i = 1$. Αρα $\{n \in \mathbb{N} : f_n(i|i) > 0\} = \{1\}$. Αφού $m_i = f_1(i|i) = 1$ έπεται ότι $P_{ii} = f_1(i|i) = 1$ άρα η κατάσταση i είναι απορροφητική. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 41 *Για την Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης*

$$\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

και καταστάσεις $0, 1$ *δείξτε ότι οι καταστάσεις είναι θε-τικά επαναληπτικές όταν* $a, b \in (0, 1)$.

ΛΥΣΗ. Θα υπολογίσουμε την $f_n(0|0)$ όταν $b \in (0, 1)$. Από τον ορισμό βλέπουμε ότι

$$f_n(0|0) = P_{01}(P_{11})^{n-2}P_{10} = a(1-b)^{n-2}b \quad \text{όταν } n \geq 2$$

ενώ $f_1(0|0) = 1 - a$. Θα υπολογίσουμε το άπειρο άθροισμα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n f_n(0|0) = 1 - a + \frac{ab}{1-b}\sum_{n=2}^{\infty} n(1-b)^{n-1}$$

Όμως

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} n(1-x)^{n-1} &= -\sum_{n=2}^{\infty}((1-x)^n)' \\
&= -\left(\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n\right)' + (1 + (1-x))' \\
&= \frac{1}{x^2} - 1 \quad \text{όταν } |1-x| < 1
\end{aligned}$$

Αρα

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(1-b)^{n-1} = \frac{1}{b^2} - 1$$

και επομένως ο μέσος χρόνος επαναφοράς

$$m_0 = 1 - a + \frac{ab}{(1-b)}\left(\frac{1}{b^2} - 1\right) = \frac{a+b}{b}$$

Παρομοίως εργαζόμαστε για τον υπολογισμό της m_1.

$\square$

ΑΣΚΗΣΗ 42 *Εξετάστε την αλυσίδα του περιπατητή ως προς την επαναληπτικότητα. Υπολογίστε τον μέσο χρόνο επαναφοράς των θετικά επαναληπτικών καταστάσεων.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εύκολα βλέπουμε ότι όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους και επειδή η αλυσίδα είναι πεπερασμένη όλες οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές. Θα εξετάσουμε αν είναι θετικά επαναληπτικές ή μηδενικά επαναληπτικές.

Υπολογίζουμε το

$$R_{11}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{11}^n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_{11}^n x^n$$

Αφού $P_{11}^{2k} = 1/2$ ενώ $P_{11}^{2k+1} = 0$ τότε

$$R_{11}(x) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(x^2)^n = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x^2} - 1\right)$$

Δηλαδή, $F_{11}(x) = \frac{x^2}{2-x^2}$ (δες 18) και επομένως $F_{11}^{'}(1) = 4 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n(1|1) = m_1$. Αρα η κατάσταση 1 είναι θετικά επαναληπτική με μέσο χρόνο επαναφοράς $m_1 = 4$. Παρομοίως για τις άλλες καταστάσεις. $\square$

Περιοδικότητα καταστάσεων

ΟΡΙΣΜΟΣ 43 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα X_n με τιμές στο χώρο καταστάσεων S. Θα λέμε ότι η i είναι* **περιοδική** *κατάσταση* **ανν** *ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $\{n \in \mathbb{N} : P_{ii}^n > 0\}$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 2 αλλιώς ονομάζεται* **απεριοδική**. *Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης συμβολίζεται με $d(i)$ και ονομάζεται η περίοδος της κατάστασης i. Οπότε η κατάσταση i είναι περιοδική* **ανν** *$d(i) \geq 2$. Μια κατάσταση i η οποία είναι ταυτόχρονα θετικά επαναληπτική και απεριοδική ονομάζεται* **εργοδική.**

ΑΣΚΗΣΗ 44 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με δυο καταστάσεις $1, 2$ και πίνακα μετάβασης*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Να υπολογισθούν τα $d(1), d(2)$.

ΛΥΣΗ. Υπολογίζουμε τους πίνακες P^2, P^3. Θα δούμε ότι δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε μεγαλύτερες δυνάμεις, στο συγκεκριμένο παράδειγμα. Έχουμε,

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

και

$$P^3 = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}$$

Αρα $P_{11} = 0, P_{11}^2 = 1/2, P_{11}^3 = 1/4$. Επομένως, για $n = 2, 3$ έχουμε θετική πιθανότητα. Αυτό σημαίνει ότι $d(1) = 1$. Αντίστοιχα, βλέπουμε ότι $P_{22} = 1/2 > 0$ οπότε $d(2) = 1$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 45 *Έστω $i, j \in S$ και $i \leftrightarrow j$. Τότε $d(i) = d(j)$.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 46 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με*

πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}$$

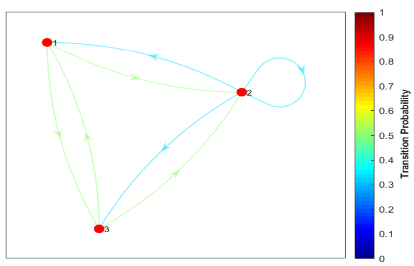
Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη ενώ η εύρεση ιδιοτιμών είναι δύσκολη. Θα χρησιμοποιήσουμε το σκεπτικό της παρατήρησης ;;. *Υπολογίζουμε τους ακεραίους* n_0^i *για* $i = 1, \cdots, 6$ *και βλέπουμε ότι είναι ίσοι με 3, δηλαδή είναι πρώτος αριθμός. Δεν μπορούμε να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα όσον αφορά την περιοδικότητα παρά μόνο ότι είναι είτε 1 είτε 3. Συνεχίζουμε τον υπολογισμό των δυνάμεων του πίνακα και βλέπουμε ότι* $P_{ii}^5 > 0$ *και το 5 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, επομένως ο* $d = 1$. □

ΑΣΚΗΣΗ 47 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα*

μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Να εξετασθεί ως προς την περιοδικότητα η κατάσταση 1.



Σχήμα 4: Το γράφημα της αλυσίδας της άσκησης 47

ΛΥΣΗ. Βλέπουμε ότι $P_{11} = 0$ επομένως θα πρέπει να υπολογίσουμε τους P^2, P^3 και ίσως να χρειαστούν και επιπλέον υπολογισμοί. Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 45 για να αποφύγουμε τους πολλαπλασιασμούς πινάκων. Διαπιστώνουμε ότι $P_{22} = 1/3 > 0$ επομένως η κατάσταση 2 είναι απεριοδική. Αν $1 \leftrightarrow 2$ τότε και η 1 θα είναι απεριοδική, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα. Εξετάζοντας την αλυσίδα ως προς την επικοινωνία βλέπουμε εύκολα ότι όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους επομένως όλες είναι απεριοδικές. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 48 *Να μελετηθεί ως προς την περιοδικότητα και επαναληπτικότητα ο πίνακας μετάβασης του πειράματος του περιπατητή.*

ΛΥΣΗ. Ο πίνακας μετάβασης είναι

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Προτού εξετάσουμε την περιοδικότητα των καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4\}$ θα εξετάσουμε το πρόβλημα της επικοινωνίας τους. Διαπιστώνουμε εύκολα ότι όλες συνεπικοινωνούν μεταξύ τους άρα θα είναι περιοδικές με την ίδια περίοδο ή όλες απεριοδικές.

Για την κατάσταση 1 βλέπουμε ότι $P_{11} = 0$ και παρομοίως για τις υπόλοιπες καταστάσεις. Υποχρεωτικά θα υπολογίσουμε τους πίνακες P^2, P^3. Έχουμε

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Είναι φανερό ότι $P^3 = P^2P = P$ και επομένως $P^5 = P^3P^2 = P^2P = P$ και συνεχίζοντας έτσι έχουμε ότι $P^{2k+1} = P$ για $k = 1, 2, \cdots$ Αντίστοιχα έχουμε $P^4 = P^3P = PP = P^2$ και συνεχίζοντας με τον τρόπο αυτό έχουμε ότι $P^{2k} = P^2$ για $k = 1, 2, \cdots$ Επίσης, $P_{11}^{2k} = 1/2 > 0$ ενώ $P_{11}^{2k+1} = 0$ επομένως $d(1) =$ Μ.Κ.Δ $\{2, 4, 6, \cdots\} = 2$ και αυτό σημαίνει ότι όλες οι καταστάσεις είναι περιοδικές με περίοδο 2. □

ΛΗΜΜΑ 49 *Έστω τα σύνολα $A = \{n \in \mathbb{N} : P_{ii}^n > 0\}$ και $B = \{n \in \mathbb{N} : f_n(i|i) > 0\}$ για μια δοσμένη κατάσταση i μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας. Τότε ο μέγιστος κοινός διαιρέτης του συνόλου A είναι ίσος με ε-*

κείνον του B.

Το λήμμα αυτό έχει θεωρητική αξία όπως θα δούμε παρακάτω αλλά και πρακτική όπως θα δούμε στα επόμενα παραδείγματα. Θα δούμε ότι σε μερικές περιπτώσεις βολεύει ιδιαίτερα να υπολογίσουμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη του συνόλου $\{n \in \mathbb{N} : f_n(i|i) > 0\}$ αντί του συνόλου $\{n \in \mathbb{N} : P_{ii}^n > 0\}$. Όσον αφορά το πλήθος των στοιχείων του B υπάρχουν περιπτώσεις όπου το σύνολο B είναι πεπερασμένο και περιπτώσεις όπου είναι άπειρο.

ΑΣΚΗΣΗ 50 *Να εξεταστεί ως προς την περιοδικότητα η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

ΛΥΣΗ. Η κατάσταση 1 είναι απορροφητική, απεριοδική και επαναληπτική. Οι καταστάσεις 2,3 είναι μεταβατικές αφού υπάρχει θετική πιθανότητα να απορροφηθούν στην 1 και επομένως η πιθανότητα να επιστρέψει στην κατάσταση 2 ή 3 είναι αυστηρά μικρότερη της μονάδας. Επίσης, οι δυο καταστάσεις συνεπικοινωνούν άρα θα έχουν την ίδια περίοδο.

1ος τρόπος. Για να εξετάσουμε την περιοδικότητα των καταστάσεων 2,3 θα υπολογίσουμε τον πίνακα P^n χρησιμοποιώντας το θεώρημα Cayley-Hamilton ως πρώτο τρόπο. Εύκολα υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές οι οποίες είναι $k_1 = 1, k_2 = 1/2, k_3 = -1/2$. Άρα σχηματίζουμε τρεις εξισώσεις με τρεις αγνώστους για να υπολογίσουμε τις σταθερές του πολυωνύμου $v(k) = ak^2 + bk + c$ το οποίο είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης $k^n : \delta_P(k)$ όπου το $\delta_P(k)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του P. Οι εξισώσεις είναι οι εξής

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1, \\ a\frac{1}{4} - b\frac{1}{2} + c &= (-1)^n \frac{1}{2^n}, \\ a\frac{1}{4} + b\frac{1}{2} + c &= \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Θα μελετήσουμε την κατάσταση 3 και το συμπέρασμα λόγω επικοινωνίας θα ισχύει και για την 2. Για να βρούμε την περιοδικότητα της 3 χρειαζόμαστε την πιθανότητα P_{33}^n. Το θεώρημα Cayley-Hamilton μας πληροφορεί ότι $\delta_P(P) = 0$ επομένως, αν $k^n = \delta_P(k)t(k) + v(k)$,

$$P^n = \delta_P(P)t(P) + v(P) = aP^2 + bP + cI$$

Για να υπολογίσω το P_{33}^n θα χρειαστώ μόνο το P_{33}^2 το οποίο εύκολα βρίσκω και είναι το $P_{33}^2 = 1/4$. Αρα από την ισότητα για τον P^n έχω ότι

$$P_{33}^n = aP_{33}^2 + bP_{33} + cI_{33} = a\frac{1}{4} + c$$

Από το σύστημα για τα a, b, c υπολογίζω εύκολα το b αφαιρώντας την δεύτερη εξίσωση από την τρίτη και βρίσκω $b = \frac{1-(-1)^n}{2^n}$ και αντικαθιστώντας το b στην τρίτη εξίσωση υπολογίζω την ποσότητα $P_{33}^n = a\frac{1}{4} + c = \frac{1+(-1)^n}{2^{n+1}}$.
Δηλαδή, διαπιστώνουμε ότι για $n = 2k$ έχουμε ότι $P_{33}^{2k} = \frac{2}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2^{2k}} > 0$ ενώ για $n = 2k+1$ προκύπτει ότι $P_{33}^{2k+1} = 0$. Αρα, η κατάσταση 3 και επομένως και η κατάσταση 2 είναι περιοδικές με περίοδο 2.

2^{ος} τρόπος. Ένας δεύτερος τρόπος είναι να υπολογίσουμε την περιοδικότητα εφαρμόζοντας το λήμμα 49. Παρατηρούμε ότι $f_1(2|2) = 0$, $f_2(2|2) = 1/4 > 0$ και $f_m(2|2) = 0$ για $m \geq 3$. Συνεπώς $\{n \in \mathbb{N} : f_n(2|2) > 0\} = \{2\}$ άρα ο μέγιστος κοινός διαιρέτης είναι ο 2 και επομένως η περίοδος των δυο καταστάσεων είναι $d = 2$. □

Άσκηση 51 *Αποδείξτε ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι απεριοδική χωρίς να υπολογίσετε δυνάμεις του πίνακα.

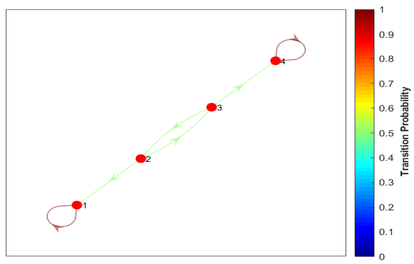
Λύση. Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη επομένως μπορούμε να εξετάσουμε την περιοδικότητα της κατάστασης 1 μόνο. Θα εξετάσουμε για ποια n οι πιθανότητες $f_n(1|1)$ είναι θετικές. Παρατηρούμε ότι $f_1(1|1) = f_2(1|1) = 0$. Όμως $f_3(1|1) > 0$ διότι το μονοπάτι $1 \to 3 \to 2 \to 1$ έχει θετική πιθανότητα. Επίσης, $f_5(1|1) > 0$ διότι το μονοπάτι $1 \to 5 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$ έχει θετική πιθανότητα. Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των 3 και 5 είναι η μονάδα. Όποιοι άλλοι ακέραιοι n είναι τέτοιοι ώστε $f_n(1|1) > 0$ δεν θα μεταβάλουν άλλο τον μέγιστο κοινό διαιρέτη. Ας θυμηθούμε ότι αν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $\{n_1, \cdots, n_k\}$ είναι ίσος με d τότε ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $\{n_1, \cdots, n_k, n_{k+1}\}$ είναι ο $\hat{d} \leq d$. Συνεπώς η αλυσίδα είναι απεριοδική. $\square$

Ασκηση 52 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και σύνολο καταστάσεων το $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Να εξε-

ταστεί ως προς την περιοδικότητα.



Σχήμα 5: Το γράφημα της αλυσίδας της άσκησης 52

ΛΥΣΗ. Οι καταστάσεις $1,4$ είναι απορροφητικές ενώ οι $2,3$ συνεπικοινωνούν και είναι μεταβατικές. Θα εξετάσουμε τις καταστάσεις $2,3$ ως προς την περιοδικότητα. Προφανώς θα έχουν την ίδια περίοδο λόγω συνεπικοινωνίας. Υπολογίζοντας τις πιθανότητες $f_n(2|2)$ προκύπτει ότι $f_1(2|2) = 0$, $f_2(2|2) = 1/4$ και $f_m(2|2) = 0$ για $m \geq 3$. Συνεπώς ο μέγιστος κοινός διαιρέτης του $\{n \in \mathbb{N} : f_n(2|2) > 0\}$ είναι ίσος με το 2 και λόγω του προηγούμενου λήμματος το 2 είναι και η περίοδος των καταστάσεων 2 και 3.

Για να βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα υπολογίζοντας τον P^n μπορούμε να αποδείξουμε επαγωγικά ότι $P_{22}^{2k} = \frac{1}{2^{2k}}$ και $P_{22}^{2k+1} = 0$ επομένως προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα. $\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ **53** *Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 49 για να υπολογίσουμε την περίοδο της Μαρκοβιανής αλυσίδας του περιπατητή. Όλες οι καταστάσεις λόγω συνεπικοινωνίας έχουν την ίδια περίοδο επομένως αρκεί να υπολογίσουμε το σύνολο* $\{n \in \mathbb{N} : f_n(1|1) > 0\}$. *Εύκολα παρατηρούμε ότι* $f_{2k+1}(1|1) = 0$ *και* $f_{2k}(1|1) > 0$ *επομένως* $\{n \in \mathbb{N} : f_n(1|1) > 0\} = \{2, 4, \cdots, 2k, \cdots\}$ *για* $k = 1, 2, \cdots$. *Αρα ο μέγιστος κοινός διαιρέτης είναι ο αριθμός 2 ο οποίος είναι και η περίοδος της αλυσίδας.* $\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ **54** *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνα-*

κα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Η κατάσταση 1 είναι απορροφητική ενώ οι καταστάσεις 2,3,4,5 συνεπικοινωνούν και είναι μεταβατικές αφού υπάρχει θετική πιθανότητα να απορροφηθούν στην 1. Θα υπολογίσουμε την περίοδο των καταστάσεων αφού υπολογίσουμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη του συνόλου $\{n \in \mathbb{N} : f_n(2|2) > 0\}$. Βλέπουμε ότι $f_1(2|2) = 0$ και $f_2(2|2) > 0$ αφού μπορεί η αλυσίδα να ξεκινήσει από την 2 να μεταβεί στην 3 και να επιστρέψει στην 2. Στην συνέχεια διαπιστώνουμε ότι $f_3(2|2) > 0$ εφόσον η αλυσίδα μπορεί να ξεκινήσει από την 2 να μεταβεί στην 3 έπειτα στην 4 και μετά ξανά στην 2. Αυτό όμως σημαίνει ότι το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : f_n(2|2) > 0\}$ περιέχει τουλάχιστον τους αριθμούς 2 και 3 επομένως ο *μέγιστος κοινός διαιρέτης του συνόλου θα είναι η μονάδα. Επίσης, η κατάσταση 1 ως απορροφητική είναι απεριοδική επομένως όλες οι καταστάσεις είναι απεριοδικές.*

Τα ίδια συμπεράσματα θα είχαμε βγάλει αν υπολογίζαμε τους P^2 και P^3. $\square$

0.1 Σύνολα κυκλικής μετάβασης και περιοδικότητα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 55 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη. Θα την μελετήσουμε ως προς την περιοδικότητα. Κάνοντας τους πολλαπλασιασμούς πινάκων βλέπουμε ότι $P^5 = P$ επομένως επαναλαμβάνεται ενώ η περίοδος της αλυσίδας είναι $d = 4$. Αυτό όμως που έχει *μεγαλύτερο ενδιαφέρον είναι το γεγονός ότι ξεκινώντας από την κατάσταση 1 σίγουρα θα μεταβεί στην 2 και έπειτα σίγουρα στην 3 κ.τ.λ. Θα δούμε στην συνέχεια ότι σε κάθε αδιαχώριστη και περιοδική αλυσίδα ισχύει παρόμοιο αποτέλεσμα.* □

Ορισμος 56 (Σύνολα Κυκλικής Μετάβασης) *Διαλέγουμε $i \in C$ (το C είναι αδιαχώριστο σύνολο καταστάσεων) και ορίζουμε τα σύνολα, τα οποία ονομάζονται* **σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση** i,

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \{j \in C: \text{ αν } P_{ij}^n > 0 \text{ τότε } n \equiv 0 \mod d\} \\
C_1 &= \{j \in C: \text{ αν } P_{ij}^n > 0 \text{ τότε } n \equiv 1 \mod d\} \\
&\vdots \\
C_{d-1} &= \{j \in C: \text{ αν } P_{ij}^n > 0 \text{ τότε } n \equiv d-1 \mod d\}
\end{aligned}
$$

Τα σύνολα αυτά είναι ξένα μεταξύ τους και τέτοια ώστε

$$C = \bigcup_{j=0}^{d-1} C_j$$

Προφανώς $i \in C_0$ διότι αν $P_{ii}^n > 0$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ τότε σίγουρα ο d διαιρεί ακριβώς το n, δηλαδή εδώ $b = 0$.

Ισχύει το επόμενο θεώρημα το οποίο περιγράφει την κίνηση της Μαρκοβιανής αλυσίδας σε μια τέτοια περίπτωση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 57 *Έστω C αδιαχώριστο σύνολο καταστάσεων και $i, k, j \in C$. Έστω $C_0, C_1, \cdots, C_{d-1}$ τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση i. Αν $k \in C_t$ και $P_{kj} > 0$ όπου $j \in C$ τότε αναγκαστικά $j \in C_{t+1}$ όπου $C_d = C_0$. Αυτό σημαίνει ότι αν η Μαρκοβιανή αλυσίδα βρεθεί στο σύνολο C_t τότε για όσο χρονικό διάστημα παραμείνει στο σύνολο C θα ακολουθεί την πορεία $C_t \to C_{t+1} \to C_{t+2} \cdots$. Στην περίπτωση όπου το C έχει πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων m ισχύει ότι $d \leq m$.*

Σε ένα αδιαχώριστο σύνολο καταστάσεων η κατασκευή των συνόλων κυκλικής μετάβασης μπορεί να μας οδηγήσει στον υπολογισμό της περιόδου των καταστάσεων αυτών όπως θα δούμε στα επόμενα παραδείγματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 58 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνα-*

κα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και επομένως μπορούμε να κατασκευάσουμε τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση, για παράδειγμα, την κατάσταση 1.

Ξεκινάμε βάζοντας την κατάσταση 1 στο σύνολο C_0. *Δηλαδή,* $C_0 = \{1, \cdots, \}$. *Στην συνέχεια βάζουμε στο σύνολο* C_1 *όλες τις καταστάσεις με τις οποίες επικοινωνεί η 1 σε ένα βήμα. Αρα* $C_1 = \{3, 5, \cdots\}$. *Έπειτα, στο σύνολο* C_2 *βάζουμε τις καταστάσεις με τις οποίες οι 3 και 5 επικοινωνούν σε ένα βήμα. Α-ρα,* $C_2 = \{2, \cdots, \}$. *Από την κατάσταση 2 η αλυσίδα μεταβαίνει σε ένα βήμα στις 1,4,6. Επομένως, συμπληρώνουμε τις 4,6 στο σύνολο* C_0. *Στην συνέχεια* *διαπιστώνουμε ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα μεταβαίνει από το σύνολο* C_0 *στο* C_1 *και έπειτα στο* C_2. *Αρα τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση 1 είναι τα*

$$\begin{aligned} C_0 &= \{1,4,6\} \\ C_1 &= \{3,5\} \\ C_2 &= \{2\} \end{aligned}$$

Έτσι, τα n για τα οποία $P_{ii}^n > 0$ *είναι σίγουρα πολλαπλάσια του 3. Για να αποδείξουμε ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης είναι ακριβώς 3 αρκεί να βρούμε μια κατάσταση i τέτοια ώστε να υπάρχει θετική πιθανότητα να επανέλθει η αλυσίδα σε 3 βήματα. Ας κοιτάξουμε για παράδειγμα την πιθανότητα* P_{11}^3. *Από την κατάσταση 1 θα μεταβεί σίγουρα στην 3 ή στην 5 και από κει σίγουρα στην 2. Από την 2 με πιθανότητα* $1/3$ *θα γυρίσει στην 1. Αρα, η πιθανότητα* $P_{11}^3 > 0$ *διότι για παράδειγμα μπορεί η αλυσίδα να ακολουθήσει το μονοπάτι* $1 \to 3 \to 2 \to 1$. *Ακόμη ευκολότερο είναι το συμπέρασμα κοιτώντας την κατάσταση 2 για την οποία είναι σίγουρο (δηλαδή με πιθανότητα 1) ότι η αλυσίδα* *θα επανέλθει σε 3 βήματα.* □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 59 *Αν κοιτάξουμε την Μαρκοβιανή αλυσίδα του περιπατητή με βάση την κατάσταση 1 κατασκευάζουμε τα σύνολα*

$$\begin{aligned} C_0 &= \{1,3\} \\ C_1 &= \{2,4\} \end{aligned}$$

Επομένως, ξεκινώντας από το σύνολο C_0 η αλυσίδα σίγουρα θα μεταβεί στο C_1 και έπειτα στο C_0 κ.τ.λ. Παρομοίως, διαπιστώνουμε ότι η περιοδικότητα είναι ίση με 2. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 60 *Κατασκευάζοντας τα σύνολα κυκλικής μετάβασης του τυχαίου περιπάτου με βάση την κατάσταση 0 για παράδειγμα διαπιστώνουμε ότι*

$$\begin{aligned} C_0 &= \{0,2,-2,\cdots,2k,-2k,\cdots\} \\ C_1 &= \{1,-1,\cdots,2k+1,-(2k+1),\cdots\} \end{aligned}$$

Παρομοίως εξάγουμε το συμπέρασμα ότι ο τυχαίος περίπατος είναι περιοδική αλυσίδα με περίοδο 2. Εύκολα *προκύπτει το ίδιο συμπέρασμα μιας και γνωρίζουμε τις πιθανότητες μετάβασης* P_{ii}^n *τις οποίες έχουμε υπολογίσει στο θεώρημα 22.* □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 61 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι οι καταστάσεις 2,3,4,5 συνεπικοινωνούν και είναι μεταβατικές αφού υπάρχει θετική πιθανότητα να απορροφηθούν στην 1 η οποία είναι απορροφητική κατάσταση (και άρα απεριοδική). Το σύνολο λοιπόν $C = \{2, 3, 4, 5\}$ *είναι αδιαχώριστο (αλλά όχι κλειστό). Το σύνολο αυτό μπορούμε να το χωρίσουμε σε σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάστα-*

ση 2 ως εξής

$$\begin{aligned} C_0 &= \{2,4\} \\ C_1 &= \{3,5\} \end{aligned}$$

Δηλαδή, για όσο χρονικό διάστημα η αλυσίδα παραμένει στο σύνολο C θα έχει την εξής πορεία $\cdots C_0 \to C_1 \to C_0 \to \cdots$. Για να υπολογίσουμε την κοινή περίοδο των καταστάσεων του συνόλου C παρατηρούμε ότι το σύνολο των ακεραίων $\{n \in \mathbb{N} : P_{22}^n > 0\}$ περιέχει μονάχα άρτιους αριθμούς. Επιπλέον, ο αριθμός 2 ανήκει σε αυτό το σύνολο των ακεραίων αφού $P_{22}^2 > 0$ άρα ο μέγιστος κοινός διαιρέτης του συνόλου είναι το 2. Η κοινή λοιπόν περίοδος των καταστάσεων $\{2,3,4,5\}$ είναι $d = 2$. $\square$

Εύρεση Περιόδου Καταστάσεων

Γενικότερα, είναι χρήσιμο να αναλύσουμε την αλυσίδα στο σύνολο των μεταβατικών και στην ένωση κλειστών και αδιαχώριστων συνόλων που περιέχουν επαναληπτικές καταστάσεις. Όσον αφορά την περιοδικότητα των μεταβατικών καταστάσεων ίσως είναι αρκετά χρήσιμο το λήμμα 49 και άρα η εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη του συνόλου $\{n \in \mathbb{N} : f_n(i|i) > 0\}$ όπου i είναι μεταβατική κατάσταση. Σημειώστε ότι δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε την ακριβή τιμή της $f_n(i|i)$ αλλά μόνο εάν είναι θετική ή όχι. Εν γένει, ο ακριβής υπολογισμός της πιθανότητας αυτής είναι αρκετά δύσκολη υπόθεση. Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε τα σύνολα κυκλικής μετάβασης των αδιαχώριστων συνόλων που αποτελούνται από μεταβατικές καταστάσεις.

Για την περιοδικότητα των επαναληπτικών καταστάσεων θα εργαστούμε στο κλειστό και αδιαχώριστο σύνολο στο οποίο ανήκει η κάθε κατάσταση. Σε κάθε τέτοιο σύνολο ίσως είναι προτιμότερο να δοκιμάσουμε πρώτα την κατασκευή των συνόλων κυκλικής μετάβασης για την εύρεση της περιοδικότητας κάθε κατάστασης του συνόλου (αφού έχουν την ίδια περίοδο).

0.1.1 Παραδείγματα

• Ας εξετάσουμε την Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

και σύνολο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Είναι φανερό ότι

$$S = \underbrace{\overbrace{\{7, 8\}}^{T}}_{\text{μεταβατικές καταστάσεις}} \cup \underbrace{\overbrace{\{1, 2, 3\}}^{C_1} \cup \overbrace{\{4, 5, 6\}}^{C_2}}_{\text{κλειστά σύνολα επαναληπτικών καταστάσ}}$$

Οι καταστάσεις 7 και 8 συνεπικοινωνούν άρα έχουν την ίδια περίοδο. Επομένως θα υπολογίσουμε την περίοδο της κατάστασης 7 εξετάζοντας το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : f_n(7|7) > 0\}$. Εύκολα βλέπουμε ότι $f_1(7|7) = 0$, $f_2(7|7) > 0$ και $f_m(7|7) = 0$ για $m \geq 3$ συνεπώς η περίοδος των 7 και 8 είναι $d = 2$.

Στην συνέχεια εξετάζουμε τα σύνολα C_1 και C_2 τα οποία είναι κλειστά και αδιαχώριστα. Θεωρούμε τις Μαρκοβιανές αλυσίδες X_n, Y_n με σύνολο καταστάσεων C_1 και C_2 αντίστοιχα και πίνακες μετάβασης τους αντίστοιχους υποπίνακες του πίνακα P. Δηλαδή η αλυσίδα X_n θα έχει σύνολο καταστάσεων τις $1, 2, 3$ και πίνακα μετάβασης τον

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

ενώ η Y_n θα έχει σύνολο καταστάσεων τις $4, 5, 6$ και πίνακα μετάβασης τον

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Για να υπολογίσουμε την κοινή περίοδο των καταστάσεων 1,2,3 θα κατασκευάσουμε τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση 1. Εύκολα καταλήγουμε στα σύνολα $K_0 = \{1, 2\}$ και $K_1 = \{3\}$. Εφόσον ένα σύνολο από αυτά είναι μονοσύνολο και το πλήθος των συνόλων είναι 2 ισχύει ότι η περίοδος των καταστάσεων είναι 2.

Αν δοκιμάσουμε να κατασκευάσουμε τα σύνολα κυκλικής μετάβασης για το κλειστό και αδιαχώριστο σύνολο $\{4, 5, 6\}$ θα δούμε ότι καταλήγουμε σε ένα σύνολο. Αυτό σημαίνει ότι οι καταστάσεις είναι απεριοδικές. Μπορούμε να το επιβεβαιώσουμε υπολογίζοντας τον μέγιστο κοινό διαιρέτη του συνόλου $\{n \in \mathbb{N} : f_n(4|4) > 0\}$. Βλέπουμε ότι $f_1(4|4) = 0$, $f_2(4|4) > 0$ και $f_3(4|4) > 0$ επομένως ο μέγιστος κοινός διαιρέτης είναι $d = 1$.

• Θα εξετάσουμε την Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Βλέπουμε ότι οι καταστάσεις $\{1, 2, 3\}$ συνεπικοινωνούν. Οι καταστάσεις αυτές είναι απεριοδικές αφού $f_1(1|1) = 0$, $f_2(1|1) > 0$ και $f_3(1|1) > 0$. Η κατάσταση 4 είναι μεταβατική αφού υπάρχει θετική πιθανότητα να απορροφηθεί στο κλειστό σύνολο $\{1, 2, 3\}$ και να μην επιστρέψει όταν η αλυσίδα έχει ξεκινήσει από την 4. Όσον αφορά την περιοδικότητα της 4 διαπιστώνουμε ότι $\{n \in \mathbb{N} : f_n(4|4) > 0\} = \emptyset$ επομένως μπορούμε να πούμε ότι έχει περίοδο $d = \infty$.

• Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με σύνολο καταστάσεων το $S = \{1, 2, 3, \cdots\}$ και τέτοια ώστε

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{όταν } j = i+1 \quad \text{ή} \quad j = i+2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

όπου $i \in S$. Διαπιστώνουμε ότι όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές και όσον αφορά την περίοδο έχουμε ότι $d = \infty$ για κάθε κατάσταση του S.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 62 *Έστω ότι η κατάσταση i είναι περιοδική με περίοδο d. Συνδυάζοντας το θεώρημα ;; με το συμπέρασμα ;; προκύπτει ότι το σύνολο $A = \{n \in \mathbb{N} : P_{ii}^n > 0\}$ αποτελείται από όλους τους ακέραιους (και μόνον) της μορφής kd για k αρκετά μεγάλο. Δηλαδή, αν η αλυσίδα ξεκινήσει από την i τότε υπάρχει θετική πιθανότητα να επανέλθει στην i μόνο μετά από ακέραιο πολλαπλάσιο του d πλήθος βημάτων. Το συμπέρασμα αυτό είναι κάτι που διαισθητικά περιμέναμε. Παρόμοια, αν $i \leftrightarrow j$, το σύνολο $A = \{n \in \mathbb{N} : P_{ij}^n > 0\}$ περιέχει όλους τους ακέραιους της μορφής $n = kd + b$ για όλα τα $k \geq k_0$ και μόνον αυτούς. Δηλαδή οι μεταβάσεις από την i στην j έχουν θετική πιθανότητα μόνον σε συγκεκριμένο πλήθος βημάτων.*

Επιπλέον, αν οι καταστάσεις είναι μεταβατικές, τότε οι μη μηδενικές αυτές πιθανότητες συγκλίνουν στο μηδέν (δες θεώρημα 20).

Ως παράδειγμα, ας δούμε την Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι η κατάσταση 1 είναι απορροφητική (άρα απεριοδική) ενώ οι καταστάσεις 2 και 3 μεταβατικές και περιοδικές με περίοδο 2. Συνεπώς, σύμφωνα με τα προηγούμενα, αν η αλυσίδα επισκεφθεί την κατάσταση 2 τότε μόνο σε άρτιο πλήθος βημάτων υπάρχει θετική πιθανότητα να επανέλθει στην 2. Παρόμοια, αν βρεθεί στην κατάσταση 2, υπάρχει θετική πιθανότητα να επισκεφθεί την 3 μόνο σε περιττό πλήθος βημάτων. Πράγματι, εφόσον $P^1_{23} = 1/2 > 0$, *έχουμε ότι* $1 = kd + b$ *και αναγκαστικά* $b = 1$. *Αρα, αν βρεθεί στην 2, υπάρχει θετική πιθανότητα να επισκεφθεί την 3 μονάχα όταν το πλήθος βημάτων έχει την μορφή*

$n = 2k+1$. Επιπλέον, επειδή οι καταστάσεις 2 και 3 είναι μεταβατικές, οι πιθανότητες P^n_{i2} και P^n_{i3} συγκλίνουν στο μηδέν (όταν δεν είναι ήδη μηδέν) για $i = 1, 2, 3$.

Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε τα συμπεράσματα αυτά υπολογίζοντας την νιοστή δύναμη του πίνακα η οποία είναι

$$P^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - \frac{1}{2^n} & \frac{(-1)^n+1}{2^{n+1}} & \frac{(-1)^{n+1}+1}{2^{n+1}} \\ 1 - \frac{1}{2^n} & \frac{(-1)^{n+1}+1}{2^{n+1}} & \frac{(-1)^n+1}{2^{n+1}} \end{bmatrix}$$

Διαπιστώνουμε ότι πράγματι, οι P^n_{i2} και P^n_{i3} για $i = 1, 2, 3$ συγκλίνουν στο μηδέν. Επίσης, η P^n_{22} είναι θετική μονάχα όταν το n είναι άρτιο και επιπλέον η P^n_{23} είναι θετική μονάχα όταν το n είναι περιττό.

Αλλο ένα παράδειγμα είναι η Μαρκοβιανή αλυσίδα *με πίνακα μετάβασης τον*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι η κατάσταση 1 είναι απορροφητική και όλες οι υπόλοιπες είναι μεταβατικές. Επιπλέον, το σύνολο $C = \{2, 3, 4, 5\}$ *είναι αδιαχώριστο (αλλά όχι κλειστό). Μπορούμε το σύνολο αυτό να το χωρίσουμε σε σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση 2 ως εξής*

$$\begin{aligned} C_0 &= \{2\} \\ C_1 &= \{3\} \\ C_2 &= \{4, 5\} \end{aligned}$$

Δηλαδή για όσο παραμένει η αλυσίδα στο σύνολο C *θα ακολουθεί υποχρεωτικά μια συγκεκριμένη πορεία* $\cdots C_0 \to C_1 \to C_2 \to C_0 \cdots$. *Με αυτό τον τρόπο* *γνωρίζουμε ότι το σύνολο των ακεραίων* $\{n \in \mathbb{N} : P_{22}^n > 0\}$ *περιέχει μονάχα πολλαπλάσια του 3. Επειδή όμως* $P_{22}^3 > 0$ $(2 \to 3 \to 4 \to 2)$ *έπεται ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης είναι το 3. Αρα η κοινή περίοδος των καταστάσεων* $\{2, 3, 4, 5\}$ *είναι ο* $d = 3$. *Σύμφωνα με τα προηγούμενα αυτό σημαίνει ότι αν η αλυσίδα επισκεφθεί την κατάσταση 2 τότε υπάρχει θετική πιθανότητα να επισκεφθεί την 4 σε πλήθος βημάτων της μορφής* $n = 3k + b$. *Μένει να υπολογίσουμε το* b. *Παρατηρούμε ότι* $P_{24}^2 > 0$ $(2 \to 3 \to 4)$ *και επομένως ο αριθμός 2 θα έχει την μορφή* $2 = 3k + b$. *Αυτό συμβαίνει μονάχα όταν* $k = 0$ *και* $b = 2$. *Αρα λοιπόν υπάρχει θετική πιθανότητα η αλυσίδα να μεταβεί από την 2 στην 4 μονάχα σε* $n = 3k + 2$ *πλήθος βημάτων, δηλαδή* $P_{24}^{3k+2} > 0$ *για κάθε* k *αρκετά μεγάλο ενώ* $P_{24}^n = 0$ *όταν* $n \neq 3k + 2$.

Ας δούμε ακόμη ένα παράδειγμα Μαρκοβιανής αλυ-

σίδας με πίνακα μετάβασης τον

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Διαπιστώνουμε ότι η κατάσταση 1 είναι απορροφητική και όλες οι υπόλοιπες είναι μεταβατικές. Όμως τα σύνολα $C = \{2, 3, 4, 5\}$ *και* $V = \{6, 7, 8\}$ *είναι αδιαχώριστα (αλλά όχι κλειστά). Το σύνολο* C *μπορεί να χωρισθεί σε τρία σύνολα κυκλικής μετάβασης ως εξής,*

$$\begin{aligned} C_0 &= \{2\} \\ C_1 &= \{3\} \\ C_2 &= \{4, 5\} \end{aligned}$$

και όπως πριν αποδεικνύεται ότι το σύνολο C *είναι περιοδικό με περίοδο 3. Παρόμοια, το σύνολο* V *μπορεί να χωρισθεί σε δυο σύνολα κυκλικής μετάβασης ως εξής*

$$\begin{aligned} V_0 &= \{6\} \\ V_1 &= \{7, 8\} \end{aligned}$$

και να αποδειχθεί ότι το σύνολο V *είναι περιοδικό με περίοδο 2.*

Δηλαδή, αν η αλυσίδα ξεκινήσει από μια κατάσταση του συνόλου C *τότε (όσο παραμένει σε αυτό το σύνολο) θα κινείται ως εξής* $\cdots C_0 \to C_1 \to C_2 \to C_0 \cdots$. *Αν ξεκινήσει από το σύνολο* V *θα κινείται ως εξής (για όσο παραμένει στο* V*)* $\cdots V_0 \to V_1 \to V_0 \cdots$. $\square$

Πιθανότητες και χρόνοι πρώτης εισόδου

ΟΡΙΣΜΟΣ 63 *Έστω X_n μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης P. Ο χρόνος πρώτης εισόδου ενός συνόλου $A \subseteq S$ είναι μια τυχαία μεταβλητή $H^A : \Omega \to \{0, 1, 2, 3, \cdots\} \cup \{\infty\}$ η οποία δίνεται από*

$$H^A(\omega) = \min\{n \geq 0 : X_n(\omega) \in A\},$$

και ορίζουμε το $\min \emptyset = \infty$. Συμβολίζουμε την πιθανότητα να εισέλθει κάποτε η Μαρκοβιανή αλυσίδα στο σύνολο A δεδομένου ότι ξεκινά από την κατάσταση i, με

$$h_i^A = P(H^A < \infty | X_0 = i)$$

Όταν το A είναι κλειστό τότε η h_i^A ονομάζεται **πιθανότητα απορρόφησης**.
*Η δεσμευμένη μέση τιμή του απαιτούμενου χρόνου (***χρόνος πρώτης εισόδου***) για να εισέλθει η Μαρκοβιανή αλυσίδα στο A δεδομένου ότι ξεκίνησε από την κατάσταση i είναι*

$$y_i^A = \mathbb{E}_i(H^A) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(H^A = n | X_0 = i)$$

όταν $P(H^A < +\infty | X_0 = i) = 1$ αλλιώς $+\infty$.

Ο υπολογισμός των παραπάνω ποσοτήτων γίνεται, γενικότερα, με την βοήθεια των επόμενων θεωρημάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 64 *Οι* **πιθανότητες πρώτης εισόδου** *(ή πιθανότητες πρώτης επίσκεψης)* h_i^A *με* $A \subseteq S$ *δίνονται από την ελάχιστη μη αρνητική λύση του συστήματος,*

$$\begin{aligned} h_i^A &= 1, & \text{όταν} \quad i \in A, \\ h_i^A &= \sum_{j \in S} P_{ij} h_j^A, & \text{όταν} \quad i \notin A. \end{aligned}$$

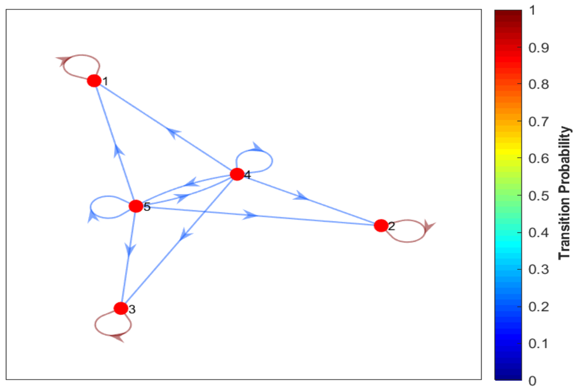
Ελάχιστη εδώ εννοούμε ότι αν x_i *είναι μια άλλη λύση των παραπάνω εξισώσεων τότε* $x_i \geq h_i$ *για κάθε* i*.*

Προφανώς το σύνολο A μπορεί να είναι και μονοσύνολο οπότε σε αυτή την περίπτωση μιλάμε για την πιθανότητα **επίσκεψης** στην κατάσταση i ξεκινώντας από την κατάσταση j (αρκεί $i \neq j$) και την συμβολίζουμε με h_j^i (αλλά και με f_{ij} δες παρατήρηση 23). Ο υπολογισμός τέτοιων πιθανοτήτων θα είναι ιδιαίτερα χρήσιμος αργότερα για τον υπολογισμό των οριακών πιθανοτήτων μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 65 *Λόγω του θεωρήματος 25 αν* $i \leftrightarrow j$ *και* i, j *επαναληπτικές τότε* $h_i^j = f_{ij} = 1$ *(όταν* $i \neq j$*) ενώ αν* $i \nrightarrow j$ *τότε* $h_i^j = f_{ij} = 0$. *Μπορούμε λοιπόν να αντικαταστήσουμε αυτές τις πιθανότητες στις εξισώσεις του προηγούμενου θεωρήματος εκ των προτέρων για να αποφύγουμε μερικούς υπολογισμούς. Έτσι, αν* A *είναι ένα κλειστό και αδιαχώριστο σύνολο επαναληπτικών καταστάσεων και* $j \in A$ *τότε* $h_i^j = h_i^A$ *για οποιαδήποτε* $i \in S$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 66 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$



Σχήμα 6: Το γράφημα της αλυσίδας του παραδείγματος 66

Οι καταστάσεις 1,2,3 είναι απορροφητικές ενώ οι 4,5 μεταβατικές. Θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες απορρόφησης στην κατάσταση 1 χρησιμοποιώντας το θεώρημα 64. Λύνοντας τις αντίστοιχες εξισώσεις προκύπτει το εξής διάνυσμα λύσεων

$$\left(1, h_2^1, h_3^1, 1/3 + 1/3(h_2^1 + h_3^1), 1/3 + 1/3(h_2^1 + h_3^1)\right)$$

οπότε οι ζητούμενες πιθανότητες βρίσκονται ελαχιστοποιώντας το παραπάνω διάνυσμα διαλέγοντας h_2^1 *και* h_3^1 *να είναι μηδέν, οπότε η λύση είναι*

$$(1, 0, 0, 1/3, 1/3)$$

□

Έστω $A, B \subseteq S$ με $A \cap B = \emptyset$. Μας ενδιαφέρει η πιθανότητα η αλυσίδα να ξεκινήσει από την κατάσταση i και να επισκεφτεί πρώτα το σύνολο A πριν από το σύνολο B. Ισχύει το παρακάτω θεώρημα για αυτές τις πιθανότητες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 67 *Έστω $A, B \subseteq S$. Συμβολίζουμε με $F_i = P(H^A < H^B | X_0 = i)$ όπου $A \cap B = \emptyset$. Τότε οι πιθανότητες F_i ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις*

$$\begin{aligned} F_i &= 0 \text{ όταν } i \in B \\ F_i &= 1 \text{ όταν } i \in A \\ F_i &= \sum_{j \in S} P_{ij} F_j \text{ όταν } i \in S \setminus (A \cup B) \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που το παραπάνω σύστημα δεν έχει μοναδική λύση τότε οι πιθανότητες F_i αποτελούν την μικρότερη θετική λύση του συστήματος.

Για την απόδειξη του θεωρήματος αυτού μπορεί να δει κανείς το On the absorption probabilities and mean time for absorption for discrete Markov chains.

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε την μέση τιμή του χρόνου πρώτης εισόδου. Εφόσον η H^A μπορεί να πάρει την τιμή $+\infty$ τότε

$$y_i = \mathbb{E}_i(H^A) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(H^A = n|X_0 = i) + \infty \cdot P(H^A = +\infty|X_0 = i)$$

Επομένως όταν $P(H^A = +\infty|X_0 = i) > 0$ τότε $y_i = +\infty$. Συμβολίζοντας με $k_i = \sum_{n=1}^{\infty} nP(H^A = n|X_0 = i)$ έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα.

ΛΗΜΜΑ 68 *Έστω ότι υπάρχει κάποια κατάσταση $q \in S$ τέτοια ώστε*

$$k_q^A = \sum_{n=1}^{\infty} nP(H^A = n|X_0 = q) = \infty$$

Τότε $k_j^A = \infty$ για οποιαδήποτε κατάσταση j τέτοια ώστε $P_{jq} > 0$.

Θέτουμε $T \subseteq S$ το υποσύνολο του S το οποίο είναι τέτοιο ώστε $h_i^A > 0$ για κάθε $i \in T$. Έχουμε το παρακάτω θεώρημα που αφορά τους αριθμούς k_i.

ΘΕΩΡΗΜΑ 69 *Το διάνυσμα k_i^A αποτελεί μια λύση του παρακάτω συστήματος*

$$\begin{aligned} k_i^A &= 0, && \text{όταν} \quad i \in A, \\ k_i^A &= 1 + \sum_{j \notin A} P_{ij} k_j^A, && \text{όταν} \quad i \in T \setminus A. \end{aligned}$$

Αν το παραπάνω σύστημα δεν επιδέχεται μη αρνητική λύση και ταυτόχρονα όλες οι μεταβατικές συνεπικοινωνούν τότε $k_i^A = \infty$ για κάθε $i \in T$ ενώ αν επιδέχεται λύση τότε οι k_i^A είναι πεπερασμένοι και επομένως αποτελούν μια λύση του συστήματος.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 70 *Αν $P(H^A < +\infty | X_0 = i) = 1$ τότε στην πραγματικότητα έχουμε ότι $k_i = y_i$ ενώ αν $k_i = +\infty$ τότε προφανώς και $y_i = +\infty$ αφού πάντοτε ισχύει ότι $k_i \leq y_i$ και μάλιστα σε μερικές περιπτώσεις η ανισότητα είναι αυστηρή.* $\square$

Έστω $q \subseteq S$ και έστω $G_i(x) = G_i^q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(H^q = n | X_0 = i) x^n$. Συμβολίζουμε με $T \subseteq S$ το υποσύνολο των καταστάσεων που επικοινωνούν με το q, δηλαδή $h_l^q > 0$ για κάθε $l \in T$.

Στο επόμενο θεώρημα θα δώσουμε το σύστημα εξισώσεων που ικανοποιούν οι συναρτήσεις $G_i(x)$. Το σύστημα αυτό ενδέχεται να μην έχει μοναδική λύση. Όμως η λύση που ψάχνουμε, δηλαδή η $G_i(x)$, αναλύεται σε σειρά Taylor στο διάστημα $(-1, 1)$ και αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό που ίσως χρειαστεί έτσι ώστε να την ξεχωρίσουμε από τις υπόλοιπες λύσεις του συστήματος. Σημειώνοντας ότι $G_i(x) \geq 0$ για $x \in (0, 1)$ προκύπτει ένα σημαντικότερο χαρακτηριστικό, δηλαδή ότι είναι η ελάχιστη λύση με την έννοια που περιγράφει το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 71 (Κατανομή Χρόνου Απορρόφησης) *Οι παρακάτω εξισώσεις επιδέχονται τουλάχιστον μια λύση*

$$\begin{aligned} r_i(x) &= 1, \quad i \in q \\ r_i(x) &= x \sum_{j \in T} P_{ij} r_j(x), \quad i \in \hat{T} = T \setminus q \end{aligned}$$

και μια από αυτές είναι η συνάρτηση $G_i(x)$. Αν υπάρχουν λύσεις $r_i(x)$ του παραπάνω συστήματος τέτοιες *ώστε* $r_i(x) > 0$ *για* $x \in I$ *με* $(0,1) \subseteq I$ *τότε* $r_i(x) \geq G_i(x)$ *για* $x \in I$, *για οποιαδήποτε τέτοια λύση που αναλύεται σε σειρά Taylor γύρω από το 0 με διάστημα απόλυτης σύγκλισης το* $(-1,1)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 72 *Έστω ο απλός τυχαίος περίπατος (δηλαδή χωρίς εμπόδια) με* $P_{i,i+1} = p$ *και* $P_{i,i-1} = q$. *Θα υπολογίσουμε την συνάρτηση* $G_i(x)$ *για* $|x| < 1$ *με*

$$G_i(x) = P(H^{\{0\}} = 0|X_0 = i) + \sum_{n=1}^{\infty} P(H^{\{0\}} = n|X_0 = i)x^n, \quad i = 0, 1, 2$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα 71. Οι εξισώσεις που ικανοποιεί είναι

$$\begin{aligned} G_0(x) &= 1 \\ G_i(x) &= xqG_{i-1}(x) + xpG_{i+1}(x), \quad i = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

Πρόκειται για μια εξίσωση διαφορών ως προς την μεταβλητή i *θεωρώντας σταθερό το* x. *Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι*

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}}{2px}, \quad r_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4pqx^2}}{2px}$$

όπου προφανώς $r_2 \geq r_1$ *και* $r_1 > 0$ *για* $x \in (0,1)$. *Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης διαφορών είναι*

$$G_i(x) = A(x)r_1^i + B(x)r_2^i$$

Επειδή $G_0(x) = 1$ *προκύπτει ότι* $A(x) = 1 - B(x)$ *και άρα*

$$G_i(x) = r_1^i + B(x)(r_2^i - r_1^i)$$

Έχουμε άπειρες θετικές λύσεις για $x \in (0,1)$ *αν επιλέξουμε* $B(x) \geq 0$. *Θα επιλέξουμε την ελάχιστη από αυτές η οποία προκύπτει για* $B(x) = 0$. *Αρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι η*

$$\begin{aligned} G_0(x) &= 1, \\ G_i(x) &= \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}}{2px} \right)^i, \quad i = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

για $|x| < 1$. *Ας θυμηθούμε ότι*

$$G_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P(H^{\{0\}} = n | X_0 = i) x^n, \quad i = 1, 2, \cdots$$

Από την θεωρία των σειρών Taylor ισχύει ότι

$$P(H^{\{0\}} = n | X_0 = i) = \frac{G_i^{(n)}(0)}{n!}, \quad i = 1, 2, \cdots$$

δηλαδή για να υπολογίσω την πιθανότητα $P(H^{\{0\}} = n | X_0 = i)$ *για* $i = 1, 2, \cdots$ *θα υπολογίσω την* n*-οστή παράγωγο της* $G_i(x)$ *ως προς* x*, θα θέσω* $x = 0$ *και θα διαιρέσω με* $n!$

Παρόμοια, μπορούμε να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις $G_{-i}(x)$ *για* $i = 1, 2, \cdots$. *Θα έχουμε*

$$\begin{aligned} G_0(x) &= 1 \\ G_{-i}(x) &= xqG_{-i-1}(x) + xpG_{-i+1}(x) \end{aligned}$$

Θέτοντας $W_i(x) = G_{-i}(x)$ *προκύπτει*

$$\begin{aligned} W_0(x) &= 1 \\ W_i(x) &= xpW_{i-1}(x) + xqW_{i+1}(x) \end{aligned}$$

Η λύση τότε θα είναι

$$\begin{aligned} W_0(x) &= 1, \\ W_i(x) &= \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}}{2qx}\right)^i, \quad i = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

για $|x| < 1$. *Δηλαδή για να υπολογίσουμε για παράδειγμα την πιθανότητα* $P(H^{\{0\}} = n|X_0 = -3)$ *θα πρέπει να παραγωγίσουμε* n *φορές την συνάρτηση* $W_3(x)$, *να θέσουμε* $x = 0$ *και να διαιρέσουμε με* $n!$ □

Περισσότερα για μπορεί να βρει κανείς στο άρθρο [;].

Παραδειγμα 73 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αν εφαρμόσουμε το θεώρημα 64 για να υπολογίσουμε τις $h_i^{\{4\}}$ *θα έχουμε,*

$$\begin{aligned} h_4 &= 1, \\ h_2 &= 1/2h_1 + 1/2h_3 \\ h_3 &= 1/2h_2 + 1/2h_4, \end{aligned}$$

οπότε

$$h_2 = 1/3 + 2/3h1, \quad h_3 = 2/3 + 1/3h_1.$$

Διαπιστώνουμε ότι το παραπάνω θεώρημα δεν αναφέρει ακριβώς ποια είναι η τιμή του h_1 *όμως αναφέρει ότι το διάνυσμα* h_i *θα είναι η ελάχιστη μη αρνητική λύση του συστήματος. Αρα μπορούμε να διαλέξουμε* $h_1 = 0$ *και επομένως* $h_2 = 1/3, h_3 = 2/3$. $\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 74 (Τυχαίος Περίπατος με ένα ή δυο απορροφητικά εμπόδια) *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα* X_n *με τιμές στο* $\mathbb{N} \cup \{0\}$ *και* $X_0 = i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Έστω ότι ο πίνακας μετάβασης είναι τ.ω.* $P_{i,i-1} = q, P_{i,i+1} = p$ *για* $i \geq 1$ *ενώ* $P_{00} = 1$ *με* $p + q = 1$ *και* $pq \neq 0$. *Αυτή η αλυσίδα μοντελοποιεί την περίπτωση ενός παίκτη στο καζίνο, όπου σε κάθε παιχνίδι η πιθανότητα να κερδίσει ένα ευρώ είναι* p *και αντίστοιχα η πιθανότητα να χάσει ένα ευρώ είναι* q. *Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι να υπολογίσουμε την* $h_i^{\{0\}}$, *δηλαδή να υπολογίσουμε την πιθανότητα ο παίκτης να ξεκινήσει με* i *ευρώ και να καταλήξει με μηδέν ευρώ. Το παραπάνω θεώρημα μας δίνει τις εξι-*

σώσεις,

$$\begin{aligned} h_0 &= 1, \\ h_i &= p h_{i+1} + q h_{i-1}. \end{aligned}$$

Αν $p \neq q$ *τότε η εξίσωση διαφορών έχει ως λύση την*

$$h_i = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^i, \quad i = 0, 1, 2, \cdots$$

με αυθαίρετες σταθερές τις A, B.

· *Αν* $p < q$ *τότε αφού* $h_i \in [0,1]$ *πρέπει* $B = 0$ *άρα* $h_i = A$ *και επομένως* $A = 1$, *δηλαδή* $h_i = 1$ *για κάθε* $i = 0, 1, 2, \cdots$.

· *Αν* $p > q$ *τότε (αφού* $h_0 = 1$*) έχουμε*

$$h_i = 1 - c\left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i\right)$$

για μια αυθαίρετη σταθερά c. *Η ελάχιστη μη αρνητική λύση του συστήματος προκύπτει όταν* $c = 1$. *Τελικά, όταν* $p > q$ *έχουμε ότι*

$$h_i = \left(\frac{q}{p}\right)^i$$

$\cdot$ *Στην περίπτωση όπου* $p = q$ *η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών είναι* $h_i = A + Bi$. *Αναγκαστικά* $B = 0$ *οπότε όπως πριν πρέπει* $A = 1$ *δηλαδή* $h_i = 1$ *για* $i = 0, 1, 2, \cdots$.

Αυτό σημαίνει ότι ακόμη και αν το παιχνίδι στο καζίνο είναι δίκαιο η πιθανότητα ο παίκτης να χάσει τα χρήματά του είναι 1.

*Αν όμως ο παίκτης αποφασίσει να σταματήσει το παιχνίδι όταν κερδίσει ένα συγκεκριμένο ποσό τότε τα πράγματα αλλάζουν (***τυχαίος περίπατος με δυο απορροφητικά εμπόδια***). Ας υποθέσουμε ότι θα σταματήσει το παιχνίδι όταν κερδίσει* m *ευρώ ή τα χάσει όλα. Τότε κατασκευάζουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων το* $S = \{0, 1, \cdots, m\}$ *και πίνακα μετάβασης τον*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Η αλυσίδα αυτή έχει δυο απορροφητικές καταστάσεις, τις 0 και m. Όλες οι υπόλοιπες καταστάσεις είναι μεταβατικές διότι υπάρχει θετική πιθανότητα να απορροφηθούν σε μια από τις δυο απορροφητικές καταστάσεις. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα απορρόφησης στην κατάσταση m ξεκινώντας από οποιαδήποτε κατάσταση i, δηλαδή θα υπολογίσουμε τις ποσότητες h_i^m. Θα υπολογίσουμε τις ποσότητες αυτές από τις παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} h_m^m &= 1, \quad h_0^m = 0 \\ h_i^m &= (1-p)h_{i-1}^m + p h_{i+1}^m, \quad i = 1, \cdots, m-1 \end{aligned}$$

Για να αποφύγουμε την εφαρμογή της θεωρίας εξισώσεων διαφορών μπορούμε να γράψουμε την αναδρομική σχέση ως εξής

$$(1-p)(h_i^m - h_{i-1}^m) = p(h_{i+1}^m - h_i^m), \quad i = 1, \cdots, m$$

Θέτοντας $\delta_i = h_{i+1}^m - h_i^m$ *έχουμε ότι*

$$\delta_i = \rho \delta_{i-1}, \quad i = 1, \cdots, m-1$$

όπου $\rho = \frac{1-p}{p}$. *Έτσι, εύκολα προκύπτει ότι*

$$\delta_i = \rho^i \delta_0, \quad i = 1, \cdots, m$$

Επειδή

$$\delta_0 + \delta_1 + \cdots + \delta_{m-1} = h_m^m - h_0^m = 1$$

προκύπτει ότι

$$\delta_0 = \frac{1}{1 + \rho + \cdots + \rho^{m-1}}$$

Όμως $h_i^m = \delta_0 + \cdots + \delta_{i-1}$ *και αντικαθιστώντας έχουμε ότι*

$$h_i^m = (1 + \rho + \cdots + \rho^{i-1})\delta_0 = \frac{1 + \rho + \cdots + \rho^{i-1}}{1 + \rho + \cdots + \rho^{m-1}}$$

Τελικά, έχουμε ότι

$$h_i^m = \begin{cases} \frac{1-\rho^i}{1-\rho^m}, & \text{όταν } \rho \neq 1 \\ \frac{i}{m}, & \text{όταν } \rho = 1 \end{cases}$$

Θα υπολογίσουμε στην συνέχεια τους μέσους χρόνους απορρόφησης, ξεκινώντας από τον τυχαίο περίπατο με δυο απορροφητικά εμπόδια όπου η αλυσίδα έχει πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων. Σύμφωνα με το θεώρημα 69 *οι* k_i *θα ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις*

$$\begin{aligned} k_0 &= k_m = 0 \\ k_i &= 1 + (1-p)k_{i-1} + pk_{i+1}, \quad i = 1, 2, \cdots, m-1 \end{aligned}$$

Όπως βλέπουμε πρόκειται για μια μη ομογενή εξίσωση διαφορών. Είναι ισοδύναμη με την ;; (του παραδείγματος ;;). Η λύση της, όταν $p \neq \frac{1}{2}$ *είναι η ;; ενώ όταν* $p = \frac{1}{2}$ *είναι η ;;. Στην περίπτωση* $p \neq \frac{1}{2}$ *χρησιμοποιώντας τις συνθήκες* $k_0 = k_m = 0$ *προκύπτει ότι*

$$C = -A = \frac{mp^m}{(1-2p)(p^m - (1-p)^m)}$$

ενώ στην περίπτωση $p = \frac{1}{2}$ *προκύπτει ότι* $A = 0$ *και* $B = m$. *Δηλαδή στον τυχαίο περίπατο με δυο απορροφητικά εμπόδια έχουμε*

$$k_n = \begin{cases} \frac{n}{1-2p} + \frac{mp^m}{(1-2p)(p^m-(1-p)^m)}\left(\frac{(1-p)^n}{p^n} - 1\right), & \text{όταν } p \neq \frac{1}{2} \\ n(m-n), & \text{όταν } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Στην προκειμένη περίπτωση επειδή $P(H^{\{0,m\}} < +\infty | X_0 = i) = 1$ *οι* k_i *που υπολογίσαμε είναι οι μέσοι χρόνοι απορρόφησης.*

Θα υπολογίσουμε στην συνέχεια τους μέσους χρόνους απορρόφησης στον τυχαίο περίπατο με ένα απορροφητικό εμπόδιο. Αν $p \neq \frac{1}{2}$ *τότε η λύση όπως είδαμε είναι* *η*

$$k_n = A + \frac{n}{1-2p} + C\frac{(1-p)^n}{p^n}$$

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη $k_0 = 0$ *προκύπτει ότι*

$$k_n = \frac{n}{1-2p} + C\left(\frac{(1-p)^n}{p^n} - 1\right)$$

Αν $p < \frac{1}{2}$ *(οπότε και* $h_i^{\{0\}} = 1$*) οι μέσοι χρόνοι απορρόφησης θα δίνονται διαλέγοντας* $C = 0$ *οπότε θα είναι*

$$k_n = \frac{n}{1-2p}, \quad p < \frac{1}{2}$$

Αν $p > \frac{1}{2}$ *δεν υπάρχει σταθερά* $C \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε η* k_n *να είναι θετική για κάθε* $n \in \mathbb{N}$*. Αυτό σημαίνει ότι στην περίπτωση αυτή οι μέσοι χρόνοι απορρόφησης είναι ίσοι με άπειρο. Παρόμοια και στην περίπτωση* $p = \frac{1}{2}$.

Τελικά στον τυχαίο περίπατο με ένα απορροφητικό εμπόδιο θα έχουμε

$$k_n = \begin{cases} \frac{n}{1-2p}, & \text{όταν } p < \frac{1}{2} \\ \infty, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 75 (Απλός Τυχαίος Περίπατος) *Σε αυτό το παράδειγμα θα μελετήσουμε πάλι τον τυχαίο περίπατο, χωρίς εμπόδια, ο οποίος ξεκινά από το* 0, *δηλαδή* $X_0 = 0$. *Επίσης υποθέτουμε ότι* $P(X_{n+1} = i+1|X_n = i) = p$ *και* $P(X_{n+1} = i-1|X_n = i) = 1-p$ *όπου* $p > \frac{1}{2}$. *Ξεκινώντας από το μηδέν, ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι ποιος είναι ο μέσος όρος βημάτων για να μεταβεί στην κατάσταση* $m > 0$ *αφού σε αυτή την περίπτωση είναι βέβαιο ότι θα συμβεί αυτή η μετάβαση κάποτε. Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό θα πρέπει να υπολογίσουμε τους* k_i^m *για όλα τα* $i \leq m$. *Οι εξισώσεις που ικανοποιούν είναι οι παρακάτω*

$$\begin{aligned} k_m^m &= 0 \\ k_i^m &= 1 + (1-p)k_{i-1}^m + pk_{i+1}^m \end{aligned}$$

Η εξίσωση διαφορών έχει ως λύση την

$$k_i^m = A + \frac{i}{1-2p} + C\frac{(1-p)^i}{p^i}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $k_m^m = 0$ *προκύπτει ότι*

$$k_i^m = \frac{m-i}{2p-1} + C\left(\frac{(1-p)^i}{p^i} - \frac{(1-p)^m}{p^m}\right)$$

Οι ζητούμενοι μέσοι χρόνοι είναι η μικρότερη μη αρνητική λύση των εξισώσεων η οποία λαμβάνεται όταν $C = 0$. *Δηλαδή*

$$k_i^m = \frac{m-i}{2p-1}$$

και ειδικότερα ο μέσος χρόνος για να μεταβεί από την κατάσταση μηδέν στην $m > 0$ *είναι*

$$k_0^m = \frac{m}{2p-1}$$

Αν $m < i$ *τότε οι εξισώσεις δεν επιδέχονται μη αρνητική λύση (αφού δεν υπάρχει κατάλληλη σταθερά* $C \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $k_i^m \geq 0$ *για κάθε* $i \in (m, +\infty)$*) το οποίο σημαίνει ότι οι μέσοι χρόνοι είναι ίσοι με το άπειρο. Δηλαδή ξεκινώντας από το μηδέν κατά μέσο όρο θα χρειαστούν άπειρα βήματα για να φτάσει στην αμέσως προηγούμενη κατάσταση, δηλαδή την* $m = -1$.

Ας δούμε και την περίπτωση $p = \frac{1}{2}$. *Στην περίπτωση αυτή η λύση των εξισώσεων θα έχει την μορφή*

$$k_i^m = A + Bi - i^2, \quad \text{για όλα τα } i \leq m$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $k_m^m = 0$ *προκύπτει ότι*

$$k_i^m = (m - i)(m + i - B), \quad \text{για όλα τα } i \leq m$$

Οι ζητούμενοι μέσοι χρόνοι είναι η μικρότερη μη αρνητική λύση των εξισώσεων. Όμως δεν υπάρχει τέτοια λύση καθώς δεν μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλο $B \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $k_i^m \geq 0$ *για όλα τα* $i \in (-\infty, m)$. *Αρα* $k_i^m = \infty$ *και πιο συγκεκριμένα σημαίνει ότι στον συμμετρικό τυχαίο περίπατο ο μέσος χρόνος βημάτων για να μεταβεί από την κατάσταση 0 στην 1 είναι ίσος με το άπειρο. Χρησιμοποιώντας κατάλληλα το θεώρημα ;; διαπιστώνουμε ότι ο μέσος χρόνος επαναφοράς* $m_0 = \infty$ *για κάθε* $p \in (0, 1)$ *και επομένως όλες οι καταστάσεις είναι μηδενικά επαναληπτικές όταν είναι επαναληπτικές.*

Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζει το ερώτημα: ποια είναι η πιθανότητα, ξεκινώντας από το 0, να μεταβεί στην κατάσταση j.

Έστω ότι $p < \frac{1}{2}$. *Θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες* h_i^j *με* $i \leq j$, *δηλαδή την πιθανότητα να μεταβεί από την κατάσταση* i *στην* j. *Οι πιθανότητες αυτές ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις*

$$\begin{aligned} h_j^j &= 1 \\ h_i^j &= (1-p)h_{i-1}^j + p h_{i+1}^j \end{aligned}$$

Η λύση των εξισώσεων έχει την μορφή

$$h_i^j = A + B\frac{(1-p)^i}{p^i}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $h_j^j = 1$ *προκύπτει ότι*

$$h_i^j = 1 + B\left(\frac{(1-p)^i}{p^i} - \frac{(1-p)^j}{p^j}\right)$$

Οι ζητούμενες πιθανότητες είναι η ελάχιστη μη αρνητική λύση των εξισώσεων οι οποίες δίνονται επιλέγοντας $B = \frac{p^j}{(1-p)^j}$. *Δηλαδή*

$$h_i^j = \frac{p^{j-i}}{(1-p)^{j-i}}, \qquad \text{για κάθε } i \leq j$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα και h_i^j όταν $j \leq i$. Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με την διαφορά ότι η ελάχιστη μη αρνητική λύση των εξισώσεων δίνεται επιλέγοντας $B = 0$, δηλαδή $h_i^j = 1$.

Θα εξετάσουμε και την περίπτωση $p = \frac{1}{2}$. Στην περίπτωση αυτή η λύση της εξίσωσης διαφορών έχει την μορφή

$$h_i^j = A + Bi$$

Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $h_j^j = 1$ προκύπτει ότι

$$h_i^j = 1 + B(i - j)$$

Η ελάχιστη μη αρνητική λύση του συστήματος είναι επιλέγοντας $B = 0$ (είτε $i \leq j$ είτε $j \leq i$). Επομένως, $h_i^j = 1$.

Τελικά έχουμε ότι

$$h_i^j = \begin{cases} \frac{p^{j-i}}{(1-p)^{j-i}}, & \text{για κάθε } i \leq j, \quad \text{όταν } p < \frac{1}{2} \\ 1, & \text{για κάθε } j \leq i, \quad \text{όταν } p < \frac{1}{2} \\ 1, & \text{όταν } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Συγκεκριμένα, αν $p < \frac{1}{2}$ *η πιθανότητα να μεταβεί από την μηδέν στην* $j > 0$ *είναι ίση με* $\frac{p^j}{(1-p)^j} < 1$ *ενώ αν* $j < 0$ *τότε είναι ίση με 1. Επίσης, στην περίπτωση που* $p = \frac{1}{2}$ *η πιθανότητα να μεταβεί από την μηδέν σε οποιαδήποτε κατάσταση είναι 1.* □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 76 (Πιθανότητα και Μέσος Χρόνος Διαφυγής) *Ας ξαναγυρίσουμε στον συμμετρικό απλό τυχαίο περίπατο. Ξεκινώντας από το μηδέν, υπάρχουν άραγε κάποια όρια* a, b *τ.ω. ο τυχαίος περίπατος να μη φύγει ποτέ έξω από το διάστημα* $(-a, b)$; *Θέτοντας διαφορετικά το ερώτημα: ξεκινώντας από το μηδέν ποια είναι η πιθανότητα να παραμείνει για πάντα στο διάστημα* $(-a, b)$ *για* $a, b > 0$; *Τα ίδια ερωτήματα ισχύουν και στον μη συμμετρικό τυχαίο περίπατο, π.χ.* $p > \frac{1}{2}$.

Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα $h_0^{\{-a\}\cup\{b\}}$ *η οποία είναι η πιθανότητα ο τυχαίος περίπατος να φτάσει κάποια στιγμή σε κάποιο από το δυο άκρα. Στην πραγματικότητα θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες* $h_i^{\{-a\}\cup\{b\}}$ *για* $i \in (-a, b)$. *Οι πιθανότητες αυτές θα ικανοποιούν* τις γνωστές εξισώσεις, δηλαδή

$$\begin{aligned} h_{-a} &= h_b = 1 \\ h_i &= \frac{1}{2}h_{i-1} + \frac{1}{2}h_{i+1} \end{aligned}$$

Η λύση της εξίσωσης διαφορών είναι της μορφής

$$h_i = A + Bi$$

Χρησιμοποιώντας και τις συνθήκες $h_{-a} = h_b = 1$ προκύπτει ότι $h_i = 1$. Συγκεκριμένα, η $h_0^{\{-a\}\cup\{b\}}$ είναι ίση με την μονάδα, το οποίο σημαίνει ότι ο τυχαίος περίπατος ξεκινώντας από το μηδέν με πιθανότητα ένα θα περάσει οποιοδήποτε φράγμα θέσουμε ή αλλιώς η πιθανότητα να παραμείνει για πάντα στο διάσημα $(-a, b)$ είναι ίση με το μηδέν. Εφόσον είναι σίγουρο ότι θα ξεπεράσει οποιοδήποτε φράγμα μπορούμε να υπολογίσουμε και το μέσο πλήθος βημάτων που θα χρειαστούν μέχρι να γίνει αυτό, δηλαδή τους $k_i^{\{-a\}\cup\{b\}}$. Οι μέσοι αυτοί χρόνοι ικανοποιούν, κατά τα γνωστά τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} k_{-a} &= k_b = 0 \\ k_i &= 1 + \frac{1}{2}k_{i-1} + \frac{1}{2}k_{i+1} \end{aligned}$$

Η λύση της εξίσωσης διαφορών είναι

$$k_i = A + Bi - i^2$$

Εφαρμόζοντας και τις συνθήκες $k_{-a} = k_b = 0$ *προκύπτει ότι*

$$k_i = (b - i)(i + a)$$

Δηλαδή ο μέσος χρόνος που χρειάζεται ο τυχαίος περίπατος ξεκινώντας από το μηδέν να φτάσει στα άκρα είναι $k_0 = ab$. *Αν επιλέξουμε* $a = b = R$ *τότε προκύπτει ότι* $k_0 = R^2$, *δηλαδή ο μέσος χρόνος για να βγει από το διάστημα* $(-R, R)$, *ξεκινώντας από το μηδέν, είναι ίσος με* R^2. □

Παραδειγμα 77 (Μέσος Χρόνος Απορρόφησης υπό Προϋπόθεση) *Η εφαρμογή του θεωρήματος 69 χρειάζεται προσοχή. Αν το σύνολο καταστάσεων περιέχει κλειστά σύνολα τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο απορρόφησης στην ένωση αυτών των κλειστών συνόλων και όχι σε κάθε ένα ξεχωριστά. Παρόλα αυτά ενδιαφέρον παρουσιάζει και η εύρεση του μέσου χρόνου απορρόφη-*

σης σε ένα από τα κλειστά σύνολα. Ας το δούμε σε ένα παράδειγμα.

Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με σύνολο καταστάσεων $S = \{0, 1, 2, 3\}$ και πίνακα μετάβασης τον

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Πρόκειται για τυχαίο περίπατο με δυο απορροφητικά εμπόδια (δείτε παράδειγμα 74). Κατά τα γνωστά μπορούμε να υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο απορρόφησης ξεκινώντας από την κατάσταση 2 ο οποίος είναι ίσος με $k_2 = 2(3 - 2) = 2$. Αλλά, δεδομένου ότι θα απορροφηθεί στην κατάσταση 3, ποιος είναι ο μέσος χρόνος απορρόφησης; Για να υπολογίσουμε αυτή την ποσότητα θα πρέπει να εξαιρέσουμε όλα τα πιθανά σενάρια (μονοπάτια) στα οποία η αλυσίδα απορροφάται στην κατάσταση μηδέν. Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε τον ζητούμενο μέσο χρόνο πάνω σε όλα τα υπόλοιπα πιθανά μονοπάτια.

Έστω B_i το ενδεχόμενο στο οποίο η αλυσίδα ξεκινά από την κατάσταση i και κάποια στιγμή απορροφάται στην 3, δηλαδή

$$B_i = \{\exists n \geq 0 : X_n = 3\} \cap \{X_0 = i\}$$

Ορίζουμε ένα νέο μέτρο πιθανότητας (δείτε άσκηση ;;), το Q^i, έτσι ώστε

$$Q^i(F) = P(F|B_i)$$

Θέτουμε την τυχαία μεταβλητή H η οποία μετρά τα βήματα που χρειάζεται η αλυσίδα για να απορροφηθεί στην 3, δηλαδή

$$H = \min\{n \geq 1 : X_n = 3\}$$

Ο ζητούμενος μέσος χρόνος απορρόφησης στην 3 θα είναι τότε ο

$$\mathbb{E}_{Q^i}(H) = \sum_{n=1}^{\infty} n Q^i(H = n)$$

δηλαδή η μέση τιμή της H κάτω από το μέτρο Q. Όμως

$$Q^i(H = n) = P(H = n|B_i) = \frac{f_n(i|3)}{h_i^3}$$

Τελικά

$$\mathbb{E}_{Q^i} = \frac{1}{h_i^3}\sum_{n=1}^{\infty} n f_n(i|3)$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$f_n(2|3) = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{1}{4^k}, & \text{όταν } n = 2k+1, k = 0, 1, 2, \cdots, \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Αρα

$$\mathbb{E}_{Q^2} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{4^n}\right) = \frac{5}{3}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $h_2^3 = \frac{2}{3}$.

Δεν είναι πάντοτε εφικτό να υπολογίσουμε τις πιθανότητες $f_n(i|j)$ *οπότε στην συνέχεια θα περιγράψουμε τις εξισώσεις (σαν αυτές του θεωρήματος 69) που ικανοποιούν οι ζητούμενοι μέσοι χρόνοι απορρόφησης. Έστω λοιπόν ότι σε μια αλυσίδα το σύνολο καταστάσεων* S *χωρίζεται σε ένα υποσύνολο* C *το οποίο αποτελείται από απορροφητικές καταστάσεις και ένα υποσύνολο* T

το οποίο αποτελείται από μεταβατικές καταστάσεις. Έστω ότι η q είναι απορροφητική, δηλαδή $q \in C$. Συμβολίζουμε με k_i τον μέσο χρόνο $\mathbb{E}_{Q^i}(H)$ απορρόφησης στην κατάσταση q ξεκινώντας από την i, δεδομένου ότι η αλυσίδα θα απορροφηθεί σε αυτή. Επίσης με $\hat{T}$ συμβολίζουμε το υποσύνολο των μεταβατικών τέτοιων ώστε αν $j \in \hat{T}$ τότε $h_j^q > 0$. Αν $k_j < \infty$ για κάθε $j \in \hat{T}$ τότε ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις

$$\begin{aligned} k_q &= 0, \\ k_i &= 1 + \frac{1}{h_i^q} \sum_{j \in \hat{T}} P_{ij} h_j^q k_j, \quad i \in \hat{T} \end{aligned} \tag{4}$$

όπου h_i^q είναι η πιθανότητα να απορροφηθεί η αλυσίδα στην q ξεκινώντας από την i.

Προφανώς, υπάρχουν αλυσίδες με κλειστά σύνολα (τα οποία δεν είναι μονοσύνολα κατά ανάγκη) και μας ενδιαφέρει επίσης να υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο απορρόφησης σε ένα από τα κλειστά σύνολα δεδομένου ότι θα απορροφηθεί εκεί. Μπορούμε το κάθε κλειστό σύνολο να το συρρικνώσουμε σε μια απορροφητική κατάσταση και στην συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε τις *εξισώσεις 4. Επίσης, το ίδιο αποτέλεσμα με το λήμμα 68 ισχύει και στην παραπάνω περίπτωση. Αυτό σημαίνει ότι αν οι εξισώσεις 4 δεν επιδέχονται λύση και όλες οι μεταβατικές συνεπικοινωνούν τότε αναγκαστικά οι μέσοι χρόνοι είναι ίσοι με άπειρο.*

Στο ίδιο πνεύμα με το παράδειγμα αυτό μπορεί κανείς να συμβουλευτεί το On the absorption probabilities and mean time for absorption for discrete Markov chains. □

0.2 Πιθανότητα απορρόφησης από μεταβατικές καταστάσεις

Αν έχουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με κάποιες επαναληπτικές καταστάσεις και κάποιες μεταβατικές καταστάσεις έχει νόημα να υπολογίσουμε την πιθανότητα απορρόφησης από τις μεταβατικές καταστάσεις. Δηλαδή την πιθανότητα η αλυσίδα να ξεκινήσει από μια μεταβατική κατάσταση και να παραμείνει για πάντα στο σύνολο των μεταβατικών καταστάσεων.

Αν $A \subseteq S$ είναι το σύνολο όλων των επαναληπτικών καταστάσεων και T το σύνολο των μεταβατικών τότε με h_i^A όπου $i \in T$ συμβολίζουμε την πιθανότητα η αλυσίδα να ξεκινήσει από την i και να απορροφηθεί από το σύνολο των επαναληπτικών (διότι $k \nrightarrow i$ όταν k επαναληπτική και i μεταβατική). Με β_i συμβολίζουμε την (συμπληρωματική) πιθανότητα η αλυσίδα να ξεκινήσει από την i (μεταβατική) και να παραμείνει στο σύνολο των μεταβατικών καταστάσεων για πάντα. Προφανώς ισχύει ότι $h_i^A + \beta_i = 1$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 78 *Οι πιθανότητες απορρόφησης από το σύνολο των μεταβατικών καταστάσεων β_i ικανοποιούν τις εξισώσεις*

$$\begin{aligned} \beta_i &= 0, && \text{όταν} \quad i \in A, \\ \beta_i &= \sum_{j \in T} P_{ij}\beta_j, && \text{όταν} \quad i \notin A. \end{aligned}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 79 *Έστω X_n μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων. Τότε η πιθανότητα απορρόφησης (ξεκινώντας από μεταβατική κατάσταση) στο σύνολο των επαναληπτικών καταστάσεων είναι ίση με 1.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 80 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με άπειρο πλήθος καταστάσεων το* $S = \mathbb{N} \cup \{0\}$ *και πίνακα μετάβασης τέτοιον ώστε* $P_{00} = 1$, $P_{10} = p_1$, $P_{11} = p_2$, $P_{12} = p_3$, $P_{ii} = p$ *και* $P_{i,i+1} = q$ *για* $i \geq 2$. *Υποθέτουμε ότι* $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ *και* $p + q = 1$. *Προφανώς η κατάσταση 0 είναι απορροφητική. Η κατάσταση 1 είναι μεταβατική διότι υπάρχει θετική πιθανότητα ξεκινώντας από την 1 να απορροφηθεί στην 0. Οι καταστάσεις* $2, 3, \cdots$ *είναι επίσης μεταβατικές για διαφορετικό όμως λόγο. Αν για παράδειγμα η αλυσίδα ξεκινήσει από την κατάσταση 2 δεν υπάρχει περίπτωση να μεταβεί ποτέ στην 0 και να απορροφηθεί εκεί. Παρόλα αυτά υπάρχει θετική πιθανότητα να μεταβεί στην 3 το οποίο σημαίνει ότι δεν θα επιστρέψει ποτέ ξανά στην 2.*

Αν $A = \{0\}$ *και* $T = \{1, 2, \cdots\}$ *τότε* $\beta_i = 1$ *για* $i \geq 2$ *η οποία είναι η πιθανότητα να ξεκινήσει από την κατάσταση* i *και να παραμείνει στο* T *το οποίο είναι το σύνολο των μεταβατικών. Επιπλέον,* $\beta_0 = 0$ *άρα*

$$\beta_1 = p_2\beta_1 + p_3\beta_2$$

δηλαδή

$$\beta_1 = \frac{p_3}{1 - p_2}$$

η οποία είναι η πιθανότητα να ξεκινήσει από την κατάσταση 1 και να παραμείνει στις μεταβατικές καταστάσεις. Η πιθανότητα $1 - \beta_1$ *είναι η πιθανότητα να απορροφηθεί στην 0. Το ίδιο αποτέλεσμα θα βρίσκαμε αν υπολογίζαμε την* h_1^A *δεδομένου ότι* $h_i^A = 0$ *για* $i \geq 2$. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ 81 *Αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί* $\pi_j \in [0,1]$ *με* $j \in S$ *τέτοιοι ώστε*

$$\sum_{i \in S} \pi_i P_{ij} = \pi_j, \quad \forall j \in S,$$
$$\sum_{j \in S} \pi_j = 1, \quad \text{(εξίσωση κανονικοποίησης)}$$

τότε το διάνυσμα $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots)$ *θα ονομάζεται* **στάσιμη κατανομή** *της Μαρκοβιανής αλυσίδας και οι παραπάνω εξισώσεις ονομάζονται* **εξισώσεις στοχαστικής ισορροπίας** *ή* **στάσιμες εξισώσεις**.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 82 *Αν* $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \pi_j$ *τότε, αν* $m^{(0)}$ *είναι η αρχική κατανομή, έχουμε ότι (δες 5),*

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j)$$
$$= \lim_{n\to\infty} m_j^{(n)} = \lim_{n\to\infty} (m^{(0)} \cdot P^n)_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{s \in S} m_s P_{sj}^n = \pi_j$$

εφαρμόζοντας το λήμμα κυριαρχημένης σύγκλισης (δες ;;).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 83 *Για παράδειγμα, αν μια Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει ως αρχική κατανομή την στάσιμη κατανομή, δηλαδή $P(X_0 = j) = \pi_j$ για κάθε $j \in S$, τότε*

$$P(X_n = j) = \pi_j,$$

για κάθε n. Οπότε, η Μαρκοβιανή αλυσίδα διατηρεί την ίδια κατανομή σε όλες τις χρονικές στιγμές και για τον λόγο αυτόν ονομάζεται στάσιμη κατανομή. Πράγματι,

$$P(X_1 = j) = \sum_{i \in S} P(X_1 = j | X_0 = i) P(X_0 = i) = \sum_{i \in S} \pi_i P_{ij} = \pi_j.$$

Συνεχίζοντας, προκύπτει το ίδιο συμπέρασμα για όλους τους χρόνους. □

Στην συνέχεια θα δώσουμε θεωρήματα στα οποία θα μελετήσουμε τις προϋποθέσεις που απαιτούνται για να υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$ και κατόπιν να το συσχετίσουμε με την στάσιμη κατανομή.

Παρατηρηση 84 *Οι στάσιμες εξισώσεις είναι ισοδύναμες με την ισότητα $\pi P = \pi$ όπου $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots,)$ και P ο πίνακας μετάβασης. Είναι εύκολο να δούμε ότι αν κάποιο διάνυσμα π ικανοποιεί την ισότητα αυτή τότε το ίδιο θα συμβαίνει και με τον πίνακα P^m, δηλαδή $\pi P^m = \pi$. Πράγματι, αν πολλαπλασιάσουμε διαδοχικά την ισότητα $\pi P = \pi$ με τον πίνακα P και αντικαθιστούμε το γινόμενο πP με το π στο δεξί μέλος έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.*

Ας υποθέσουμε ότι υπολογίζουμε ένα διάνυσμα π χρησιμοποιώντας την εξίσωση κανονικοποίησης και τις εξισώσεις $\pi P = \pi$ εκτός από μια (οποιαδήποτε). Αν αθροίσουμε τις εξισώσεις αυτές και χρησιμοποιήσουμε και την εξίσωση κανονικοποίησης τότε θα πάρουμε την εξίσωση που δεν έχουμε λάβει υπόψη. Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα που υπολογίσαμε ικανοποιεί και την εξίσωση που δεν λάβαμε υπόψη στην αρχή, επομένως για να υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή (αν υπάρχει) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση κανονικοποίησης και τις εξισώσεις $\pi P = \pi$ εκτός από μια, όποια μας βολεύει. $\square$

Οριακές πιθανότητες

Έστω X_n μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης P. Όπως γνωρίζουμε ο πίνακας περιέχει τις πιθανότητες $P(X_{n+1} = j|X_n = i)$. Δηλαδή στην θέση (i, j) βρίσκεται η πιθανότητα $P(X_{n+1} = j|X_n = i)$. Έχουμε αποδείξει επίσης ότι η πιθανότητα $P(X_{n+m} = j|X_m = i) = P(X_n = j|X_0 = i)$ (υπόθεση χρονικής ομοιογένειας) είναι στην (i, j) θέση του πίνακα P^n. Στις εφαρμογές συχνά μας ενδιαφέρουν οι οριακές πιθανότητες καθώς $n \to \infty$ δηλαδή τα όρια

$$\lim_{n\to\infty} P(X_{n+m} = j|X_m = i)$$

Όταν η αλυσίδα έχει πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων μπορεί να βρει κάποιος τις οριακές πιθανότητες υπολογίζοντας την νιοστή δύναμη του πίνακα P και ύστερα υπολογίζοντας τα όρια των στοιχείων του.

Ας το δούμε με ένα παράδειγμα μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας με πίνακα μετάβασης τον

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι η αλυσίδα έχει ένα κλειστό σύνολο, το $C = \{1, 2, 3\}$ το οποίο έχει περίοδο 2. Επίσης η κατάσταση 4 είναι μεταβατική.

Μπορούμε να υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του πίνακα P που είναι

$$P^n = \begin{bmatrix} \frac{1+(-1)^n}{4} & \frac{1+(-1)^n}{4} & \frac{1-(-1)^n}{2} & 0 \\ \frac{1+(-1)^n}{4} & \frac{1+(-1)^n}{4} & \frac{1-(-1)^n}{2} & 0 \\ \frac{1-(-1)^n}{4} & \frac{1-(-1)^n}{4} & \frac{1+(-1)^n}{2} & 0 \\ \frac{1+\frac{1}{3^n}}{4} & \frac{1+\frac{1}{3^{n-1}}}{4} & \frac{1-\frac{1}{3^n}}{2} & \frac{1}{3^n} \end{bmatrix}$$

Για παράδειγμα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} P(X_{n+m} = 1 | X_m = 1) = \lim_{n\to\infty} P_{11}^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+(-1)^n}{4}$$

ενώ

$$\lim_{n\to\infty} P(X_{n+m} = 1|X_m = 4) = \lim_{n\to\infty} P_{41}^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{3^n}}{4} = \frac{1}{4}$$

Η πρώτη ακολουθία δεν έχει όριο διότι η ακολουθία των άρτιων όρων συγκλίνει στο $\frac{1}{2}$ ενώ η ακολουθία των περιττών όρων στο μηδέν.

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι ο P^n έχει δυο συγκλίνουσες υπακολουθίες. Το γεγονός αυτό προκύπτει από την ύπαρξη καταστάσεων με περίοδο 2.

Θα αναπτύξουμε στην συνέχεια κατάλληλη μεθοδολογία με την οποία θα υπολογίζουμε τις οριακές πιθανότητες (χωρίς να υπολογίζουμε την νιοστή δύναμη του πίνακα) η οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην περίπτωση Μαρκοβιανών αλυσίδων με άπειρο πλήθος καταστάσεων. Σημειώστε ότι από το παράδειγμα που μόλις δώσαμε έχουμε το συμπέρασμα ότι η περίοδος των καταστάσεων παίζει σημαντικό ρόλο στην εύρεση των οριακών πιθανοτήτων.

0.3 Ανανεωτικό θεώρημα

Ιδιαίτερα χρήσιμο στις αποδείξεις των θεωρημάτων της ενότητας αυτής είναι το επόμενο θεώρημα, γνωστό ως Ανανεωτικό Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 85 (ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ) *Έστω* $f_1, f_2, \cdots$ *μια ακολουθία μη αρνητικών αριθμών έτσι ώστε* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n = 1$ *και Μ.Κ.Δ.* $\{j : f_j > 0\} = 1$*. Θέτουμε* $u_0 = 1$ *και* $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k u_{n-k}$*, με* $n = 1, 2, \cdots$*. Αν ορίσουμε* $m = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n f_n$ *τότε* $u_n \to \frac{1}{m}$ *καθώς* $n \to \infty$*.*

0.4 Θεωρήματα οριακών πιθανοτήτων

Θέτουμε $f_n = f_n(i|i)$ όπου $i \in S$ επαναληπτική και απεριοδική και $u_n = P_{ii}^n$ οπότε $u_n = \sum_{k=1}^{n} f_k u_{n-k}$ (δες λήμμα 17). Επειδή ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $\{n \in \mathbb{N} : f_n > 0\}$ είναι ίσος με 1 (δες 49) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Ανανεωτικό Θεώρημα και να πάρουμε το εξής αποτέλεσμα

$$\lim_{n\to\infty} P_{ii}^n = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} n f_n(i|i)} = \frac{1}{m_i}$$

το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στις αποδείξεις των επόμενων θεωρημάτων. Σημειώστε ότι σημαντικό ρόλο διαδραματίζει ο υπολογισμός του μέσου χρόνου επαναφοράς m_i της κατάστασης i.

ΘΕΩΡΗΜΑ 86 *Αν η κατάσταση j μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι μεταβατική τότε $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^n < \infty$ για κάθε i επομένως $P_{ij}^n \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Αν η j είναι επαναληπτική και απεριοδική ενώ η i είναι τέτοια ώστε $i \leftrightarrow j$ τότε $P_{ij}^n \to \frac{1}{m_j}$. Επίσης, το $m_j < \infty$* **ανν** *$m_i < \infty$, δηλαδή σε κάθε αδιαχώριστο σύνολο επαναληπτικών καταστάσεων είτε θα είναι όλες οι καταστάσεις θετικά επαναληπτικές είτε μηδενικά επαναληπτικές. Αν i είναι μια οποιαδήποτε κατάσταση τότε $P_{ij}^n \to \frac{f_{ij}}{m_j} = \frac{h_i^j}{m_j}$ από όπου βγάζουμε το συμπέρασμα ότι αν η j είναι μηδενικά επαναληπτική τότε $P_{ij}^n \to 0$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 87 *Κάθε πεπερασμένη αλυσίδα δεν έχει μηδενικά επαναληπτικές καταστάσεις.*

Στην περίπτωση που μια Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων τότε θα αποδείξουμε ότι ο πίνακας των οριακών πιθανοτήτων είναι επίσης στοχαστικός το οποίο μπορεί να είναι χρήσιμο στον υπολογισμό των οριακών πιθανοτήτων. Το ίδιο δεν ισχύει, εν γένει, για αλυσίδες με άπειρο πλήθος καταστάσεων όπως για παράδειγμα η περίπτωση του τυχαίου περιπάτου όπου ο πίνακας των οριακών πιθανοτήτων είναι ο μηδενικός.

ΠΡΟΤΑΣΗ 88 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων S και πίνακα μετάβασης P. Αν υπάρχει υπακολουθία n_k τέτοια ώστε οι ακολουθίες πιθανοτήτων $(P^{n_k})_{ij}$ να συγκλίνουν τότε*

$$\sum_{j\in S} p_{ij} = 1, \qquad \text{για κάθε } i \in S$$

όπου $\lim\limits_{n_k\to\infty} (P^{n_k})_{ij} = p_{ij}$.

0.5 Εργοδικά Θεωρήματα

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 89 *Έστω X_n μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων S. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξω τυχαία κάποιο $k = 1, \cdots, n$ και να ισχύει ότι $X_k = j$ δεδομένου ότι έχει ξεκινήσει από την κατάσταση i; Ο αριθμός $\frac{\sum_{k=1}^{n} P_{ij}^k}{n}$ μπορεί να ερμηνευθεί ως την ζητούμενη πιθανότητα. Θα δούμε στο επόμενο θεώρημα που συγκλίνει η πιθανότητα αυτή καθώς $n \to \infty$. Στο πόρισμα 92 γενικεύουμε το αποτέλεσμα αυτό.*

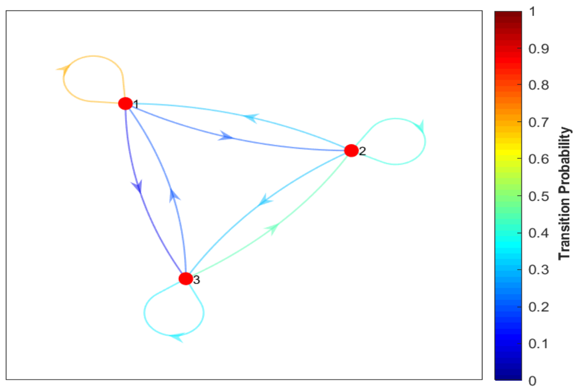
ΘΕΩΡΗΜΑ 90 *Έστω X_n μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων S. Τότε για κάθε $i, j \in S$ ισχύει ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} P_{ij}^k}{n} = \begin{cases} \frac{f_{ij}}{m_j}, & \text{όταν } j \text{ θετικά επαναληπτική} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 91 *Ας υποθέσουμε ότι ο καιρός σε μια πόλη μπορεί να μοντελοποιηθεί ως Μαρκοβιανή αλυσίδα με καταστάσεις $1 =$* **ηλιοφάνεια**, *$2 =$* **συννεφιά**

και $3 =$ **βροχή** *σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.45 & 0.35 \end{bmatrix}$$



Σχήμα 7: Το γράφημα της αλυσίδας του παραδείγματος 91

Δηλαδή στην θέση $P_{11} = 0.7$ *βρίσκεται η πιθανότητα αύριο να έχει ηλιοφάνεια δεδομένου ότι σήμερα έχει ηλιοφάνεια. Στην θέση* $P_{31} = 0.2$ *βρίσκεται η πιθα-*

νότητα αύριο να έχει ηλιοφάνεια δεδομένου ότι σήμερα βρέχει κ.τ.λ.

Εύκολα βλέπουμε ότι η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και επειδή το πλήθος των καταστάσεων είναι πεπερασμένο όλες οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές.

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι για παράδειγμα πόσες μέρες κατά μέσο όρο θα περάσουν μέχρι να βρέξει δεδομένου ότι σήμερα έχει ηλιοφάνεια. Ο αριθμός αυτός είναι ο k_1^3*, δηλαδή ο μέσος χρόνος πρώτης επίσκεψης στην κατάσταση 3 δεδομένου ότι ξεκινά από την κατάσταση 1.*

Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 69. Στην περίπτωση μας έχουμε $A = 3$*. Κατασκευάζουμε τις εξισώσεις για να υπολογίσουμε τα* k_1^3 *και* k_2^3 *οι οποίες είναι*

$$\begin{aligned} k_1^3 &= 1 + P_{11}k_1^3 + P_{12}k_2^3 \\ k_2^3 &= 1 + P_{21}k_1^3 + P_{22}k_2^3 \end{aligned}$$

Η μοναδική λύση του συστήματος είναι $k_1^3 = 6.66$ *και* $k_2^3 = 5$*. Δηλαδή κατά μέσο όρο θα περάσουν 6.66 ημέρες μέχρι να βρέξει δεδομένου ότι σήμερα έχει η-*

λιοφάνεια ενώ θα περάσουν κατά μέσο όρο 5 ημέρες μέχρι να βρέξει δεδομένου ότι σήμερα έχει συννεφιά.

Μπορούμε, χρησιμοποιώντας το θεώρημα ;;, να υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο επαναφοράς m_3. *Θα είναι*

$$m_3 = 1 + P_{31}k_1^3 + P_{32}k_2^3 = 4.582$$

Ο αριθμός αυτός παριστάνει το πόσες ημέρες θα περάσουν κατά μέσο όρο για να βρέξει δεδομένου ότι σήμερα βρέχει. Αφού ο αριθμός αυτός είναι πεπερασμένος έπεται ότι η κατάσταση 3 είναι θετικά επαναληπτική (δες ορισμό 39).

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα επίσης είναι: σε χρονικό διάστημα ενός έτους κατά μέσο όρο πόσες ημέρες θα έχουμε βροχή ενώ την προηγούμενη είχε ηλιοφάνεια. Δηλαδή, πόσες μονοβηματικές μεταβάσεις από ηλιοφάνεια σε βροχή θα συμβούν κατά μέσο όρο σε ένα έτος; Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος. Το ζητούμενο μέσο πλήθος είναι ίσο με $\mu_1^3(365)$ *δεδομένου ότι ξεκινά από την κατάσταση* i *(οποιαδήποτε). Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα,* *για αρκετά μεγάλο n, έχουμε ότι*

$$\frac{\mu_1^3(365)}{365} \approx P_{13}\frac{f_{i1}}{m_3} = \frac{0.1}{4.582}$$

αφού $f_{i1} = 1$. Δηλαδή

$$\mu_1^3(365) \approx \frac{365 \cdot 0.1}{4.582} \approx 8 \text{ ημέρες}$$

Δηλαδή, κατά μέσο όρο σε ένα έτος, θα υπάρξουν 8 μονομηματικές μεταβάσεις από ηλιοφάνεια σε βροχή.

□

Γενικεύοντας το ερώτημα της παρατήρησης 89 θέτουμε το επόμενο ερώτημα. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξω μια από τις πρώτες n μεταβάσεις της αλυσίδας και να ισχύει $X_k = j$; Η ποσότητα $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_j^{(k)}$ μπορεί να ερμηνευθεί ως την ζητούμενη πιθανότητα όπου $m_j^{(k)} = P(X_k = j)$.

Πορισμα 92 *Ισχύει ότι*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_j^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{1}{m_j}\displaystyle\sum_{i\in S} m_i^{(0)} f_{ij}, & \text{όταν } j \text{ θετικά επαναληπτική} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

για κάθε $j \in S$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 93 *Αν $g : S \to \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε*

$$\sum_{i \in S} |g(i)| < \infty$$

τότε ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}g(X_k) = \sum_{j \in C} \frac{g(j)}{m_j} \sum_{i \in S} m_i^{(0)} f_{ij}$$

όπου $C \subseteq S$ είναι το υποσύνολο του S των θετικά επαναληπτικών καταστάσεων.

ΠΟΡΙΣΜΑ 94 (ΕΡΓΟΔΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ) *Δοσμένης μιας συνάρτησης $g : S \to \mathbb{R}$ τέτοιας ώστε*

$$\sum_{i \in S} |g(i)| < \infty$$

ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g(X_k) = \sum_{j \in C} \frac{g(j)}{m_j} \mathbb{I}_{A^j} \quad \text{σχεδόν βέβαια}$$

όπου $A^j = \{\omega \in \Omega : \exists\ l \in \mathbb{N}$ *τ.ω.* $X_l = j\}$ *με* $P(A^j) = \sum_{i\in S} \mu_i^{(0)} \cdot f_{ij}$. *Συγκεκριμένα, αν η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_k) = \begin{cases} \sum_{j\in S} g(j)\pi_j, & \textit{όταν είναι θετικά επαναληπτική} \\ 0, & \textit{αλλιώς} \end{cases}$$

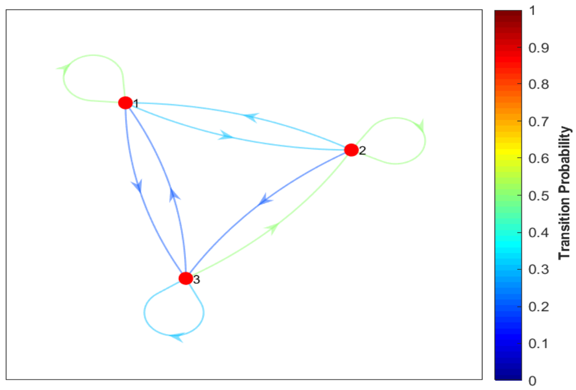
όπου $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots)$ *η μοναδική στάσιμη κατανομή.*

Σε ποιες περιπτώσεις η πιθανότητα $f_{ij} = 1$; Σημειώστε ότι $f_{ij} = h_i^{S_a}$ όπου S_a είναι η επαναληπτική κλάση που ανήκει η κατάσταση j. Αν η κατάσταση i ανήκει στην ίδια κλάση με την j τότε $f_{ij} = 1$ (δες 25). Στην περίπτωση που η i δεν ανήκει στην ίδια κλάση τότε είτε $i \nrightarrow j$ είτε η i είναι μεταβατική. Αν η επαναληπτική κλάση που ανήκει η j είναι μοναδική και ο χώρος καταστάσεων είναι πεπερασμένος τότε $f_{ij} = 1$ (δες 79). Ακόμη και στην περίπτωση που έχουμε περισσότερες από μια επαναληπτικές κλάσεις μπορεί να ισχύει $f_{ij} = 1$ αρκεί η μεταβατική κατάσταση i να μην επικοινωνεί με καμία από τις άλλες επαναληπτικές κλάσεις.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 95 *Διαπιστώνουμε ότι ενώ το όριο των πιθανοτήτων P_{ij}^n μπορεί να μην υπάρχει, το αντίστοιχο όριο του αριθμητικού μέσου υπάρχει πάντοτε και μάλιστα είναι ανεξάρτητο από την κατάσταση i στην περίπτωση που $f_{ij} = 1$. Σε αυτή την περίπτωση η ζητούμενη πιθανότητα της παρατήρησης 89 συγκλίνει πάντοτε σε ένα όριο ανεξάρτητο της αρχικής κατάστασης και επομένως το συμπέρασμά μας θα είναι και αυτό ανεξάρτητο της αρχικής κατάστασης.* □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 96 *Ένας γεωργός έχει δυο άλογα για τις αγροτικές του εργασίες. Όταν κάποιο άλογο αρρωσταίνει το αντικαθιστά με κάποιο άλλο το οποίο νοικιάζει με 20 Ευρώ την ημέρα. Συμβολίζουμε με 1 την κατάσταση «κανένα άλογο δεν είναι άρρωστο», με 2 την κατάσταση όπου «1 άλογο είναι άρρωστο» και με 3 την κατάσταση όπου «και τα δυο είναι άρρωστα». Ας υποθέσουμε ότι η πιθανότητα αύριο να βρεθεί ο αγρότης σε οποιαδήποτε από τις τρεις καταστάσεις εξαρτάται μονάχα από την σημερινή κατάσταση. Έστω επίσης ο* *παρακάτω πίνακας μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$$



Σχήμα 8: Το γράφημα της αλυσίδας του παραδείγματος 96

ο οποίος περιγράφει τις πιθανότητες μετάβασης από κατάσταση σε κατάσταση και έστω X_n *η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον* P *και σύνολο καταστάσεων το* $S = \{1, 2, 3\}$. *Το ερώτημα που προκύπτει είναι πόσα χρήματα ξοδεύει ο γεωργός κατά μέσο όρο* την ημέρα για ενοικίαση κάποιου αλόγου;

Κατασκευάζουμε την συνάρτηση

$$g(i) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } i = 1 \\ 20, & \text{όταν } i = 2 \\ 40, & \text{όταν } i = 3 \end{cases}$$

η οποία μας δίνει το ποσό χρημάτων που χρειάζεται ο αγρότης στην κάθε κατάσταση. Ο μέσος όρος για n ημέρες λοιπόν είναι

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_k)$$

Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη. Σύμφωνα με το εργοδικό θεώρημα η παραπάνω ποσότητα συγκλίνει στην ποσότητα

$$g(1)\pi_1 + g(2)\pi_2 + g(3)\pi_3$$

όπου $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ είναι η στάσιμη κατανομή. Υπολογίζουμε την στάσιμη κατανομή και έχουμε $\pi = (0.34, 0.43, 0.22)$. Επομένως ο μέσος όρος χρημάτων που χρειάζεται ο αγρότης την ημέρα είναι

$$0 * 0.34 + 20 * 0.43 + 40 * 0.22 = 17.4 \text{ Ευρώ}$$

□

0.6 Μέσος χρόνος επαναφοράς και στάσιμη κατανομή

ΠΟΡΙΣΜΑ 97 *Έστω X_n μια αδιαχώριστη αλυσίδα. Η αλυσίδα έχει στάσιμη κατανομή* **ανν** *είναι θετικά επαναληπτική. Σε αυτή την περίπτωση η στάσιμη κατανομή είναι μοναδική και ισχύει ότι*

$$\pi_j = \frac{1}{m_j}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 98 *Επειδή δεν ισχύει πάντοτε*

$$\lim_{n \to \infty} P_{ij}^n = \pi_j$$

είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε τις στάσιμες κατανομές περισσότερο ως εργαλείο εύρεσης των μέσων χρόνων επαναφοράς παρά για τον απευθείας προσδιορισμό των οριακών πιθανοτήτων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 99 *Έστω P ένας στοχαστικός πίνακας. Θα* *λέμε ότι είναι* **διπλά στοχαστικός** *αν το άθροισμα των στοιχείων της κάθε στήλης του είναι μονάδα.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 100 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα η οποία είναι αδιαχώριστη και απεριοδική με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων (έστω m) και διπλά στοχαστικό πίνακα μετάβασης P. Τότε έχουμε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \pi_j = \frac{1}{m}.$$

0.7 Μεταβατικές καταστάσεις και περιοδικές υποαλυσίδες

Σε αρκετές περιπτώσεις (ειδικά όταν υπάρχουν περισσότερες από δυο μεταβατικές καταστάσεις που συνεπικοινωνούν) είναι αρκετά δύσκολο να υπολογισθεί το

$$\sum_{r=0}^{\infty} f_{rd+a}(i|j)$$

Σε αυτές τις περιπτώσεις μπορούμε να εργαστούμε στο πνεύμα της απόδειξης του πορίσματος ;; και να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα P^d, ειδικά όταν η αλυσίδα είναι πεπερασμένη. Αν η κατάσταση j ανήκει σε ένα κλειστό και αδιαχώριστο σύνολο S_1 με περίοδο d τότε το S_1 μπορεί να χωρισθεί στα σύνολα κυκλικής μετάβασης $C_0, \cdots, C_{d-1}$. Τα σύνολα $C_0, \cdots, C_{d-1}$ αποτελούν κλειστά και αδιαχώριστα σύνολα του P^d και μάλιστα απεριοδικά. Επομένως μπορούμε να μελετήσουμε το όριο $(P^{nd})_{ij}$ καθώς $n \to \infty$. Για να το κάνουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 86. Έστω ότι $(P^{nd})_{ij}$ συγκλίνει στο $(P^{\infty d})_{ij}$. Τότε οι οριακές πιθανότητες θα είναι, εφαρμόζοντας το λήμμα κυριαρχημένης σύγκλισης ;;,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(P^{nd+a})_{ij} &= \lim_{n\to\infty}(P^a \cdot P^{nd})_{ij} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k\in S} P^a_{ik}P^{nd}_{kj} \\ &= \left(P^a \cdot P^{\infty d}\right)_{ij}, \quad a = 0, 1, \cdots, d-1 \end{aligned}$$

αφού $\displaystyle\sum_{k\in S} P^a_{ik}P^{nd}_{kj} \leq \sum_{k\in S} P^a_{ik} = 1.$

Σημειώστε ότι, εν γένει, $P^a \cdot P^{\infty d} \neq P^{\infty d} \cdot P^a$. Αν όμως ο πίνακας είναι πεπερασμένος τότε το παραπάνω επιχείρημα ισχύει χωρίς την εφαρμογή του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης επομένως σε αυτή την περίπτωση $P^a \cdot P^{\infty d} = P^{\infty d} \cdot P^a$. Δηλαδή, γενικά, το σωστό συμπέρασμα είναι

$$\lim_{n\to\infty} (P^{nd+a})_{ij} = (P^a \cdot P^{\infty d})_{ij} \tag{5}$$

και όχι $\lim\limits_{n\to\infty} (P^{nd+a})_{ij} = (P^{\infty d} \cdot P^a)_{ij}$.

Η οπτική αυτή ουσιαστικά μας πληροφορεί ότι η εύρεση των οριακών πιθανοτήτων σε μια πεπερασμένη αλυσίδα ανάγεται στην πραγματικότητα στην εφαρμογή του θεωρήματος 86. Το μοναδικό πλεονέκτημα των θεωρημάτων ;; και ;; είναι ότι εργαζόμαστε πάντοτε στον πίνακα P και όχι στον P^d.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 101 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων το $S = \{1, 2, 3\}$ και πίνακα μετάβασης τον*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες της αλυσίδας, δηλαδή τα όρια

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n, \quad i, j = 1, 2, 3$$

Ένας τρόπος προφανώς είναι να υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του πίνακα και στην συνέχεια να υπολογίσουμε ένα-ένα τα όρια ξεχωριστά. Ο συγκεκριμένος όμως πίνακας έχει δυο (συζυγείς) μιγαδικές ρίζες και έτσι ο υπολογισμός της νιοστής δύναμης είναι λίγο πιο περίπλοκος.

Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 86 για τον υπολογισμό των οριακών πιθανοτήτων. Το πρώτο που θα πρέπει να κάνουμε είναι να δούμε αν τυχόν η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη, αν έχει μεταβατικές καταστάσεις, ποιες καταστάσεις επικοινωνούν με ποιες, περιοδικότητα κ.τ.λ.

Διαπιστώνουμε ότι η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και απεριοδική και όλες οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές (δες παρατήρηση 21 και θεώρημα 25). Σύμφωνα με το *θεώρημα 86 θα ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \frac{1}{m_j}$$

όπου m_j ο μέσος χρόνος επαναφοράς της κατάστασης j. Για να υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο επαναφοράς θα χρησιμοποιήσουμε το πόρισμα 97. Θα υπολογίσουμε δηλαδή την στάσιμη κατανομή, αν υπάρχει. Στην περίπτωση που υπάρχει τότε $m_j = \frac{1}{\pi_j}$ ενώ αν δεν υπάρχει θεωρούμε ότι $m_j = \infty$ και επομένως οι αντίστοιχες οριακές πιθανότητες θα είναι μηδέν.

Για να υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \pi P &= \pi \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \end{aligned}$$

Λύνοντας τις εξισώσεις έχουμε

$$\pi_1 = \frac{1}{7}, \quad \pi_2 = \frac{3}{7}, \quad \pi_3 = \frac{3}{7}$$

Επομένως ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} P^n = P^\infty = \begin{bmatrix} 1/7 & 3/7 & 3/7 \\ 1/7 & 3/7 & 3/7 \\ 1/7 & 3/7 & 3/7 \end{bmatrix}$$

Συγκρίνετε το αποτέλεσμα με το παράδειγμα ;;. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 102 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα του παραδείγματος* ;; *με χώρο καταστάσεων* $S = \{1, 2, 3\}$ *και πίνακα μετάβασης τον*

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Θα υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες εφαρμόζοντας το θεώρημα 86. Λόγω του ότι η κατάσταση 3 είναι μεταβατική Θα ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} P_{i3}^n = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Επομένως πρέπει να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n, \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2$$

Εφόσον οι καταστάσεις $1, 2$ *συνεπικοινωνούν τότε σύμφωνα με το θεώρημα 86 θα ισχύει ότι*

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \frac{1}{m_j}, \quad i = 1, 2 \quad j = 1, 2$$

ενώ

$$\lim_{n\to\infty} P_{3j}^n = \frac{h_3^j}{m_j}, \quad j = 1, 2$$

Λόγω της παρατήρησης 65 θα ισχύει ότι $h_3^j = h_3^C$ *για* $j = 1, 2$ *και λόγω του πορίσματος 79 θα ισχύει ότι* $h_3^j = h_3^C = 1$ *για* $j = 1, 2$. *Αρα τελικά μένει να βρούμε μόνο τους μέσους χρόνους επαναφοράς* m_1, m_2. *Για να το κάνουμε αυτό θα εργαστούμε στην υποαλυσίδα με χώρο καταστάσεων το* $C = \{1, 2\}$ *και πίνακα μετάβασης τον αρχικό εάν όμως διαγράψουμε την γραμμή και στήλη που ανήκει η κατάσταση 3. Χρησιμοποιώντας* *αυτόν τον υποπίνακα, τον οποίο συμβολίζουμε με* A, *θα υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή* $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ *από τις εξισώσεις*

$$\begin{aligned} \pi A &= \pi \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1 \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα θα έχουμε

$$\pi_1 = \frac{2}{5}, \quad \pi_2 = \frac{3}{5}$$

επομένως $m_1 = \frac{5}{2}$ *και* $m_2 = \frac{5}{3}$. *Τελικά θα έχουμε*

$$\lim_{n\to\infty} P^n = P^\infty = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 & 0 \\ 2/5 & 3/5 & 0 \\ 2/5 & 3/5 & 0 \end{bmatrix}$$

$\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 103 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων το* $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *και πίνακα* *μετάβασης τον*

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 0 & 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν δυο κλειστά και αδιαχώριστα σύνολα επαναληπτικών καταστάσεων, τα $C_1 = \{1, 2\}$ *και* $C_2 = \{3, 4\}$ *τα οποία είναι και απεριοδικά. Η κατάσταση 5 είναι μεταβατική. Σύμφωνα με το θεώρημα 86 θα ισχύει ότι*

$$\lim_{n\to\infty} P_{i5}^n = 0, \quad i = 1, \cdots, 5$$

Εφόσον οι καταστάσεις 1 και 2 συνεπικοινωνούν θα έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \frac{1}{m_j}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2$$

Παρόμοια για τις 3 και 4 θα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \frac{1}{m_j}, \quad i = 3, 4, \quad j = 3, 4$$

Για τις οριακές πιθανότητες

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n, \quad i = 3, 4 \quad j = 1, 2$$

θα ισχύει ότι είναι μηδέν αφού $h_i^j = 0$ *όταν* $i = 3, 4$ *και* $j = 1, 2$. *Παρόμοια για τις πιθανότητες*

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n, \quad i = 1, 2 \quad j = 3, 4$$

θα είναι επίσης μηδέν.

Για τις οριακές πιθανότητες της γραμμής 5 θα ι-σχύει

$$\lim_{n\to\infty} P_{5j}^n = \frac{h_5^j}{m_j}, \quad j = 1, \cdots, 5$$

Λόγω της παρατήρησης 65 θα ισχύει ότι

$$h_5^1 = h_5^2 = h_5^{C_1}, \quad h_5^3 = h_5^4 = h_5^{C_2}$$

Δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} P^n = P^\infty = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{0}{m_1} & \frac{0}{m_2} & \frac{1}{m_3} & \frac{1}{m_4} & 0 \\ \frac{0}{m_1} & \frac{0}{m_2} & \frac{1}{m_3} & \frac{1}{m_4} & 0 \\ \frac{h_5^{C_1}}{m_1} & \frac{h_5^{C_1}}{m_2} & \frac{h_5^{C_2}}{m_3} & \frac{h_5^{C_2}}{m_4} & 0 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, πρέπει να υπολογίσουμε τα m_1, m_2, m_3, m_4, $h_5^{C_1}$ *και* $h_5^{C_2}$. *Για να υπολογίσουμε τα* m_1 *και* m_2 *θα υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή της υποαλυσίδας με χώρο καταστάσεων το* C_1 *και πίνακα μετάβασης τον* A *ο οποίος προέρχεται από τον αρχικό διαγράφοντας τις γραμμές 3,4,5 και τις αντίστοιχες στήλες. Η στάσιμη κατανομή* $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ *θα ικανοποιεί*

$$\begin{aligned} \pi A &= \pi \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1 \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι

$$\pi_1 = \frac{2}{5}, \quad \pi_2 = \frac{3}{5}$$

Επομένως $m_1 = \frac{5}{2}$ *και* $m_2 = \frac{5}{3}$.

Για να υπολογίσουμε τους m_3 *και* m_4 *θα εργαστούμε στην υποαλυσίδα με χώρο καταστάσεων το* C_2 *και πίνακα μετάβασης τον αρχικό διαγράφοντας τις στήλες 1,2,5 και τις αντίστοιχες γραμμές και τον οποίο συμβολίζουμε με* B. *Για να υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή* $\pi = (\pi_3, \pi_4)$ *θα λύσουμε το σύστημα*

$$\begin{aligned} \pi B &= \pi \\ \pi_3 + \pi_4 &= 1 \end{aligned}$$

Η λύση είναι

$$\pi_3 = \frac{3}{11}, \quad \pi_4 = \frac{8}{11}$$

Επομένως $m_3 = \frac{11}{3}$ *και* $m_4 = \frac{11}{8}$.

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες $h_5^{C_1}$ *και* $h_5^{C_2}$. *Λύνοντας τις αντίστοιχες εξισώσεις σύμφωνα με το θεώρημα 64 προκύπτει ότι* $h_5^{C_1} = h_5^{C_2} =$

0.5. *Τελικά θα έχουμε*

$$\lim_{n\to\infty} P^n = P^\infty = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 & 0 & 0 & 0 \\ 2/5 & 3/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/11 & \frac{8}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 3/11 & \frac{8}{11} & 0 \\ 1/5 & 3/10 & \frac{3}{22} & 4/11 & 0 \end{bmatrix}$$

Σημειώστε ότι ο οριακός πίνακας P^∞ είναι στοχαστικός (δείτε και την πρόταση 88). □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 104 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4\}$ και πίνακα μετάβασης τον*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Στην αλυσίδα αυτή έχουμε ένα κλειστό σύνολο επαναληπτικών καταστάσεων, το $C = \{1, 2, 3\}$ το οποίο *όμως είναι περιοδικό με περίοδο 2. Η κατάσταση 4 είναι μεταβατική. Αρα οι οριακές πιθανότητες της τέταρτης στήλης θα είναι*

$$\lim_{n\to\infty} P_{i4}^n = 0, \quad i = 1, \cdots, 4$$

Εφόσον οι καταστάσεις 1,2,3 είναι περιοδικές με περίοδο 2 δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 86 στην αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον P. *Για την περίπτωση αυτή θα ακολουθήσουμε την μεθοδολογία της παραγράφου 0.7. Θα εργαστούμε στην αλυσίδα* Y_n *με πίνακα μετάβασης τον* P^2, *δηλαδή*

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{7}{48} & \frac{11}{48} & \frac{9}{16} & 1/16 \end{bmatrix}$$

Στην αλυσίδα Y_n *οι καταστάσεις* $1, 2$ *ορίζουν ένα κλειστό, αδιαχώριστο και απεριοδικό σύνολο επαναληπτικών καταστάσεων το οποίο συμβολίζουμε με* $C_1 = \{1, 2\}$, *η κατάσταση 3 είναι απορροφητική και η 4 μεταβατική. Θα υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες της* *αλυσίδας* Y_n *σύμφωνα με το θεώρημα 86. Θα έχουμε*

$$P^{2\infty} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 \\ \frac{0}{m_1} & \frac{0}{m_2} & \frac{1}{m_3} & 0 \\ \frac{h_4^{C_1}}{m_1} & \frac{h_4^{C_1}}{m_2} & \frac{h_4^3}{m_3} & 0 \end{bmatrix}$$

Επειδή η 3 είναι απορροφητική έπεται ότι $m_3 = 1$ *(δείτε άσκηση 40). Υπολογίζουμε όπως σε προηγούμενη άσκηση τους* m_1 *και* m_2 *μέσω της στάσιμης κατανομής στην υποαλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον αρχικό διαγράφοντας τις στήλες 3,4 και τις αντίστοιχες γραμμές. Προκύπτει ότι* $m_1 = 3$ *και* $m_2 = \frac{3}{2}$. *Στην συνέχεια πρέπει να υπολογίσουμε την* h_4^3. *Εφαρμόζοντας το θεώρημα 64 προκύπτει ότι* $h_4^3 = \frac{3}{5}$ *και επομένως θα* *ισχύει ότι* $h_4^{C_1} = \frac{2}{5}$ *(δες πόρισμα 79). Τελικά θα έχουμε*

$$\lim_{n\to\infty} P^{2n} = P^{2\infty} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2/15 & \frac{4}{15} & 3/5 & 0 \end{bmatrix}$$

Για να υπολογίσουμε το όριο των περιττών δυνάμεων γράφουμε

$$\lim_{n\to\infty} P^{2n+1} = P^{2\infty+1} = P^{2\infty} \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 & 0 \end{bmatrix}$$

Εφαρμόστε τα εργοδικά θεωρήματα και συγκρίνετε τα συμπεράσματα με τα παραπάνω αποτελέσματα. □

Παραδειγμα 105 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με*

πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *Οι καταστάσεις* $S_1 = \{1, 2, 3\}$ *αποτελούν ένα κλειστό και αδιαχώριστο σύνολο με περίοδο 2. Η κατάσταση 6 είναι απορροφητική και οι καταστάσεις 4 και 5 είναι μεταβατικές. Η εύρεση των οριακών πιθανοτήτων*

$$(P^{\infty})_{ij} \quad i = 4, 5, \quad j = 1, 2, 3$$

είναι δυσκολότερη υπόθεση από ότι όλων των άλλων. Για να τις υπολογίσουμε θα εργαστούμε στον P^2 *ο ο-*

ποίος είναι

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{4}{15} & \frac{1}{15} & 0 & \frac{4}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{30} & \frac{2}{15} & 0 & \frac{1}{15} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και θα θεωρήσουμε μια νέα Μαρκοβιανή αλυσίδα Y_n *με πίνακα μετάβασης τον* P^2. *Υπολογίζουμε τις πιθανότητες* $h_4^{C_0}$ *και* $h_5^{C_0}$ *όπου* $C_0 = \{1, 2\}$ *και έχουμε ότι* $h_4^{C_0} = h_5^{C_0} = \frac{3}{7}$. *Ο μέσος χρόνος επαναφοράς των καταστάσεων 1 και 2 (στην αλυσίδα* Y_n*) είναι* $m_1 = m_2 = 2$ *το οποίο το βρίσκουμε υπολογίζοντας την στάσιμη κατανομή. Αρα τα όρια*

$$\lim_{n\to\infty}(P^{nd})_{41} = \frac{h_4^{C_0}}{m_1} = \frac{3}{14} = \lim_{n\to\infty}(P^{nd})_{42} = \lim_{n\to\infty}(P^{nd})_{51} = \lim_{n\to\infty}(P^{nd})_{52}$$

Παρομοίως υπολογίζουμε τις οριακές πιθανότητες

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(P_{43}^{nd}\right) &= \frac{h_4^{\{3\}}}{m_3} = \frac{4}{14} \\
\lim_{n\to\infty}\left(P_{53}^{nd}\right) &= \frac{h_5^{\{3\}}}{m_3} = \frac{1}{7} \\
\lim_{n\to\infty}\left(P_{46}^{nd}\right) &= \frac{h_4^{\{6\}}}{m_6} = \frac{4}{14} \\
\lim_{n\to\infty}\left(P_{56}^{nd}\right) &= \frac{h_5^{\{6\}}}{m_6} = \frac{3}{7}
\end{aligned}$$

αφού παρατηρήσουμε ότι $m_3 = m_6 = 1$ *στην αλυσίδα* Y_n. *Παρομοίως υπολογίζουμε όλες τις οριακές πιθανότητες της αλυσίδας* Y_n *κατασκευάζοντας έτσι τον οριακό πίνακα* $P^{\infty 2}$ *ο οποίος είναι*

$$P^{\infty 2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{14} & \frac{2}{7} & 0 & 0 & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{14} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Για να βρούμε τις οριακές πιθανότητες $\left(\lim_{n\to\infty} P^{n2+1}\right)_{ij}$ *αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον* $P^{\infty 2}$ *με τον* P *λαμβάνοντας έτσι τον*

$$P^{\infty 2+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & 0 & 0 & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{3}{7} & 0 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

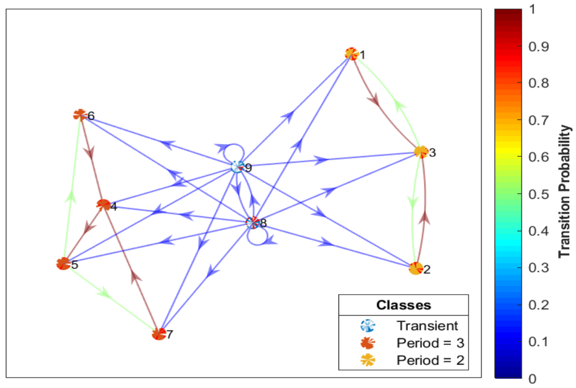
Στην συνέχεια θα δούμε ένα πιο περίπλοκο παράδειγμα με δυο περιοδικές υποαλυσίδες και δυο μεταβατικές καταστάσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 106 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με*

πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Διαπιστώνουμε ότι έχουμε δυο κλειστά σύνολα, τα $S_1 = \{1, 2, 3\}$ *και* $S_2 = \{4, 5, 6, 7\}$ *τα οποία είναι περιοδικά με περίοδο 2 και 3 αντίστοιχα. Οι καταστάσεις 8 και 9 είναι μεταβατικές. Η περίπτωση της αλυσίδας αυτής είναι αρκετά πιο περίπλοκη μιας και εμφανίζονται δυο περιοδικές υποαλυσίδες με διαφορετική περίοδο και 2 μεταβατικές που συνεπικοινωνούν.*



Σχήμα 9: Το γράφημα της αλυσίδας του παραδείγματος 106

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα η αλυσίδα να απορροφηθεί στο σύνολο S_1*. Εφόσον τα σύνολα* S_1 *και* S_2 *είναι κλειστά μπορούμε να τα «συρρικνώσουμε» σε δυο μονοσύνολα τα οποία θα αποτελούνται από μια απορροφητική κατάσταση το καθένα. Έτσι λοιπόν έχουμε τον παρακάτω «ισοδύνα-*

μο» πίνακα μετάβασης

$$\hat{P} = \begin{array}{c|cccc} & \mathbf{S_1} & \mathbf{S_2} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \\ \mathbf{S_1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{S_2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{8} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \mathbf{9} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{array}$$

Βλέπουμε ότι στην θέση $\hat{P}_{31}$ *έχουμε βάλει την συνολική πιθανότητα η αλυσίδα να μεταβεί σε ένα βήμα από την κατάσταση 8 στο κλειστό σύνολο* S_1 *ενώ στην θέση* $\hat{P}_{32}$ *την συνολική πιθανότητα από την 8 στην* S_2 *σε ένα βήμα. Παρόμοια, για την κατάσταση 9. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες* $h_i^{S_1}$ *και* $h_i^{S_2}$. *Για να δει κανείς αυτή την ισοδυναμία αρκεί να εφαρμόσει το θεώρημα 64 τόσο στην αρχική αλυσίδα όσο και στην αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον* $\hat{P}$. *Συρρικνώνοντας τα κλειστά σύνολα μειώνουμε αρκετά το πλήθος των πράξεων.*

Για να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες της αρχικής αλυσίδας που βρίσκονται κάτω από τα κλειστά σύνολα S_1 και S_2 θα εφαρμόσουμε το ίδιο σκεπτικό συρρικνώνοντας αρχικά το κλειστό σύνολο S_2 και αφήνοντας το S_1 ως έχει. Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα μετάβασης

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες που βρίσκονται κάτω από το σύνολο S_1, (δηλαδή τις P_{ij}^n για $i = 8, 9$ και $j = 1, 2, 3$) εφαρμόζοντας το σκεπτικό του παραδείγματος 105 χρησιμοποιώντας τον πίνακα A. Σημειώστε ότι η δυσκολία δημιουργείται λόγω του ότι τα περιοδικά σύνολα S_1 και S_2 έχουν διαφορετική περίοδο και επομένως δεν μπορούμε να υπολογίσουμε ταυτόχρονα τις οριακές πιθανότητες που βρίσκονται κάτω από τα σύνολα S_1 και S_2. Εναλλακτικά, αντί να συρρικνώσουμε το S_2 μπορούμε να θέσουμε *προσωρινά τυχαίους αριθμούς (π.χ. μηδέν) ως οριακές πιθανότητες κάτω από το* S_2 *και να συνεχίσουμε με τους υπολογισμούς μας. Αυτό δεν επιδρά καθόλου στις πράξεις μιας και οι αριθμοί αυτοί θα πολλαπλασιαστούν με μηδενικά όπως θα εξηγήσουμε στην συνέχεια.*

Για να δικαιολογήσουμε την «ισοδυναμία» των πινάκων P *και* A *αρκεί να διαπιστώσουμε ότι τα στοιχεία των πινάκων* P^n *και* A^n *που μας ενδιαφέρουν είναι ίσα. Θα συγκρίνουμε τα στοιχεία* $(P^n)_{ij}$ *με* $i = 8, 9$ *και* $j = 1, 2, 3$ *με τα στοιχεία* $(A^n)_{ij}$ *με* $i = 5, 6$ *και* $j = 1, 2, 3$. *Σημειώστε ότι τα στοιχεία* $(P^n)_{ij}$ *με* $i = 4, 5, 6, 7$ *και* $j = 1, 2, 3$ *είναι ίσα με το μηδέν διότι αναπαριστούν την πιθανότητα η αλυσίδα να μεταβεί από μια κατάσταση του συνόλου* S_2 *σε μια κατάσταση του συνόλου* S_1 *σε* n*-βήματα. Το ίδιο συμβαίνει και με τα στοιχεία* $(A^n)_{4j}$ *τα οποία είναι μηδέν εκτός από την περίπτωση* $j = 4$ *όπου είναι ίσο με* 1 *διότι η κατάσταση 4 στον πίνακα* A *είναι απορροφητική. Με την παρατήρηση αυτή βλέπουμε ότι το στοιχείο* $(P^2)_{81}$ *δεν εξαρτάται καθόλου από τις τιμές των* P_{8j} *με* $j = 4, 5, 6, 7$ *μιας και αυτά τα στοιχεία θα πολλαπλασιαστούν με μηδενι-*

κά. Παρόμοια, το στοιχείο $(A^2)_{51}$ *δεν εξαρτάται καθόλου από το στοιχείο* A_{54}. *Αρα,* $(P^2)_{81} = (A^2)_{51}$. *Επαγωγικά έχουμε ότι* $(P^n)_{81} = (A^n)_{51}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Παρομοίως για τα υπόλοιπα στοιχεία.*

Στην συνέχεια, συρρικνώνουμε το κλειστό σύνολο S_1 *και αφήνουμε το* S_2 *ως έχει κατασκευάζοντας έτσι τον παρακάτω πίνακα μετάβασης*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{3}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε τις οριακές πιθανότητες κάτω από το σύνολο S_2 *(δηλαδή τις* P_{ij}^n *για* $i = 8, 9$ *και* $j = 4, 5, 6, 7$*) όπως το παράδειγμα 105 χρησιμοποιώντας τον πίνακα* B.

Οι υπόλοιπες οριακές πιθανότητες υπολογίζονται κα-

τά τα γνωστά. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 107 *Θα εξετάσουμε την αλυσίδα με χώρο καταστάσεων το* $S = \{0, 1, 2, \cdots, \}$ *και πίνακα μετάβασης τον*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & q & 0 & p & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι αποτελείται από ένα κλειστό σύνολο επαναληπτικών και απεριοδικών καταστάσεων, το $A = \{0, 1\}$. *Οι καταστάσεις* $T = \{2, 3, \cdots, \}$ *συνεπικοινωνούν και είναι μεταβατικές. Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες της αλυσίδας. Οι οριακές πιθανότητες που βρίσκονται στις στήλες* $2, 3, \cdots,$ *είναι μηδέν διότι οι αντίστοιχες καταστάσεις είναι μεταβατικές. Για να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες* $P_{00}^{\infty}, P_{01}^{\infty}, P_{10}^{\infty}, P_{11}^{\infty}$ *θα εργαστούμε στον πεπερασμένο υποπίνακα που προκύπτει από τον αρχικό διαγράφοντας* τις γραμμές και στήλες που ανήκουν οι καταστάσεις $2, 3, \cdots,$. Υπολογίζουμε την στάσιμη κατανομή η οποία είναι η $\pi_0 = 0.4$ και $\pi_1 = 0.6$. Αρα

$$\begin{aligned} P_{00}^{\infty} = P_{10}^{\infty} = 0.4 \\ P_{01}^{\infty} = P_{11}^{\infty} = 0.6 \end{aligned}$$

Επομένως μένει να υπολογίσουμε τις πιθανότητες P_{i0}^{∞} και P_{i1}^{∞} για $i = 2, 3, \cdots$, Θα έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} P_{i0}^{\infty} &= \frac{h_i^{\{0\}}}{m_0}, \quad i = 2, 3, \cdots, \\ P_{i1}^{\infty} &= \frac{h_i^{\{1\}}}{m_1}, \quad i = 2, 3, \cdots, \end{aligned}$$

όπου $m_0 = \frac{1}{\pi_0} = \frac{5}{2}$ και $m_1 = \frac{1}{\pi_1} = \frac{5}{3}$. Λόγω της παρατήρησης 65 προκύπτει ότι $h_i^{\{0\}} = h_i^A$ και $h_i^{\{1\}} = h_i^A$ όπου $A = \{0, 1\}$.

Αν θεωρήσουμε την ισοδύναμη αλυσίδα με χώρο καταστάσεων το $\{A, 2, 3, \cdots, \}$ και πίνακα μετάβασης τον πίνακα μετάβασης του παραδείγματος 74 διαπιστώνου-

με ότι

$$h_i^A = \begin{cases} 1, & \text{όταν } q \geq p \\ \left(\frac{q}{p}\right)^i, & \text{όταν } q < p \end{cases}$$

Τελικά οι οριακές πιθανότητες θα είναι

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \frac{h_2^A}{m_0} & \frac{h_2^A}{m_1} & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \frac{h_3^A}{m_0} & \frac{h_3^A}{m_1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση $q < p$ το άθροισμα γραμμών είναι αυστηρά μικρότερο της μονάδας, εκτός από τις πρώτες δυο γραμμές που είναι ίσο με 1. Ας θυμηθούμε ότι ο πίνακας με τις οριακές πιθανότητες είναι στοχαστικός αν η αλυσίδα είναι πεπερασμένη (δείτε πρόταση 88). Δεν συμβαίνει το ίδιο όμως για αλυσίδες με άπειρες καταστάσεις και ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το παραπάνω όταν $q < p$. □

Σε μια αλυσίδα μας ενδιαφέρει συχνά η εύρεση των πιθανοτήτων $P(X_n = j)$ και $P(X_n = j|X_0 = i)$ όπου και στις δυο εμφανίζεται ο υπολογισμός του P^n. Στην περίπτωση που η αλυσίδα έχει πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων έχουμε περιγράψει μια μέθοδο υπολογισμού του πίνακα P^n είτε αυτός είναι διαγωνοποιήσιμος είτε όχι. Σε αλυσίδες με άπειρο πλήθος καταστάσεων η τεχνική αυτή δεν μπορεί να εφαρμοσθεί. Σε περιπτώσεις που θέλουμε να υπολογίσουμε τις παραπάνω πιθανότητες για μεγάλο n μπορούμε να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες, δηλαδή τις

$$\lim_{n\to\infty}(P^n)_{ij}$$

Τότε, για μεγάλο n, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι περίπου ίση με την οριακή. Για την εύρεση των οριακών πιθανοτήτων σημαντικό ρόλο θα διαδραματίσει η περίοδος των επαναληπτικών καταστάσεων. Όταν κάποιες καταστάσεις έχουν περίοδο μεγαλύτερη ή ίση του 2 τότε η ακολουθία πινάκων P^n δεν έχει όριο αλλά όμως έχει συγκλίνουσες υποακολουθίες. Έτσι η εκτίμηση της πιθανότητας

$(P^n)_{ij}$ για μεγάλο n αλλάζει ανάλογα με το n, π.χ. αν είναι άρτιος ή περιττός αριθμός. Τα εργοδικά θεωρήματα μπορούν να εφαρμοσθούν εύκολα μιας και δεν επηρεάζονται από την περιοδικότητα όμως απαντούν σε «ελαφρώς» διαφορετικό ερώτημα. $\square$

Για το παραπάνω θέμα έχουμε τα εξής αποτελέσματα (δείτε εργασία για αποδείξεις κ.τ.λ.).

ΘΕΩΡΗΜΑ 108 *Έστω ότι $d = lcm\{d_1, d_2, \cdots ,\} < \infty$ όπου $d_1, d_2, \cdots$ είναι οι περίοδοι των επαναληπτικών καταστάσεων και d το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους. Τότε ισχύει ότι*

$$\lim_{n\to\infty} P^{nd+a} = P^a \cdot \lim_{n\to\infty} P^{nd}$$

Το παραπάνω θεώρημα είναι πρακτικό διότι η αλυσίδα Y_n με πίνακα μετάβασης τον $Q := P^d$ είναι απεριοδική επομένως ισχύει ότι

$$Q^\infty := \lim_{n\to\infty} P^{nd} = \begin{cases} \frac{f_{ij}^Q}{m_j^Q}, & \text{όταν } j \text{ είναι θετικά επαναληπτική} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

όπου m_j^Q είναι ο μέσος χρόνος επαναφοράς της κατάστασης j στην αλυσίδα Y_n και f_{ij}^Q είναι η πιθανότητα η αλυσίδα Y_n να βρεθεί στην κατάσταση j ξεκινώντας από την i. Για συγκεκριμένες καταστάσεις i, j έχουμε το παρακάτω θεώρημα. Θεωρούμε μια νέα αλυσίδα Y_n με πίνακα μετάβασης τον $Q^{d(j)}$ όπου $d(j)$ είναι η περίοδος της j.

ΘΕΩΡΗΜΑ 109 *Έστω X_n μια διακριτού χρόνου Μαρκοβιανή αλυσίδα με διακριτό χώρο καταστάσεων S και πίνακα μετάβασης P. Τότε*

$$\lim_{n\to\infty}(P^{d(j)n+a})_{ij} = \left(P^a \lim_{n\to\infty} P^{d(j)n}\right)_{ij} = \frac{d(j)}{m_j}\sum_{k\in S}(P^a)_{ik} f_{kj}^Q, \quad a = 0, \cdots, d(j)-1$$

όπου $d(j)$ είναι η περίοδος της j εφόσον είναι επαναληπτική, m_j είναι ο μέσος χρόνος επαναφοράς της j στην αλυσίδα X_n και f_{kj}^Q είναι η πιθανότητα η αλυσίδα Y_n να μεταβεί κάποτε στην j ξεκινώντας από την i.

Σημειώστε ότι ισχύει $m_j = d(j)m_j^Q$ όπου m_j^Q είναι ο μέσος χρόνος επαναφοράς της κατάστασης j στην αλυσίδα Y_n.

Επιπλέον, το αποτέλεσμα αυτό είναι ισχυρότερο του εργοδικού. Ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 110 *Έστω X_n μια διακριτού χρόνου Μαρκοβιανή αλυσίδα με διακριτό χώρο καταστάσεων S και πίνακα μετάβασης P. Τότε*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}P_{ij}^{k}}{n} = \frac{1}{d}\sum_{a=0}^{d-1}(P^a\cdot Q^\infty)_{ij} = \frac{1}{d}\sum_{a=0}^{d-1}\lim_{n\to\infty}(P^{nd+a})_{ij}$$

όπου $Q^\infty := \lim_{n\to\infty}P^{nd}$ και d είναι η περίοδος της j.

Με λίγα λόγια, αν μια αλυσίδα έχει περιοδικές καταστάσεις τότε η ακολουθία των πιθανοτήτων P_{ij}^n δεν συγκλίνει αλλά έχει συγκλίνουσες υπακολουθίες τα όρια των οποίων μπορούμε να υπολογίσουμε με το θεώρημα 109. Το εργοδικό θεώρημα θα μας δώσει τον μέσο όρο των ορίων των υπακολουθιών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 111 *Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα που ικανοποιεί την εξίσωση ;; ονομάζεται* **αναστρέψιμη**. *Οι εξισώσεις ;; ονομάζονται* **ανάστροφες εξισώσεις ισορροπίας**.

ΘΕΩΡΗΜΑ 112 *Αν λ και P ικανοποιούν τις εξισώσεις ;; δηλαδή*

$$\lambda_i P_{ij} = \lambda_j P_{ji}, \quad i, j \in S$$

τότε η λ είναι τέτοια ώστε $\lambda P = \lambda$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 113 (ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΓΕΝΝΗΣΕΩΣ - ΘΑΝΑΤΟΥ) *Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες των οποίων οι καταστάσεις είναι τοποθετημένες με τέτοιο τρόπο ώστε οι μεταβάσεις να είναι δυνατό να συμβούν μόνο από μια κατάσταση στην ίδια ή σε γειτονική της ονομάζονται* ***διαδικασίες γεννήσεως - θανάτου****. Η εφαρμογή του θεωρήματος 112 (δηλαδή η επίλυση των ανάστροφων εξισώσεων ισορροπίας ;;) είναι εφικτή σε όλες τις διαδικασίες γεννήσεως - θανάτου και είναι ιδιαίτερα βολικό στον υπολογισμό της στάσιμης κατανομής. Επομένως κάθε διαδικασία γεννήσεως - θανάτου με αρχική κατανομή την στάσιμη είναι χρονικά αναστρέψιμη (δες ;;). Στην συνέχεια θα δώσουμε τρία κλασικά παραδείγματα διαδικασιών γεννήσεως - θανάτου.*

- *Τυχαίος Περίπατος με Ανακλαστικά Εμπόδια.*

Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, \cdots, m\}$ *και πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 1-b & b & 0 & \cdots & 0 \\ 1-b & 0 & b & 0 & \cdots \\ 0 & 1-b & 0 & b & \cdots \\ \vdots & 0 & 1-b & 0 & b \\ 0 & \cdots & 0 & 1-b & b \end{pmatrix}$$

όπου $b \in (0, 1)$. *Η συγκεκριμένη αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και απεριοδική και λόγω του ότι είναι πεπερασμένη είναι και θετικά επαναληπτική (δες 87). Αυτό σημαίνει ότι έχει μοναδική στάσιμη κατανομή. Για να την υπολογίσουμε θα εφαρμόσουμε το θεώρημα 112 λύνοντας τις ανάστροφες εξισώσεις ισορροπίας. Διαλέγοντας* $j = i+1$ *οι ανάστροφες εξισώσεις ισορροπίας γίνονται*

$$\pi_i b = \pi_{i+1}(1-b), \quad i = 1, 2, \cdots, m-1$$

ή αλλιώς

$$\pi_{i+1} = \rho \pi_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m-1$$

όπου $\rho = \frac{b}{1-b}$. *Αναδρομικά προκύπτει ότι*

$$\pi_i = \rho^{i-1}\pi_1, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

Απαιτώντας $\sum \pi_i = 1$ *καταλήγουμε στο ότι*

$$\pi_i = \frac{\rho^{i-1}}{1 + \rho + \cdots + \rho^{m-1}}, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

Σύμφωνα με το θεώρημα 112 αυτή είναι η μοναδική στάσιμη κατανομή.

• ΘΕΩΡΙΑ ΟΥΡΩΝ. *Έστω ότι πακέτα φθάνουν σε ένα κόμβο δικτύου επικοινωνίας όπου αποθηκεύονται στη μνήμη προσωρινά και έπειτα αποστέλλονται. Η χωρητικότητα της μνήμης είναι* m. *Εάν* m *πακέτα είναι ήδη στη μνήμη τα καινούρια που έρχονται απορρίπτονται. Σε κάθε χρονική περίοδο θα συμβαίνει κάτι από τα παρακάτω: ένα καινούριο πακέτο φθάνει με πιθανότητα* $b > 0$. *Ένα υπάρχον πακέτο ολοκληρώνει την αποστολή του με πιθανότητα* $d > 0$ *όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα πακέτο στην μνήμη και με πιθανότητα 0 διαφορετικά. Κανένα καινούριο πακέτο δεν φθάνει και κανένα υπάρχον πακέτο δεν ολοκληρώνει την αποστολή του το οποίο συμβαίνει με πιθανότητα* $1 - b - d$

εάν υπάρχει τουλάχιστον ένα πακέτο στην μνήμη και με πιθανότητα $1-b$ διαφορετικά.

Κατασκευάζουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων

$$S = \{0, 1, \cdots, m\}$$

και πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 1-b & b & 0 & \cdots & 0 \\ d & 1-b-d & b & \cdots & 0 \\ 0 & d & 1-b-d & b & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d & 1-d \end{pmatrix}$$

Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη, απεριοδική και θετικά επαναληπτική επομένως έχει μοναδική στάσιμη κατανομή. Επειδή είναι μια αλυσίδα γεννήσεως - θανάτου μπορούμε να υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή εφαρμόζοντας το θεώρημα 112. Έτσι, οι ανάστροφες εξισώσεις ισορροπίας γίνονται

$$\pi_i b = \pi_{i+1} d, \quad i = 0, 1, \cdots, m-1$$

Θέτοντας $\rho = \frac{b}{d}$ *προκύπτει ότι*

$$\pi_i = \rho^i \pi_0, \quad i = 0, 1, \cdots, m$$

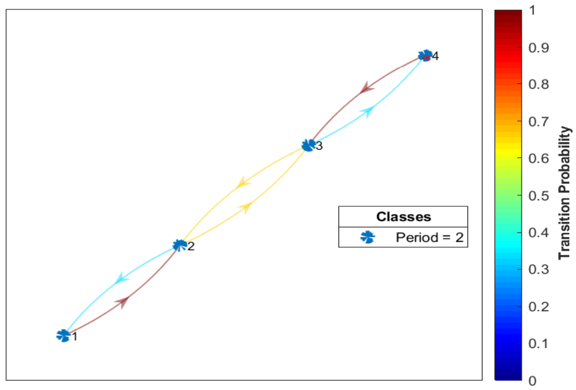
Απαιτώντας $\sum \pi_i = 1$ *καταλήγουμε στην μοναδική στάσιμη κατανομή η οποία είναι*

$$\pi_i = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}}\rho^i, & \text{όταν } \rho \neq 1 \\ \frac{1}{m+1}, & \text{όταν } \rho = 1 \end{cases} \qquad i = 0, 1, \cdots, m$$

• **Το μοντελο διαχυσης του Ehrenfest.** *Έστω ότι έχουμε δυο δοχεία τα οποία περιέχουν συνολικά* n *μόρια. Κάθε φορά επιλέγουμε τυχαία ένα από τα* n *μόρια (το οποίο βρίσκεται είτε στο δοχείο* A *είτε στο* B*) και το μεταφέρουμε στο άλλο δοχείο. Το πείραμα αυτό μοντελοποιεί την κίνηση ενός υγρού σε δυο όμοια συγκοινωνούντα δοχεία. Θα μελετήσουμε το πείραμα αυτό κατασκευάζοντας μια Μαρκοβιανή αλυσίδα.*

Θα θεωρήσουμε ότι $n = 3$ *και θα κατασκευάσουμε μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών* X_k *η τιμή της οποίας αναπαριστά το πλήθος των μορίων στο δοχείο* A *μετά από την* $k^{οστή}$ *μεταφορά μορίου. Δηλαδή* $X_k = i$ *όπου* $i = 0, 1, 2, 3$*. Προφανώς, για να μαντέψουμε σε* *ποια κατάσταση θα βρεθεί η ακολουθία στο αμέσως επόμενο βήμα αρκεί να γνωρίζουμε σε ποια κατάσταση βρίσκεται στο προηγούμενο βήμα και όχι νωρίτερα. Αρα αυτή η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων το* $S = \{0, 1, 2, 3\}$ *και πίνακα μετάβασης τον*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Σχήμα 10: Το γράφημα της αλυσίδας του μοντέλου διάχυσης του Ehrenfest για $n = 3$

Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και περιοδική με περίοδο 2. Τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση 0 είναι τα $C_0 = \{0, 2\}$ *και* $C_1 = \{1, 3\}$. *Θα υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες. Εφόσον είναι αδιαχώριστη θα υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή η οποία είναι* $\pi = (\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8})$ *οπότε σύμφωνα με το πόρισμα 97 οι μέσοι χρόνοι επαναφοράς είναι* $m_0 = 8 = m_3$ *και* $m_1 = \frac{8}{3} = m_2$.

Για να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες θα *χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα ;;. Έχουμε ότι*

$$P^{\infty 2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad P^{\infty 2+1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Αυτό σημαίνει ότι αν αφήσουμε το πείραμα να «τρέξει» πολλές φορές και το σταματήσουμε τυχαία σε κάποιο σημείο, δηλαδή με πιθανότητα $1/2$ *μετά από άρτιες επαναλήψεις και με πιθανότητα* $1/2$ *μετά από περιττές επαναλήψεις, τότε η πιθανότητα το δοχείο* A *να περιέχει 1 μόριο είναι* $3/8$, *να περιέχει 2 μόρια είναι επίσης* $3/8$ *ενώ η πιθανότητα να περιέχει 0 μόρια είναι* $1/8$ *το ίδιο όπως και 3 μόρια. Δηλαδή, όταν αφήσουμε το πείραμα να τρέξει πολλές φορές η μεγαλύτερη πιθανότητα είναι τα μόρια να είναι μοιρασμένα ανεξάρτητα από το πως ήταν τοποθετημένα στην αρχή. Οι πιθανότητες αυτές εκφράζονται από την στάσιμη κατανομή (δες ;;).*

Όταν έχουμε m μόρια ο πίνακας μετάβασης γίνεται

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & \frac{m-1}{m} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{m} & 0 & \frac{m-2}{m} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{i}{m} & 0 & \frac{m-i}{m} & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή λύνοντας τις ανάστροφες εξισώσεις ισορροπίας οι οποίες στην προκειμένη περίπτωση γίνονται

$$\pi_i = \frac{m-(i-1)}{i}\pi_{i-1}, \quad i = 1, \cdots, m$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\pi_i = \begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix} \pi_0, \quad i = 1, \cdots, m$$

Για να είναι στάσιμη κατανομή θα πρέπει $\sum \pi_i = 1$ *από* *το οποίο προκύπτει ότι*

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}} = \frac{1}{2^m}$$

αφού $2^m = (1+1)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}$ *(δες ;;).*

Τελικά η μοναδική στάσιμη κατανομή είναι η

$$\pi_j = \binom{m}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^m, \quad j = 0, 1, \cdots, m$$

Αν το πλήθος των μορίων είναι άρτιο τότε η ποσότητα π_j *μεγιστοποιείται όταν* $j = \frac{m}{2}$ *ενώ όταν είναι περιττός για* $j = [\frac{m}{2}]$ *και* $j = [\frac{m}{2}] + 1$. □

Μελέτη Μαρκοβιανής αλυσίδας

• (**Ανάλυση Συνόλου Καταστάσεων**) Το πρώτο που θα κάνουμε είναι να αναλύσουμε τον χώρο καταστάσεων σε μεταβατικές καταστάσεις και κλειστά και αδιαχώριστα σύνολα επαναληπτικών καταστάσεων, έστω τα $S_1, S_2, \cdots$, (δες θεώρημα 36). Εδώ μπορεί να είναι χρήσιμα τα θεωρήματα 29 και 30, ειδικά όταν πρόκειται για αλυσίδα με άπειρες καταστάσεις. Μπορούμε να αναδιατάξουμε τις καταστάσεις έτσι ώστε να είναι δίπλα-δίπλα οι καταστάσεις που ανήκουν στο ίδιο κλειστό και αδιαχώριστο σύνολο επαναληπτικών. Αφήνουμε τελευταίες όλες τις μεταβατικές καταστάσεις. Με αυτό τον τρόπο θα σχηματιστούν block στον (αναδιατεταγμένο) πίνακα μετάβασης και αυτό θα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο σε διάφορους υπολογισμούς.

• (Πιθανοτητες Απορροφησης και Μεσοι Χρονοι Απορροφησης) Στο σημείο αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες απορρόφησης $h_j^{S_a}$ όπου j μεταβατική κατάσταση και S_a ένα από τα κλειστά και αδιαχώριστα σύνολα επαναληπτικών (δες θεώρημα 64). Σημειώστε ότι αν $k \in S_a$ τότε $h_j^k = h_j^{S_a}$ (δες παρατήρηση 65). Παρόμοια, μπορούμε να υπολογίσουμε τους μέσους χρόνους απορρόφησης $k_i^{S_1 \cup S_2 \cup \cdots}$ (δες θεώρημα 69).

• (Περιοδικοτητα Καταστασεων) Στην συνέχεια μελετούμε την περιοδικότητα των καταστάσεων.

Για τις μεταβατικές καταστάσεις μπορούμε να δοκιμάσουμε να βρούμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη του συνόλου $\{n \in \mathbb{N} : f_n(i|i)\}$ όπου i μεταβατική κατάσταση (δες λήμμα 49) όπως επίσης και τα σύνολα κυκλικής μετάβασης.

Στα κλειστά σύνολα επαναληπτικών καταστάσεων θα είναι χρήσιμο να κατασκευάσουμε τα σύνολα κυκλικής μετάβασης και με τον τρόπο αυτό θα υπολογίσουμε την περίοδο των καταστάσεων σε κάθε τέτοιο σύνολο.

• (ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΣΩΝ ΧΡΟΝΩΝ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ) Θεωρούμε τις Μαρκοβιανές αλυσίδες (υποαλυσίδες) οι οποίες έχουν ως πίνακα μετάβασης τον πίνακα που προκύπτει αν διαγράψουμε γραμμές και στήλες καταστάσεων που δεν ανήκουν στο S_a. Υπολογίζουμε την στάσιμη κατανομή σε κάθε τέτοια υποαλυσίδα (αν υπάρχει) και με αυτό τον τρόπο έχουμε υπολογίσει τους μέσους χρόνους επαναφοράς (δες πόρισμα 97). Στην περίπτωση που πρόκειται για αλυσίδα γεννήσεως - θανάτου ένας βολικός τρόπος υπολογισμού της στάσιμης κατανομής είναι μέσω των ανάστροφων εξισώσεων ισορροπίας (δες παράδειγμα 113). Αν δεν υπάρχει λύση των στάσιμων εξισώσεων τότε είτε η υποαλυσίδα είναι μηδενικά επαναληπτική οπότε οι μέσοι χρόνοι επαναφοράς είναι $m_j = \infty$ για $j \in S_a$ είτε είναι μεταβατική.

• (**Ευρεση Οριακων Πιθανοτητων**) Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες.

Οι στήλες κάτω από τις μεταβατικές καταστάσεις και κάτω από τις μηδενικά επαναληπτικές καταστάσεις έχουν μηδενικές οριακές πιθανότητες (δες 20).

Σε κάθε υποαλυσίδα επαναληπτικών καταστάσεων μπορούμε να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες αφού έχουμε ήδη υπολογίσει την περίοδο και τους μέσους χρόνους επαναφοράς χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα 86 και ;;. Σημειώστε ότι δεν ισχύει πάντοτε $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \pi_j$.

Οι πιθανότητες της μορφής P_{ij}^n όπου i μεταβατική και $j \in S_a$ με S_a απεριοδική έχουν ως όριο το κλάσμα $\frac{h_i^{S_a}}{m_j}$ όπου $h_i^{S_a}$ είναι η πιθανότητα μετάβασης στο σύνολο S_a ξεκινώντας από την i. Τις $h_i^{S_a}$ τις υπολογίζουμε από το θεώρημα 64.

Αν S_a είναι περιοδική τότε εφαρμόζουμε το θεώρημα ;; (δες επίσης και ενότητα 0.7).

Βολικό επίσης είναι το ενδεχόμενο ο πίνακας μιας υποαλυσίδας να είναι διπλά στοχαστικός (δες 100).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 114 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα στο χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2\}$ και πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

Θα υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή $\pi = (\pi_1, \pi_2)$. Θα ικανοποιεί το σύστημα $\pi P = \pi$ καθώς και την εξίσωση κανονικοποίησης $\pi_1 + \pi_2 = 1$. Η μοναδική λύση των εξισώσεων είναι $\pi_1 = \frac{b}{a+b}$ και $\pi_2 = \frac{a}{a+b}$. Δηλαδή, το όριο

$$\lim_{n\to\infty} P^n_{i1} = \pi_1, i = 1, 2$$

και

$$\lim_{n\to\infty} P^n_{i2} = \pi_2, i = 1, 2$$

το οποίο είναι ήδη γνωστό από προηγούμενη άσκηση.

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 115 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3\}$ και πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & p \\ p & q & 0 \end{pmatrix}$$

με $p+q = 1$ και $pq > 0$. Εξετάστε τα όρια $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$. Να εξεταστεί ως προς την περίοδο.

ΛΥΣΗ. Εύκολα βλέπουμε ότι η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και πεπερασμένη. Αρα όλες οι καταστάσεις είναι θετικά επαναληπτικές.
Όσον αφορά την περιοδικότητα, υπολογίζουμε τους πίνακες P^2 και P^3 και εύκολα βλέπουμε ότι η αλυσίδα είναι απεριοδική. Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε την περιοδικότητα μέσω των πιθανοτήτων $f_n(1|1)$. Βλέπουμε ότι $f_1(1|1) = 0$, $f_2(1|1) > 0$ διότι μπορεί να ακολουθήσει το μονοπάτι $1 \to 2 \to 1$. Τέλος, $f_3(1|1) > 0$ διότι μπορεί να ακολουθήσει το μονοπάτι $1 \to 2 \to 3 \to 1$.

Ο πίνακας είναι διπλά στοχαστικός επομένως οι οριακές πιθανότητες είναι

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \frac{1}{3}$$

Οι μέσοι χρόνοι επαναφοράς είναι $m_i = 3$ για $i = 1, 2, 3$. $\square$

Παραδειγμα 116 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με σύνολο καταστάσεων*

$$S = \{0, 1, 2, \cdots\}$$

και πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & \dots \\ q & 0 & p & \dots \\ q & 0 & 0 & p \\ \vdots & 0 & 0 & \vdots \end{pmatrix}$$

με $p + q = 1$ και $pq > 0$. Διαπιστώνουμε ότι οι καταστάσεις της αλυσίδας επικοινωνούν μεταξύ τους και άρα η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη. Επίσης είναι απεριοδική αφού $q > 0$.

Θα υπολογίσουμε τώρα την

$$f_n(0|0) = P_{01}P_{12}\cdots P_{23}\cdots P_{n-1,0} = p^{n-1}q.$$

Γνωρίζοντας την $f_n(0|0)$ *μπορούμε να αποφασίσουμε αν η κατάσταση* 0 *(άρα και οι υπόλοιπες) είναι επαναληπτική. Πράγματι,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0|0) = q\frac{1}{1-p} = 1$$

Επομένως, όλες οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές. Επίσης,

$$m_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n(0|0) = \sum_{n=1}^{\infty} nqp^{n-1} = \frac{1}{q}$$

Επομένως όλες οι καταστάσεις είναι θετικά επαναληπτικές. Δείξτε ότι η στάσιμη κατανομή είναι η $\pi = (\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_n, \cdots)$ *με* $\pi_k = (1-p)p^k, k = 0, 1, 2, \cdots$ *Προκύπτει ότι*

$$\lim_{n\to\infty} P_{ik}^n = \pi_k = \frac{1}{m_k}$$

για $k = 0, 1, \cdots$. *Αν υποθέσουμε ότι η αλυσίδα ξεκινά από την κατάσταση* j, *πόσες φορές κατά μέσο όρο θα επισκεφτεί την* i *πριν ξαναγυρίσει στην* j; *Χρησιμοποιώντας την παρατήρηση ;; μπορούμε να υπολογίσουμε το μέσο πλήθος επισκέψεων στην κατάσταση* i *μεταξύ δυο διαδοχικών επισκέψεων στην κατάσταση* j, *δηλαδή να απαντήσουμε στο προηγούμενο ερώτημα. Αυτό θα είναι ίσο με*

$$\frac{\pi_i}{\pi_j} = p^{i-j}$$

Μια γενίκευση αυτής της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι η αλυσίδα με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & 1-p_0 & 0 & \dots \\ p_1 & 0 & 1-p_1 & \dots \\ p_2 & 0 & 0 & 1-p_2 \\ \vdots & 0 & 0 & \vdots \end{pmatrix}$$

με $0 < p_i < 1$ *για* $i = 0, 1, 2, \cdots$. *Η αλυσίδα είναι πάλι αδιαχώριστη αφού* $p_i > 0$ *για όλα τα* i *άρα όλες οι καταστάσεις χαρακτηρίζονται το ίδιο ως προς την επαναληπτικότητα. Επομένως η αλυσίδα θα είναι μεταβα-*

τική **αν και μόνο αν** *είναι μεταβατική η κατάσταση* 0. *Αν η αλυσίδα βρεθεί στην κατάσταση* 0 *τότε το μόνο πιθανό μονοπάτι στο οποίο δεν ξαναγυρνά είναι το* $0 \to 1 \to 2 \to \cdots$. *Η πιθανότητα να ακολουθήσει η αλυσίδα αυτό το μονοπάτι είναι* $(1-p_0)\cdot(1-p_1)\cdots$. *Η πιθανότητα αυτή δηλαδή είναι ίση με την πιθανότητα η αλυσίδα να φύγει από την κατάσταση* 0 *και να μην επιστρέψει ποτέ. Συνεπώς, αν είναι θετική τότε η κατάσταση* 0 *είναι μεταβατική ενώ αν είναι μηδέν είναι επαναληπτική. Δηλαδή η αλυσίδα είναι μεταβατική* **αν και μόνο αν**

$$\prod_{i=0}^{\infty}(1-p_i) > 0$$

ή αλλιώς

$$\prod_{i=0}^{\infty}\frac{1}{1-p_i} < \infty$$

Ας εφαρμόσουμε και το θεώρημα 29 για να δούμε αν συμφωνεί με το παραπάνω συμπέρασμα. Διαλέγουμε

$s = 0$ και σχηματίζουμε το σύστημα εξισώσεων

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} P_{ij} y_j, \quad i = 1, 2, \cdots , \tag{6}$$

Διαπιστώνουμε ότι

$$y_n = \frac{1}{1 - p_{n-1}} y_{n-1}$$

επομένως

$$y_n = y_1 \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 - p_i}$$

Εφόσον $\frac{1}{1-p_i} > 1$ έπεται ότι η ακολουθία

$$x_n = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 - p_i}$$

είναι αύξουσα. Αν η ακολουθία αυτή συγκλίνει στο ∞ τότε υποχρεωτικά θα πρέπει να διαλέξουμε $y_1 = 0$ και τότε η αλυσίδα θα είναι επαναληπτική. Αν όμως η ακολουθία συγκλίνει σε κάποιο $A < \infty$ τότε μπορούμε να διαλέξουμε $y_1 = \frac{1}{A}$ και επομένως η

$$y_n = y_1 \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-p_i}$$

θα είναι μια μη μηδενική και φραγμένη από την μονάδα λύση του συστήματος των εξισώσεων 6. Τελικά η αλυσίδα θα είναι μεταβατική **αν και μόνο αν**

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_i} < \infty$$

ή αλλιώς

$$\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{1-p_i} - 1\right) < \infty$$

Χρησιμοποιώντας την πρόταση ;; καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η αλυσίδα είναι μεταβατική **αν και μόνο αν**

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{1-p_i} < \infty$$

Στην προκειμένη περίπτωση ισχύει ότι (δες παράδειγμα ;;)

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{1-p_n} < \infty$$

Για παράδειγμα αν $p_n = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$ *για* $n \geq 2$ *τότε προκύπτει ότι*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n}{1-p_n} = \infty$$

δηλαδή η αλυσίδα είναι επαναληπτική ενώ αν $p_n = \frac{1}{n^2}$ *τότε*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n}{1-p_n} < \infty$$

και επομένως είναι μεταβατική.
Στην περίπτωση όπου οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές τότε θα υπάρχει στάσιμη κατανομή αν και μόνο αν (δες πόρισμα ;;) οι καταστάσεις είναι θετικά επαναληπτικές. Υπολογίζοντας την στάσιμη κατανομή εύκολα

βλέπουμε ότι κάθε στοιχείο του διανύσματος π *έχει την μορφή* $\pi_k = \pi_0(1-p_0)\cdots(1-p_{k-1})$ *οπότε χρησιμοποιώντας την εξίσωση κανονικοποίησης προκύπτει ότι*

$$\pi_0 = \frac{1}{1+1-p_0+\sum_{k=2}^{\infty}(1-p_0)\cdots(1-p_{k-1})} \tag{7}$$

Για να υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις $\pi P = \pi$ *εκτός από την πρώτη (δες παρατήρηση 84). Από αυτές θα πάρουμε εύκολα το συμπέρασμα ότι* $\pi_k = \pi_0(1-p_0)\cdots(1-p_{k-1})$ *και με την εξίσωση κανονικοποίησης το τελικό αποτέλεσμα που έχουμε πάρει παραπάνω.*

Αν η αλυσίδα είναι επαναληπτική τότε

$$\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-p_i} = \infty$$

το οποίο σημαίνει ότι $(1-p_0)\cdots(1-p_n) \to 0$ *καθώς* $n \to \infty$. *Παρότι τα γινόμενα* $(1-p_0)\cdots(1-p_n) \to 0$ *καθώς* $n \to \infty$ *υπάρχει περίπτωση όπου το άπειρο άθροισμα στην ισότητα 7 να αποκλίνει. Πράγματι, αν*

$p_k = \frac{1}{k}$ *για* $k > 1$ *τότε τα γινόμενα είναι ίσα με* $(1-p_0)\cdot(1-p_1)\cdot(1-p_2)\cdots(1-p_k) = (1-p_0)\cdot(1-p_1)\cdot\frac{1}{k}$ *συγκλίνουν στο μηδέν όμως το άπειρο άθροισμα αποκλίνει διότι έχει γενικό όρο τον* $\frac{1}{k}$ *και ως γνωστό η σειρά αποκλίνει οπότε σε αυτή την περίπτωση η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και μηδενικά επαναληπτική.*
Οι οριακές πιθανότητες είναι ίσες με μηδέν και στις δυο περιπτώσεις όπου οι καταστάσεις δεν είναι θετικά επαναληπτικές. Στην πρώτη περίπτωση όπου όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές έχουμε αποδείξει ότι $P_{ij}^n \to 0$ *καθώς* $n \to \infty$. *Όταν οι καταστάσεις είναι μηδενικά επαναληπτικές τότε οι καταστάσεις έχουν μέσο χρόνο επαναφοράς* $m_i = \infty$ *επομένως από το θεώρημα 86 προκύπτει ότι οι οριακές πιθανότητες είναι πάλι μηδέν. Στην περίπτωση που είναι θετικά επαναληπτικές τότε οι οριακές πιθανότητες είναι ίσες με* $\pi_i = \frac{1}{m_i}$. □

ΑΣΚΗΣΗ 117 *Αποδείξτε ότι σε έναν συμμετρικό τυχαίο περίπατο (δηλαδή* $p = 1/2$*) η κατάσταση* 0 *είναι μηδενικά επαναληπτική. Τι μπορούμε να πούμε για τις υπόλοιπες καταστάσεις; Μπορείτε να υπολογίσετε όλες* *τις οριακές πιθανότητες;*

ΛΥΣΗ. Αρχικά, από το θεώρημα ;; βγάζουμε το συμπέρασμα ότι όλες οι καταστάσεις είναι είτε μηδενικά επαναληπτικές είτε θετικά επαναληπτικές. Έστω ότι είναι θετικά επαναληπτικές. Τότε $m_i < \infty$ για κάθε $i \in \mathbb{Z}$ και επομένως, λόγω του θεωρήματος ;;, θα έπρεπε κάποιες οριακές πιθανότητες να είναι μη μηδενικές το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το θεώρημα 22. Αρα όλες οι καταστάσεις είναι μηδενικά επαναληπτικές. Το ότι $m_i = \infty$ σημαίνει ότι όλες οι οριακές πιθανότητες είναι μηδενικές. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 118 *Έστω η αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4\}$ και πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

και $p + q = 1$, και $pq > 0$. Υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$$

Υπολογίστε επίσης τους μέσους χρόνους επαναφοράς και την περιοδικότητα.

ΛΥΣΗ. Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη άρα όλες οι καταστάσεις είναι θετικά επαναληπτικές.

1ος τρόπος. Εξετάζοντας την αλυσίδα ως προς την περιοδικότητα βλέπουμε ότι $P^4 = P$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned} P^5 &= P^4 P = P^2, \\ P^6 &= P^4 P^2 = P^3, \\ P^7 &= P^4 P^3 = P P^3 = P^4 = P \end{aligned}$$

Επίσης, $P_{11}^{3k} > 0$ ενώ για κάθε άλλη δύναμη η αντίστοιχη πιθανότητα είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι καταστάσεις είναι περιοδικές με περίοδο 3. Οι οριακές πιθανότητες προκύπτουν εύκολα με την παρατήρηση ότι ο πίνακας επαναλαμβάνεται ανά τρεις δυνάμεις.

Για να υπολογίσουμε τους μέσους χρόνους επαναφοράς εργαζόμαστε στον πίνακα P^3 και θα χρησιμοποιήσουμε το πόρισμα ;;. Κατασκευάζουμε τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση 1 και έχουμε $C_0 = \{1, 2\}$, $C_1 = \{4\}$ και $C_2 = \{3\}$. Συνεπώς, οι μέσοι χρόνοι επαναφοράς των καταστάσεων $3, 4$ είναι $m_3 = m_4 = 3$. Για τις καταστάσεις $1, 2$ κατασκευάζουμε τον πίνακα P_{C_0} και υπολογίζουμε την στάσιμη κατανομή η οποία είναι (p, q). Συνεπώς, οι μέσοι χρόνοι επαναφοράς είναι $m_1 = \frac{3}{p}$ και $m_2 = \frac{3}{q}$.

2$^{\text{ος}}$ τρόπος. Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού των μέσων χρόνων επαναφοράς είναι η εύρεση της μοναδικής στάσιμης κατανομής, η οποία είναι

$$\pi = \left(\frac{p}{3}, \frac{q}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Στην συνέχεια, για να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα ;;. Για να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες της πρώτης γραμμής, δηλαδή τις $P_{11}^n, P_{12}^n, P_{13}^n, P_{14}^n$ κατασκευάζουμε τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση 1. Για να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες της δεύτερης γραμμής κατασκευάζουμε τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση 2 κ.τ.λ. Σημειώστε ότι τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση 1 και τα σύνολα με βάση την κατάσταση 2 είναι στην πραγματικότητα τα ίδια με την μόνη διαφορά ότι οι δείκτες των συνόλων έχουν μετακινηθεί μια θέση πίσω. Δηλαδή, η C_1 γίνεται C_0, η C_0 γίνεται C_2 κ.τ.λ.

3^{ος} τρόπος. Εφόσον η αλυσίδα είναι περιοδική με περίοδο 3 μπορούμε να εργαστούμε στην αλυσίδα Y_n με πίνακα μετάβασης τον P^3, δηλαδή τον

$$\begin{bmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Στην νέα αυτή αλυσίδα, οι καταστάσεις 1 και 2 ορίζουν ένα κλειστό και αδιαχώριστο σύνολο επαναληπτικών καταστάσεων, ενώ οι 3 και 4 είναι απορροφητικές. Υπολογίζουμε τους μέσους χρόνους επαναφοράς των 1 και 2 στην αλυσίδα Y_n εργαζόμενοι στην υποαλυσίδα με πίνακα μετάβασης αυτόν που θα προκύψει αν διαγράψουμε τις γραμμές και στήλες που περιέχουν τις καταστάσεις 3 και 4. Διαπιστώνουμε ότι η στάσιμη κατανομή της υποαλυσίδας αυτής είναι $\pi = (\pi_1, \pi_2) = (p, 1-p)$. Επομένως ο πίνακας των οριακών πιθανοτήτων $P^{3\infty} = \lim_{n\to\infty} P^{3n}$ είναι

$$P^{3\infty} = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επίσης θα ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} P^{3n+1} = P^{3\infty} \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} P^{3n+2} = P^{3\infty} \cdot P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p & 1-p & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 119 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με*

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

και πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Να υπολογισθούν τα όρια των πιθανοτήτων $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^n$, *οι πιθανότητες απορρόφησης και οι χρόνοι πρώτης εισόδου.*

ΛΥΣΗ. Η αλυσίδα χωρίζεται ως εξής,

$$\begin{aligned} S &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ &= \underbrace{\overbrace{\{5, 6\}}^{T}}_{\text{σύνολο μεταβατικών}} \bigcup \underbrace{\overbrace{\{1, 2\}}^{C_1} \cup \overbrace{\{3, 4\}}^{C_2}}_{\text{ένωση κλειστών συνόλων επαναληπτικών}} \end{aligned}$$

Κοιτώντας τις αλυσίδες με πίνακες μετάβασης C_1, C_2 εύκολα υπολογίζουμε τους μέσους χρόνους επαναφοράς m_1, m_2, m_3, m_4 υπολογίζοντας τις στάσιμες κατανομές για τις υποαλυσίδες, δηλαδή $m_j = \frac{1}{\pi_j}$, $j = 1, 2, 3, 4$.
Οι οριακές πιθανότητες $P_{i5}^n, P_{i6}^n \to 0$ για $i = 1, \cdots, 6$ διότι οι καταστάσεις $5, 6$ είναι μεταβατικές. Οι πιθανότητες h_i^j υπολογίζονται χρησιμοποιώντας το θεώρημα 64 και οι χρόνοι πρώτης εισόδου από το θεώρημα 69. Για να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες P_{ij}^n για $j = 1, 2, 3, 4$ θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 86, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \frac{h_i^j}{m_j}, \quad i = 1, \cdots, 6, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

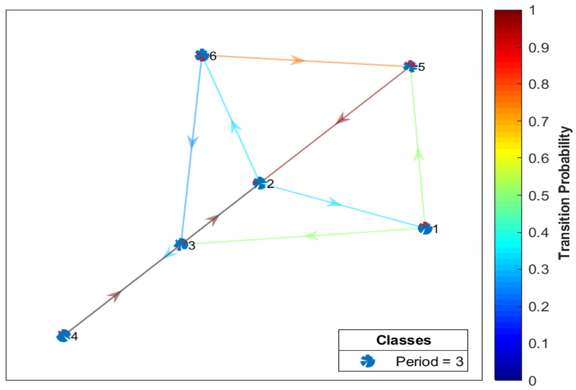
$\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 120 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με*

πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Αποδείξτε ότι η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και περιοδική με περίοδο 3. Υπολογίστε στην συνέχεια τους μέσους χρόνους επαναφοράς.



Σχήμα 11: Το γράφημα της αλυσίδας του παραδείγματος120

ΛΥΣΗ. Εύκολα βλέπουμε ότι η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη. Υπολογίζουμε τους πίνακες P^2 και P^3 και με την βοήθεια αυτών τους πίνακες P^4, P^5 διαπιστώνοντας ότι $P^2 = P^5$. Επίσης, βλέπουμε ότι $P^2_{11} = 0$, $P^3_{11} = 1/3$ και $P^4_{11} = 0$. Αρα, επαγωγικά αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$\begin{aligned} P^{3k+2} &= P^2, \quad k = 1, 2, \cdots \\ P^{3k} &= P^3, \quad k = 2, 3, \cdots \\ P^{3k+1} &= P^4, \quad k = 2, 3, \cdots \end{aligned}$$

Πράγματι, η πρώτη ισότητα ισχύει για $k = 2$ αφού

$P^6 = P^5 P = P^2 P = P^3$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο k και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $k+1$. Έχουμε $P^{3k+3} = P^{3k} P^3 = P^3 P^3 = P^6 = P^3$. Η δεύτερη ισότητα ισχύει για $k = 2$ αφού $P^7 = P^5 P^2 = P^2 P^2 = P^4$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο k και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $k+1$. Έχουμε $P^{3k+4} = P^{3k+1} P^3 = P^4 P^3 = P^7 = P^4$. Η τρίτη ισότητα ισχύει για $k = 1$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο k και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $k+1$. Έχουμε $P^{3k+5} = P^{3k+2} P^3 = P^2 P^3 = P^5 = P^2$. Βλέπουμε ότι η αλυσίδα είναι περιοδική με περίοδο 3. Το ίδιο αποτέλεσμα παίρνουμε μελετώντας τα σύνολα κυκλικής μετάβασης.

Τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση 1 είναι τα επόμενα

$$\begin{aligned} C_0 &= \{1, 4, 6\} \\ C_1 &= \{3, 5\} \\ C_2 &= \{2\} \end{aligned}$$

επομένως η περιοδικότητα είναι ίση με 3.

Το σύνολο $C_2 = \{2\}$ είναι μονοσύνολο επομένως η κατάσταση 2 έχει μέσο χρόνο επαναφοράς ίσο με την περίοδο, δηλαδή 3. Στην συνέχεια θα εξετάσουμε τον μέσο χρόνο επαναφοράς των 3 και 5. Θα κατασκευάσουμε τον πίνακα P_{C_1} αφού υπολογίσουμε τον P^3 και διαγράψουμε γραμμές και στήλες που δεν ανήκουν οι καταστάσεις 3 και 5. Έτσι σχηματίζεται ο πίνακας

$$P_{C_1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{5}{12} \\ \frac{7}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

και υπολογίζουμε την στάσιμη κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας με πίνακα μετάβασης τον P_{C_1}, η οποία είναι $\left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right)$. Αυτό σημαίνει ότι $m_3 = \frac{3}{\frac{7}{12}} = \frac{36}{7}$ και $m_5 = \frac{3}{\frac{5}{12}} = \frac{36}{5}$. Παρομοίως, για να υπολογίσουμε τους μέσους χρόνους επαναφοράς των 1,4 και 6.

Η αρχική αλυσίδα έχει μοναδική στάσιμη κατανομή σύμφωνα με το 97. Ποια είναι η σχέση της με τους μέσους χρόνους επαναφοράς; □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 121 *Θα υπολογίσουμε τα* $\lim_{n\to\infty} P_{43}^n$ *και* $\lim_{n\to\infty} P_{45}^n$ *της Μαρκοβιανής αλυσίδας με πίνακα μετάβα-*

σης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και σύνολο καταστάσεων το $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Είναι φανερό ότι

$$S = \underbrace{\{4\}}_{\text{μεταβατική κατάσταση}} \cup \underbrace{\{1, 2, 3\} \bigcup \{5\}}_{\text{ένωση κλειστών συνόλων επαναληπτικών καταστάσεων}}$$

Το σύνολο $\{1, 2, 3\}$ είναι ένα κλειστό σύνολο επαναληπτικών καταστάσεων το οποίο είναι περιοδικό με περίοδο 2. Πράγματι, κατασκευάζοντας τα σύνολα κυκλικής μετάβασης ως προς την κατάσταση 1 έχουμε ότι $C_0 = \{1, 2\}$ και $C_1 = \{3\}$. Λόγω του ότι το ένα σύνολο είναι μονοσύνολο σημαίνει ότι η περίοδος είναι 2 αλλά επίσης και ο μέσος χρόνος επαναφοράς της κατάστασης 3 είναι ο $m_3 = 2$. Το σύνολο $\{1, 2, 3\}$ είναι κλει-

στό επομένως αν η αλυσίδα επισκεφθεί μια κατάσταση του συνόλου τότε θα απορροφηθεί στο σύνολο αυτό για πάντα. Από κει και μετά μπορούμε να την σκεφτούμε σαν μια νέα Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης αυτόν που προκύπτει αν διαγράψουμε γραμμές και στήλες των καταστάσεων οι οποίες δεν ανήκουν στο σύνολο αυτό. Έτσι προκύπτει ο πίνακας

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Η μοναδική στάσιμη κατανομή της νέας αλυσίδας είναι η

$$\pi = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

το οποίο σημαίνει ότι $m_1 = m_2 = 4$.

Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο όριο θα εφαρμόσουμε το θεώρημα ;;. Για τον λόγο αυτό πρέπει να υπολογίσουμε τα $f_{2k+1}(4|3)$ *και* $f_{2k}(4|3)$. *Βλέπουμε ότι* $f_1(4|3) = \frac{2}{5}$ *και* $f_2(4|3) = \frac{1}{5}$. *Επίσης* $f_m(4|3) = 0$ *για*

$m \geq 3$. *Συνεπώς έχουμε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} P_{43}^{2k+1} = \frac{d}{m_3}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1}(4|3)\right) = \frac{2}{5}$$

$$\lim_{n\to\infty} P_{43}^{2k} = \frac{d}{m_3}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_{2k}(4|3)\right) = \frac{1}{5}$$

Θα υπολογίσουμε το όριο $\lim_{n\to\infty} P_{42}^{n}$. *Έχουμε ότι*

$$\begin{aligned} f_1(4|2) &= \frac{1}{5} \quad (4 \to 2) \\ f_2(4|2) &= \frac{1}{5} \quad (4 \to 3 \to 2) \\ f_3(4|2) &= f_{2k+1}(4|2) = 0 \\ f_{2k}(4|2) &= \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{2k}(4|2) = \frac{2}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2}{5}$$

Αρα

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P_{42}^{2k+1} &= \frac{d}{m_2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1}(4|2)\right) = \frac{1}{10}\\ \lim_{n\to\infty} P_{42}^{2k} &= \frac{d}{m_2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_{2k}(4|2)\right) = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P_{41}^{2k+1} &= \frac{1}{10}\\ \lim_{n\to\infty} P_{41}^{2k} &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

λόγω του ότι η γραμμή πρέπει να αθροίζει στην μονάδα.

Για να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{n\to\infty} P_{45}^{n}$ *θα εφαρμόσουμε το θεώρημα 86. Επειδή*

$$f_{45} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(4|5) = f_1(4|5) = \frac{2}{5}$$

ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} P_{45}^{n} = \frac{f_{45}}{m_5} = \frac{2/5}{1}$$

Σημειώστε ότι $m_5 = 1$ *λόγω του ότι η 5 είναι απορροφητική.*

Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι στην προκειμένη περίπτωση ισχύει $P^2 = P^4$ *και* $P^3 = P^5$ *επομένως επαγωγικά έχουμε ότι* $P^{2k+1} = P^3$ *και* $P^{2k} = P^2$ *για* $k = 1, 2, \cdots$. *Με αυτό το αποτέλεσμα έχουμε όλες τις οριακές πιθανότητες.* $\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 122 *Ας μελετήσουμε την Μαρκοβιανή αλυσίδα με σύνολο καταστάσεων το* $S = \{0, 1, 2, \cdots, \}$ *και πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & r_0 & 0 & \cdots & \cdots \\ q_1 & p_1 & r_1 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & p_2 & r_2 & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix}$$

όπου $q_i r_i > 0$. *Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη άρα όλες οι καταστάσεις χαρακτηρίζονται το ίδιο ως προς την επαναληπτικότητα και περιοδικότητα.*

Επειδή η αλυσίδα είναι γεννήσεως - θανάτου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ανάστροφες εξισώσεις *ισορροπίας ;; για να υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή αν υπάρχει.*

Θα έχουμε λοιπόν

$$\pi_i P_{i,i+1} = \pi_{i+1} P_{i+1,i}, \quad i = 0, 1, \cdots ,$$

Αντικαθιστώντας τις πιθανότητες έχουμε ότι

$$\pi_i r_i = \pi_{i+1} q_{i+1}, \quad i = 0, 1, \cdots ,$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$\pi_{i+1} = \left(\frac{r_i}{q_{i+1}}\right) \pi_i, \quad i = 0, 1, \cdots ,$$

Συνεπώς

$$\pi_i = \left(\frac{r_0 r_1 \cdots r_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_i}\right) \pi_0, \quad i = 1, 2, \cdots ,$$

Προκειμένου το διάνυσμα $\pi = (\pi_0, \pi_1, \cdots ,)$ *να είναι η μοναδική στάσιμη κατανομή θα πρέπει να ισχύει και η εξίσωση κανονικοποίησης, δηλαδή* $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$. *Από την εξίσωση κανονικοποίησης προκύπτει ότι*

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{r_0}{q_1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_0 \cdots r_i}{q_1 \cdots q_{i+1}}}$$

Αν

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_0 \cdots r_i}{q_1 \cdots q_{i+1}} < \infty$$

τότε το διάνυσμα π *θα είναι η μοναδική στάσιμη κατανομή επομένως σε αυτή την περίπτωση η αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική λόγω του πορίσματος 97.*

Έστω ότι ισχύει

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_0 \cdots r_i}{q_1 \cdots q_{i+1}} < \infty$$

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να απαντήσουμε το εξής ερώτημα: Ποια είναι η πιθανότητα μετά από n *βήματα η αλυσίδα να βρεθεί στην κατάσταση* j*, ανεξάρτητα από την κατάσταση εκκίνησης της αλυσίδας; Σε αυτό μας βοηθά το πόρισμα (εργοδικό θεώρημα) 92 και επομένως η πιθανότητα είναι ίση με* π_j *(σημειώστε ότι* $f_{ij} = 1$ *αφού η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και* $\pi_j = \frac{1}{m_j}$*).*

Στην περίπτωση που θέλουμε να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες θα πρέπει να εξετάσουμε την πε-

ρίπτωση που η αλυσίδα είναι περιοδική. Αν για παράδειγμα $p_0 = p_1 = \cdots = 0$ *τότε η αλυσίδα είναι περιοδική και επομένως ο υπολογισμός των οριακών πιθανοτήτων θέλει ιδιαίτερη προσοχή.* $\square$

Ασκηση 123 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με* $S = \{1, 2\}$ *και πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Να υπολογισθούν οι οριακές πιθανότητες και οι μέσοι χρόνοι επαναφοράς.

Ασκηση 124 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με* $S = \{1, 2, 3, 4\}$ *και πίνακα μετάβασης,*

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Να υπολογισθούν οι οριακές πιθανότητες.

ΑΣΚΗΣΗ 125 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με* $S = \{1, 2, 3, 4\}$ *και πίνακα μετάβασης,*

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/9 & 1/3 & 4/9 & 1/9 \\ 1/4 & 1/8 & 1/8 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Να υπολογισθούν οι μέσοι χρόνοι επαναφοράς και οι οριακές πιθανότητες.

ΑΣΚΗΣΗ 126 *Να μελετηθεί η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πιθανούς πίνακες μετάβασης*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 2/6 & 1/12 & 1/12 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \quad P_6 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$P_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \quad P_8 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Η Στοχαστική Διαδικασία Poisson

Υποθέστε ότι μελετούμε την άφιξη πελατών σε ένα κατάστημα καταγράφοντας τον χρόνο που μεσολαβεί μεταξύ δυο αφίξεων. Ο χρόνος αυτός είναι προφανώς μια τυχαία μεταβλητή η τιμή της οποίας εξαρτάται από πολλούς παράγοντες τους οποίους δεν μπορούμε να καταγράψουμε και να αξιολογήσουμε. Ποια είναι η πιθανότητα να έχουν έρθει 10 πελάτες στο κατάστημα μετά από 30 λεπτά παρατήρησης;

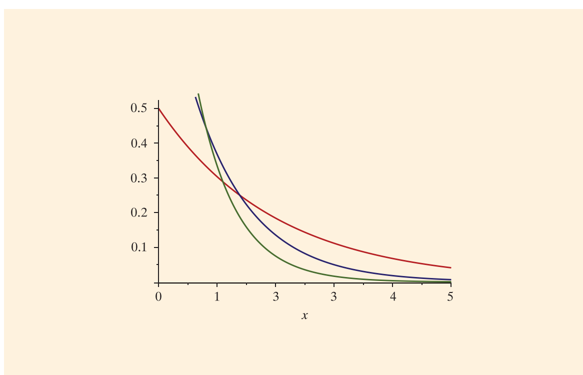
Γενικά υπάρχουν πολλά φαινόμενα (φυσική, οικονομικά κ.α.) τα όποια έχουν παρόμοια συμπεριφορά. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε το μαθηματικό πρόβλημα που προκύπτει από τα φαινόμενα αυτά. Θα περιγράψουμε την κατασκευή της στοχαστικής διαδικασίας Poisson και θα μελετήσουμε βασικές της ιδιότητες. Πρόκειται για την απλούστερη διαδικασία συνεχούς χρόνου με άπειρες καταστάσεις η οποία φαίνεται να μοντελοποιεί καλά τέτοιου είδους φαινόμενα.

Στην επόμενη ενότητα θα μελετήσουμε την εκθετική κατανομή η οποία διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην κατασκευή της διαδικασίας Poisson.

Η Εκθετική κατανομή

ΟΡΙΣΜΟΣ 127 (Εκθετική Κατανομή) *Θα λέμε ότι μια απόλυτα συνεχής τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την* **εκθετική κατανομή παραμέτρου** $\lambda > 0$ *αν η συνάρτηση πυκνότητας δίνεται από*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \textit{όταν } x \geq 0 \\ 0, & \textit{όταν } x < 0 \end{cases}$$



Σχήμα 12: Τα γραφήματα της συνάρτησης πυκνότητας μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Με κόκκινο είναι για $\lambda = 0.5$ με μπλε για $\lambda = 1$ και με πράσινο για $\lambda = 1.5$.

Όταν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή τότε η συνάρτηση κατανομής $F(x) = P(X \leq x)$ δίνεται από την

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{όταν } x \geq 0 \\ 0, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$$

Είναι εύκολο να υπολογίσουμε την μέση τιμή μιας τέτοιας τυχαίας μεταβλητής. Πράγματι,

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

Παρόμοια, η μέση τιμή του τετραγώνου είναι

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

και συνεπώς $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

Στην συνέχεια θα δώσουμε τον ορισμό των **χωρίς μνήμη** τυχαίων μεταβλητών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 128 *Θα λέμε ότι μια τυχαία μεταβλητή X έχει την ιδιότητα* **έλλειψης μνήμης** *αν*

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s), \quad \text{για κάθε } s, t \geq 0 \tag{8}$$

Ισχύει το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 129 *Η απόλυτα συνεχής τυχαία μεταβλητή X με $P(X > 0) = 1$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή παραμέτρου $\lambda > 0$* **ανν** *είναι τυχαία μεταβλητή με την ιδιότητα έλλειψης μνήμης.*

ΑΣΚΗΣΗ 130 *Έστω $x_1, \cdots, x_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν την εκθετική κατανομή παραμέτρου λ. Αποδείξτε ότι η $S_n = x_1 + \cdots + x_n$ ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους n και λ, δηλαδή η συνάρτηση πυκνότητας της S_n είναι η*

$$f_{S_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}}, & \text{όταν } t \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 131 *Σε ένα παιχνίδι ποδοσφαίρου έχει μετρηθεί ότι οι χρόνοι που σημειώνονται τέρματα ακολουθούν μια διαδικασία* ***Poisson*** *και κατά μέσο όρο σημειώνεται ένα τέρμα κάθε 15 λεπτά (δηλαδή $\lambda = \frac{1}{15}$).*

Σε 90 λεπτά, ποια είναι η πιθανότητα να σημειωθεί τέταρτο τέρμα στα τελευταία πέντε λεπτά του αγώνα; Η πιθανότητα αυτή είναι η $P(85 < S_4 \leq 90) = \int_{85}^{90} f_{S_4}(t)dt = \int_{85}^{90} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^3}{3!} dt$.

Δεδομένου ότι σημειώνονται τουλάχιστον τρία τέρματα, ποιος είναι , κατά μέσο όρο, ο χρόνος που σημειώνεται το τρίτο τέρμα; Η ποσότητα που ψάχνουμε είναι η $\mathbb{E}(S_3 | S_3 < 90) = \frac{\mathbb{E}(S_3 \mathbb{I}_{\{S_3<90\}})}{P(S_3<90)} = \frac{\int_0^{90} t f_{S_3}(t)dt}{\int_0^{90} f_{S_3}(t)dt}$. □

Κατασκευή της Διαδικασίας Poisson

Έστω $x_1, x_2, \cdots$, ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες αναπαριστούν τον χρόνο που μεσολαβεί μεταξύ δυο γεγονότων. Είναι συνηθισμένο στην πράξη οι τυχαίες αυτές μεταβλητές να ακολουθούν την εκθετική κατανομή παραμέτρου λ επομένως είναι λογικό να κάνουμε αυτή την υπόθεση και στην μαθηματική μας μελέτη.

Συμβολίζουμε με

$$S_n = x_1 + \cdots + x_n$$

τον συνολικό χρόνο μέχρι το n-οστό γεγονός. Θέτουμε επίσης $S_0 = 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 132 *Θα λέμε ότι η στοχαστική διαδικασία $N(t)$ με $t \geq 0$ είναι μια διαδικασία Poisson αν*

$$N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$$

όπου $S_n = x_1 + \cdots + x_n$ όπου $x_1, \cdots, x_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν την εκθετική κατανομή παραμέτρου λ.

Διαπιστώνουμε ότι ο ρόλος της $N(t)$ είναι να μετρά το πλήθος των γεγονότων που έχουν συμβεί μέχρι τον χρόνο t (και στην βιβλιογραφία είναι γνωστή ως απαριθμήτρια). Είναι προφανές ότι για κάθε t πρόκειται για μια τυχαία μεταβλητή (εξαρτάται από πολλούς παράγοντες τους οποίους δεν μπορούμε να αξιολογήσουμε) συνεπώς έχουμε να κάνουμε με μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών με δείκτη το t ο οποίος «τρέχει» σε όλο το $\mathbb{R}^+$.

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε την στοχαστική αυτή διαδικασία και θα εξηγήσουμε γιατί την ονομάσαμε διαδικασία Poisson.

Ορισμος 133 *Μια τυχαία μεταβλητή X θα λέμε ότι ακολουθεί την κατανομή Poisson παραμέτρου $a > 0$ αν*

$$P(X = n) = e^{-a}\frac{a^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \cdots ,$$

Το πρώτο σημαντικό αποτέλεσμα που θα αποδείξουμε είναι το επόμενο.

Θεωρημα 134 *Η στοχαστική διαδικασία $N(t)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson παραμέτρου λt, δηλαδή*

$$P(N(t) = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Ασκηση 135 *Υπολογίστε την μέση τιμή της $N(t)$.*

0.8 Η διαδικασία Poisson έχει στάσιμες προσαυξήσεις

Θα μελετήσουμε τις προσαυξήσεις $N(t + s) - N(t)$ δηλαδή την στοχαστική διαδικασία $M(s) = N(t+s)-$

$N(t)$ για δεδομένο και σταθερό $t > 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 136 *Θα λέμε ότι μια στοχαστική διαδικασία $X(t)$ έχει* **στάσιμες προσαυξήσεις** *όταν*

$$P(X(t+s) - X(t) = k) = p_k(s) \quad \text{για κάθε } t, s \geq 0$$

όπου η ποσότητα $p_k(s)$ δεν εξαρτάται από το t.

ΠΟΡΙΣΜΑ 137 *Η διαδικασία Poisson έχει στάσιμες προσαυξήσεις.*

0.9 Η διαδικασία Poisson έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις

ΠΡΟΤΑΣΗ 138 *Οι τυχαίες μεταβλητές S_n^t για $n = 1, 2, \cdots$, και $N(t)$ είναι ανεξάρτητες. Συνεπώς η προσαύξηση $N(t+s) - N(t)$ είναι ανεξάρτητη της $N(t)$ όταν $s > 0$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 139 *Έστω* $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ *και έστω* $N(t)$ *μια διαδικασία Poisson. Τότε οι προσαυξήσεις*

$N(t_n) - N(t_{n-1}), N(t_{n-1}) - N(t_{n-2}), \cdots, N(t_1)$

είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές για οποιαδήποτε επιλογή χρόνων $t_1, \cdots, t_n$.

0.10 Η διαδικασία Poisson είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα

ΟΡΙΣΜΟΣ 140 *Έστω μια στοχαστική διαδικασία* $X(t)$ *συνεχούς χρόνου με διακριτό σύνολο καταστάσεων. Θα λέμε ότι είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα όταν*

$$\begin{aligned} & P(\{X(t_n) = k_n\} | \{X(t_{n-1} = k_{n-1}\} \cap \cdots \cap \{X(t_1) = k_1\}) \\ = \; & P(\{X(t_n) = k_n\} | \{X(t_{n-1} = k_{n-1}\}) \end{aligned}$$

για $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ *ένα οποιοδήποτε σύνολο χρόνων και* $k_1, \cdots, k_n$ *οποιεσδήποτε καταστάσεις της διαδικασίας.*

ΠΟΡΙΣΜΑ 141 *Η διαδικασία Poisson είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης*

$$P(t) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda t} & e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)}{1!} & e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^2}{2!} & \cdots \\ 0 & e^{-\lambda t} & e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)}{1!} & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Τα στοιχεία του πίνακα $P(t)$ είναι τέτοια ώστε

$$P_{ij}(t) = P(\{N(t_0+t)=j\}|\{N(t_0)=i\}) = \begin{cases} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, & \text{όταν } i \leq j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

για οποιαδήποτε $t, t_0 \geq 0$.

□

0.11 Η διαδικασία Poisson είναι martingale

Κάθε τυχαία μεταβλητή $N(t)$ παράγει μια σ-άλγεβρα, την $\sigma(N(t))$ την οποία συμβολίζουμε με $\mathcal{F}_t$. Είναι φανερό ότι $\sigma(N(s)) \subseteq \sigma(N(t) = N(s) + N(t) - N(s))$

για $0 < s \leq t$. Κάθε οικογένεια σ-αλγεβρών η οποία είναι τέτοια ώστε $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ όταν $s < t$ ονομάζεται φίλτρο. Επίσης, αν μια στοχαστική διαδικασία $X(t)$ είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη, όπου $\mathcal{F}_t$ φίλτρο, τότε λέμε ότι η $X(t)$ είναι προσαρμοσμένη στο φίλτρο $\mathcal{F}_t$. Επειδή οι τυχαίες μεταβλητές $N(t) - N(s)$ και $N(s)$ είναι ανεξάρτητες έπεται ότι η $N(t) - N(s)$ είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}_s$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 142 *Μια προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία στο φιλτράρισμα $\mathcal{F}_t$ είναι martingale αν $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ και για κάθε $s < t$ έχουμε ότι $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 143 *Η στοχαστική διαδικασία $N(t) - \lambda t$ είναι martingale ως προς το φίλτρο που παράγει η διαδικασία Poisson.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το φίλτρο $\mathcal{F}_t = \sigma(N(t))$ είναι (εκ κατασκευής) τέτοιο ώστε η $N(t)$ να είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη. Επίσης

$$\mathbb{E}(N(t)) = \lambda t < \infty$$

Μένει να αποδείξουμε ότι

$$\mathbb{E}(N(t) - \lambda t|\mathcal{F}_s) = N(s) - \lambda s$$

όταν $s \leq t$.

Όμως

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(N(t) - \lambda t | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(N(t) - N(s) + N(s) - \lambda t | \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}(N(t) - N(s) | \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(N(s) - \lambda t | \mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(N(t) - N(s)) + N(s) - \lambda t \\
&= \lambda(t - s) + N(s) - \lambda t \\
&= N(s) - \lambda s
\end{aligned}
$$

□

Ισοδύναμοι ορισμοί της διαδικασίας Poisson

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τρεις ακόμη ορισμούς της διαδικασίας Poisson που εμφανίζονται συχνά στην βιβλιογραφία. Θα αποδείξουμε ότι και οι τέσσερις ορισμοί είναι ισοδύναμοι. Έτσι, σε εφαρμογές μπορούμε να χρησιμοποιούμε όποιον από τους ορισμούς θέλουμε ανάλογα με το τι είναι βολικότερο κάθε φορά.

Ορισμος 144 (Δεύτερος ορισμός διαδικασίας Poisson) *Η στοχαστική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ λέγεται στοχαστική διαδικασία Poisson παραμέτρου $\lambda > 0$ αν*

(i) $N(t) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *για κάθε* $t \geq 0$ *και* $N(0) = 0$,

(ii) *η διαδικασία έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις,*

(iii) $P(N(t+h) - N(t) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$,

(iv) $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h)$

όπου $o(h)$ *είναι μια ποσότητα τέτοια ώστε* $\lim_{h \to 0} \dfrac{o(h)}{h} = 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 145 (Τρίτος ορισμός διαδικασίας Poisson) *Η στοχαστική διαδικασία* $\{N(t), t \geq 0\}$ *λέγεται στοχαστική διαδικασία Poisson παραμέτρου* $\lambda > 0$ *αν*

(i) $N(t) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *για κάθε* $t \geq 0$ *και* $N(0) = 0$,

(ii) *η διαδικασία έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις,*

(iii) $P(N(t+s) - N(t) = n) = e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^n}{n!}$ *για* $n = 0, 1, \cdots$, *για κάθε* $s, t \geq 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 146 (Τέταρτος ορισμός διαδικασίας Poisson) *Μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου $\{N(t), t \geq 0\}$ με $N(0) = 0$ θα λέγεται διαδικασία Poisson παραμέτρου λ αν το σύνολο καταστάσεων είναι το $\mathbb{N} \cup \{0\}$ και ο πίνακας μετάβασης είναι ο*

$$P(t) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda t} & e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)}{1!} & e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^2}{2!} & \cdots \\ 0 & e^{-\lambda t} & e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)}{1!} & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Τα στοιχεία του πίνακα $P(t)$ είναι τέτοια ώστε

$$P_{ij}(t) = P(\{N(t_0 + t) = j\}|\{N(t_0) = i\}) = \begin{cases} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, & \text{όταν } i \leq j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

για οποιαδήποτε $t, t_0 \geq 0$.

Μερικές ιδιότητες της διαδικασίας Poisson

ΠΡΟΤΑΣΗ 147 *Ισχύει ότι*

$$P(S_0 < S_1 < \cdots < S_n < \cdots) = 1$$

Επιπλέον

$$P\left(\{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{\lambda} <\}\right) = 1$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 148 *Ισχύει ότι*

$$P\left(\{\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \lambda\}\right) = 1$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 149 (Ισχυρή Μαρκοβιανή Ιδιότητα) *Για κάθε $l \in \mathbb{N}$ η στοχαστική διαδικασία $N^l(t) = N(S_l + t) - l$ είναι επίσης διαδικασία Poisson παραμέτρου λ και η τυχαία μεταβλητή $N^l(t)$ είναι ανεξάρτητη των $x_1, \cdots, x_l$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 150 *Έστω $N^1(t)$ και $N^2(t)$ δυο ανεξάρτητες μεταξύ τους διαδικασίες Poisson παραμέτρων λ και μ αντίστοιχα. Τότε η στοχαστική διαδικασία $N(t) = N^1(t) + N^2(t)$ είναι επίσης διαδικασία Poisson παραμέτρου $\lambda + \mu$.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 151 *Σε μια στάση λεωφορείων περνούν τρία διαφορετικά λεωφορεία με διαφορετικούς προορισμούς. Το λεωφορείο A περνά κατά μέση τιμή μια φορά στα 10 λεπτά, το B μια φορά στα 15 λεπτά και το Γ μια φορά στα 20 λεπτά.*

Όταν κανείς φτάνει στην στάση, ποια είναι η πιθανότητα να έρθει πρώτο το λεωφορείο B; Αν συμβολίσουμε με x_A, x_B, x_Γ τους χρόνους για την πρώτη άφιξη των A,B,Γ λεωφορείων, τότε η πιθανότητα που μας ενδιαφέρει είναι η $P(\min\{x_A, x_B, x_\Gamma\} = x_B)$. Τότε θα ισχύει

$$P(\min\{x_A, x_B, x_\Gamma\} = x_B) = \frac{1/15}{1/10 + 1/15 + 1/20}$$

Φτάνοντας στην στάση πόσο χρόνο, κατά μέσο όρο, θα περιμένει κάποιος μέχρι να έρθει κάποιο από τα λεωφορεία; Η ποσότητα που μας ενδιαφέρει είναι η μέση τιμή της $\min\{x_A, x_B, x_\Gamma\}$. Η τυχαία αυτή μεταβλητή ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $(\lambda_A + \lambda_B + \lambda_\Gamma) = 1/10 + 1/15 + 1/20 = \frac{13}{60}$ και επομένως η μέση τιμή είναι η $\frac{60}{13}$. □

Έστω ότι σε ένα φαινόμενο το οποίο μοντελοποιείται από μια διαδικασία Poisson $N(t)$ παραμέτρου λ τα γεγονότα διακρίνονται σε δυο διαφορετικά είδη. Το γεγονός τύπου I συμβαίνει με πιθανότητα $p > 0$ και άρα το γεγονός τύπου II συμβαίνει με πιθανότητα $1 - p$. Θα δούμε στο επόμενο θεώρημα ότι η διαδικασία $M(t)$ η οποία μετρά το πλήθος των γεγονότων τύπου I είναι επίσης μια διαδικασία Poisson παραμέτρου $p\lambda$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 152 *Έστω $N(t)$ μια διαδικασία Poisson παραμέτρου λ και $p \in (0,1)$ της οποίας τα γεγονότα διακρίνονται σε δυο τύπους, τους τύπους I και II. Η στοχαστική διαδικασία που μετρά τα γεγονότα τύπου I είναι μια διαδικασία Poisson παραμέτρου $p\lambda$ όταν η πιθανότητα να συμβεί γεγονός τύπου I είναι ίση με p και είναι ανεξάρτητο από το προηγούμενο γεγονός.*

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε την δεσμευμένη πυκνότητα των $S_1, \cdots, S_m$ δεδομένου ότι έχουν γίνει m άλματα στο χρονικό διάστημα $(s, s+t)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 153 *Έστω $N(t)$ μια διαδικασία Poisson παραμέτρου λ. Για κάθε $s, t > 0$ και $m = 1, 2, \cdots$, η* *δεσμευμένη πυκνότητα των* $S_1, \cdots, S_m$ *δεδομένου ότι* $N(t+s) - N(t) = m$ *είναι ίση με*

$$f_{S_1,\cdots,S_m}(t_1,\cdots,t_m | m \text{ άλματα στο διάστημα } (s, s+t))$$
$$= \left(\frac{m!}{t^m}\right) \mathbb{I}_{\{s<t_1<\cdots<t_m<t+s\}}$$

Στην συνέχεια θα δώσουμε μερικά παραδείγματα (αν και όχι ρεαλιστικά) για την καλύτερη κατανόηση της θεωρίας που παρουσιάστηκε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 154 *Το μάθημα του Απειροστικού Λογισμού Ι ξεκινά στις 15:15 με περισσότερους από 500 εγγεγραμμένους φοιτητές. Έχει παρατηρηθεί ότι, στο χρονικό διάστημα 15:00-15:20, οι φοιτητές εισέρχονται στην αίθουσα με ρυθμό αφίξεων 30 φοιτητές ανά λεπτό. Θα μετρήσουμε την πιθανότητα να έρθουν περισσότεροι από 100 φοιτητές μεταξύ 15:15-15:20.*

Θα υποθέσουμε ότι αν $N(t)$ *είναι ο αριθμός των φοιτητών που έχει αφιχθεί στην αίθουσα την χρονική στιγμή* $t \in [15:00 - 15:20]$ *τότε η* $N(t)$ *είναι μια διαδικασία Poisson παραμέτρου* λt*. Έχουμε υπολογίσει την μέση τιμή μιας τέτοιας διαδικασίας και είναι* *ίση με* λt. *Δηλαδή, κατά μέσο όρο, περιμένουμε να έχουν αφιχθεί* λt *φοιτητές κατά το* t *λεπτό μετά τις 15:00 (χρόνος μηδέν). Επομένως, ο ρυθμός αφίξεων παριστάνεται από την παράμετρο* λ.

Μας ενδιαφέρει η πιθανότητα $P(N(15:20)-N(15:15)>100)$. *Λόγω του ότι η διαδικασία Poisson έχει στάσιμες προσαυξήσεις προκύπτει ότι*

$$\begin{aligned} P(N(15:20)-N(15:15)>100) &= P(N(15:05)>100) \\ &= 1-P(N(15:05)\leq 100) \\ &= 1-\sum_{k=0}^{100} e^{-30\cdot 5}\frac{(30\cdot 5)^k}{k!} \\ &\approx 0.99 \end{aligned}$$

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε την πιθανότητα να έχουν αφιχθεί ακριβώς 100 φοιτητές μέχρι τις 15:10 και 250 μέχρι τις 15:15. Δηλαδή μας ενδιαφέρει η πιθανότητα

$$P(N(15:10)=100, N(15:15)=250)$$

Όμως

$$\begin{aligned} & P(N(15:10)=100, N(15:15)=250) \\ = \; & P(N(15:10)=100, N(15:15)-N(15:10)=150) \\ = \; & P(N(15:10)=100)\cdot P(N(15:15)-N(15:10)=150) \text{ (λόγω ανε} \\ = \; & P(N(15:10)=100)\cdot P(N(15:05)=150) \text{ (λόγω στάσιμων προσαυ} \\ = \; & \left(\frac{e^{-30\cdot 10}(30\cdot 10)^{100}}{100!}\right)\cdot\left(\frac{e^{-30\cdot 5}(30\cdot 5)^{150}}{150!}\right) \end{aligned}$$

Σημειώστε ότι δεν είναι σωστό να γράψουμε $P(N(15:10)=100, N(15:15)-N(15:10)=150) = P(N(15:10)=100, N(15:05)=150) = P(N(15:10)=100)\cdot P(N(15:05)=150)$.

Ας υποθέσουμε στην συνέχεια ότι φθάνουν 100 φοιτητές στα πρώτα 5 λεπτά. Δεδομένου αυτού, ποια είναι η πιθανότητα να έρθουν 200 φοιτητές το πολύ μέχρι και τα 10 πρώτα λεπτά; Η πιθανότητα που μας ενδιαφέρει

$\epsilon \acute{\iota} \nu \alpha \iota\ \eta$

$$
\begin{aligned}
& P(N(15:10) \leq 200 | N(15:05) = 100) \\
= \ & P(N(15:10) - 100 \leq 100 | N(15:05) = 100) \\
= \ & P(N(15:10) - N(15:05) \leq 100) \\
= \ & P(N(15:05) \leq 100) \\
= \ & \sum_{k=0}^{100} \frac{e^{-30\cdot 5}(30 \cdot 5)^k}{k!}
\end{aligned}
$$

$\square$

1 Στοχαστικές Διαδικασίες Συνεχούς Χρόνου

1.1 Εισαγωγή

Έχουμε μελετήσει την στοχαστική διαδικασία Poisson η οποία είναι μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου και διακριτού πλήθους καταστάσεων. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε σε γενικότερο πλαίσιο τις συνεχείς στοχαστικές διαδικασίες με διακριτό σύνολο καταστάσεων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 155 *Μια συνεχούς χρόνου στοχαστική διαδικασία $X(t)$ με καταστάσεις στο σύνολο S (πεπερασμένου ή αριθμήσιμου πλήθους) θα λέμε ότι έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα αν για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι*

$$P(X(t) = j|X(s) = i, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \cdots, X(t_1) = i_1) = P(X(t) = j|X(s) = i)$$

όπου $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq s \leq t$ και $i_1, i_2, \cdots, i_{n-1}, j \in S$ οποιεσδήποτε καταστάσεις του συνόλου S. Στην περίπτωση αυτή θα ονομάζεται συνεχούς χρόνου Μαρκοβιανή αλυσίδα. Επιπλέον θα λέμε ότι πρόκειται για χρονικά ομοιογενής συνεχούς χρόνου Μαρκοβιανή αλυσίδα αν για κάθε $s \leq t$ και οποιεσδήποτε καταστάσεις $i, j \in S$ ισχύει ότι

$$P(X(t) = j|X(s) = i) = P(X(t-s) = j|X(0) = i) = p_{ij}(t-s)$$

Η χρονική ομοιογένεια είναι μια ιδιότητα η οποία απλουστεύει τα πράγματα αρκετά. Η αλυσίδα συμπεριφέρεται το ίδιο ανεξάρτητα του πότε ξεκίνησε και σε ποια κατάσταση βρίσκεται την παρούσα χρονική στιγμή.

Υπόθεση 1: Υποθέτουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $X(t)$ είναι χρονικά ομοιογενής.

Αν η αλυσίδα βρεθεί στην κατάσταση $i \in S$ τότε συμβολίζουμε με T_i τον χρόνο (αναμονής) μέχρι το επόμενο άλμα, δηλαδή μέχρι η αλυσίδα να αλλάξει κατάσταση. Θα δούμε στο επόμενο θεώρημα ότι η τυχαία μεταβλητή T_i ακολουθεί (υποχρεωτικά) την εκθετική κατανομή παραμέτρου $\lambda_i \geq 0$ δεδομένου του ορισμού 155 και της υπόθεσης 1.

ΘΕΩΡΗΜΑ 156 *Η τυχαία μεταβλητή T_i ακολουθεί την εκθετική κατανομή.*

Σε μια στοχαστική διαδικασία σε χρόνο συνεχή εκτός από τους χρόνους αναμονής T_i σημαντικό ρόλο διαδραματίζει και η πιθανότητα μετάβασης r_{ij} από την κατάσταση i στην j δεδομένου ότι η αλυσίδα θα κάνει κάποια στιγμή άλμα. Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα αυτή είναι ανεξάρτητη από τον χρόνο παραμονής στην κατάσταση i. Επομένως, σε μια αλυσίδα συνεχούς χρόνου, αντιστοιχεί και μια αλυσίδα διακριτού χρόνου με πίνακα μετάβασης τον $R = r_{ij}$ η οποία ονομάζεται ενσωματωμένη διακριτή αλυσίδα στην αλυσίδα συνεχούς χρόνου.

1.2 Ύπαρξη Στοχαστικής Διαδικασίας

Συνήθως στις εφαρμογές οι οποίες μοντελοποιούνται μέσω στοχαστικών διαδικασιών σε χρόνο συνεχή θα μας δίνονται οι παράμετροι $\lambda_i \geq 0$ και ο στοχαστικός πίνακας $R = r_{ij}$. Σε όλα τα επόμενα υποθέτουμε ότι $\sup_{i \in S} \lambda_i < \infty$.

Σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα υπάρχει στοχαστική διαδικασία σε χρόνο συνεχή η οποία ικανοποιεί ιδιότητες που συνήθως απαιτούνται στις εφαρμογές. Συμβολίζουμε με δ_{ij} την επόμενη απεικόνιση

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{όταν } i = j \\ 0, & \text{όταν } i \neq j \end{cases}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 157 (Θεώρημα Ύπαρξης) *Έστω* $S = \{1, 2, \cdots, \}$ *το σύνολο καταστάσεων και έστω* $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \}$ *τ.ω.* $\sum_{i \in S} \mu_i = 1$ *και* $\mu_i \geq 0$. *Αν* $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots,)$

με $\sup_{i\in S}\lambda_i<\infty$ και $\lambda_i\geq 0$ τότε υπάρχει στοχαστική διαδικασία $X(t)$ με $t\geq 0$ τ.ω.

(i) $t\to X(t)$ είναι δεξιά συνεχής και κατά τμήματα σταθερή,

(ii) $P(X(0)=i)=\mu_i$ για κάθε $i\in S$ και για $t\geq 0$ ισχύει ότι

$$\lim_{h\downarrow 0}\sup_{j\in S}\frac{1}{h}\left|P(X(t+h)=j|X(\tau),\tau\in[0,t])-(1-h\Lambda_{X(t)})\delta_{\{X(t),j\}}-h\Lambda_{X(t)}R_{\{X(t),j\}}\right|=0$$

Η στοχαστική διαδικασία $X(t)$ έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα και είναι η μοναδική η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες (i) και (ii). Αν $(P(t))_{ij}=P(X(t)=j|X(0)=i)$ τότε ισχύει ότι

$$P(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}Q^n$$

με $Q=\hat{\Lambda}(R-\mathbb{I})$ και $\hat{\Lambda}$ είναι διαγώνιος πίνακας όπου στην διαγώνιο βρίσκονται τα στοιχεία του Λ. Ο $P(t)$ είναι στοχαστικός πίνακας για κάθε $t\geq 0$.

1.2.1 Γενικά Σχόλια

Το θεώρημα 157 είναι εξαιρετικά σημαντικό περιέχοντας «συμπυκνωμένη» και σημαντική πληροφορία.

(i) Συχνά, για ένα φαινόμενο το οποίο μοντελοποιείται μέσω μιας στοχαστικής διαδικασίας σε συνεχή χρόνο, έχουμε ως δεδομένο το διάνυσμα Λ και τον πίνακα R. Η πληροφορία αυτή μας δίνεται με τον παρακάτω τρόπο.

Να μελετηθεί η στοχαστική διαδικασία $X(t)$ η οποία ικανοποιεί τα παρακάτω: Για $t_1, t_2, \cdots, \in [0, t)$ ισχύουν τα εξής όταν $h > 0$ αρκετά μικρό,

$$P(X(t+h)=j|X(t)=i, X(t_1)=s_1, X(t_2)=s_2, \cdots) \cong h\lambda_i r_{ij} + o(h), \quad i \neq j$$
$$P(X(t+h)=j|X(t)=i, X(t_1)=s_1, X(t_2)=s_2, \cdots) \cong 1 + h\lambda_i(r_{ii}-1) + o(h), \quad i = j$$

Σύμφωνα με το θεώρημα 157 υπάρχει τέτοια στοχαστική διαδικασία η οποία μάλιστα έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα, είναι δεξιά συνεχής και κατά τμήματα σταθερή. Επιπλέον, ισχύει το εξής

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Q^n$$

Έχοντας τον πίνακα $P(t)$ συνήθως μπορούμε να υπολογίσουμε ότι μας ζητούν. Πως όμως υπολογίζουμε τον πίνακα $P(t)$; Αν το σύνολο καταστάσεων S είναι πεπερασμένο τότε $P(t) = e^{tQ}$ και εύκολα μπορούμε να τον υπολογίσουμε. Στην περίπτωση όμως που το σύνολο καταστάσεων είναι άπειρο τότε θα πρέπει να εργαστούμε διαφορετικά, συνήθως μέσω των οπισθοδρομικών εξισώσεων Kolmogorov που θα δούμε παρακάτω. Παρατηρήστε επίσης ότι στον πίνακα μετάβασης R αντιστοιχεί μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου, η ενσωματωμένη αλυσίδα, η οποία κινείται παράλληλα με την αντίστοιχη διαδικασία συνεχούς χρόνου. Επομένως, ανάλογα το ερώτημα στο οποίο θέλουμε να απαντήσουμε, μπορούμε να μελετήσουμε την διακριτή διαδικασία προκειμένου να βγάλουμε κατάλληλα συμπεράσματα.

(ii) Ενδεχομένως, σε μια εφαρμογή να μας δίνουν τα παρακάτω: Να μελετηθεί η στοχαστική διαδικασία $X(t)$ για την οποία ισχύουν τα επόμενα. Για $t_1, t_2, \cdots, \in [0, t)$ ισχύουν τα εξής όταν $h > 0$

αρκετά μικρό,

$$P(X(t+h)=j|X(t)=i,X(t_1)=s_1,X(t_2)=s_2,\cdots)\cong hq_{ij}+o(h),\quad i\neq j$$
$$P(X(t+h)=j|X(t)=i,X(t_1)=s_1,X(t_2)=s_2,\cdots)\cong 1-q_{ii}h+o(h),\quad i=j$$

Δηλαδή μας δίνουν έναν πίνακα Q ο οποίος περιέχει τα q_{ij} αλλά είναι τέτοιος ώστε $\sup_{i\in S}|q_{ii}|<\infty$ και ταυτόχρονα για $i\neq j$ ισχύει ότι $q_{ij}\geq 0$. Επίσης $q_{ii}=-\sum_{k\neq i}q_{ik}$. Τότε θέτουμε $\Lambda_i=-Q_{ii}$ και $\hat{\Lambda}_{ij}=\delta_{ij}\Lambda_i$ δηλαδή ο πίνακας $\hat{\Lambda}$ είναι ο διαγώνιος πίνακας ο οποίος περιέχει στην διαγώνιο τα στοιχεία $-q_{ii}$. Επίσης, κατασκευάζουμε τον πίνακα R ως εξής

$$R_{ii}=\begin{cases}1, & \text{όταν } \Lambda_i=0\\ 0, & \text{όταν } \Lambda>0\end{cases}\qquad \text{ενώ για } i\neq j \text{ θέτουμε } R_{ij}=\begin{cases}0, & \text{όταν } \Lambda_i=0\\ \frac{Q_{ij}}{\Lambda_i}, & \text{όταν } \Lambda_i>0\end{cases}$$

Ο πίνακας Q ορίζει μια Μαρκοβιανή στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου με πίνακα μετάβασης τον

$$P(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}Q^n$$

Ισχύει το επόμενο θεώρημα το οποίο περιγράφει την κατασκευή της ενσωματωμένης αλυσίδας και παρέχει ιδιότητες της.

ΘΕΩΡΗΜΑ 158 (Η Ενσωματωμένη Αλυσίδα) *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα η οποία γεννάται από τον πίνακα Q και έστω Λ και R όπως ορίσθηκαν παραπάνω. Θέτουμε $J_0 = 0$ και*

$$
\begin{aligned}
J_n &= \inf\{t > J_{n-1} : X(t) \neq X(J_{n-1})\} \text{ για } n \geq 1 \\
X_n &= \begin{cases} X(J_n), & \text{αν } J_n < \infty \\ X_{n-1}, & \text{αν } n \geq 1 \text{ και } J_n = \infty \end{cases} \\
E_n &= \begin{cases} \Lambda_{X_{n-1}}(J_n - J_{n-1}), & \text{αν } J_n < \infty \\ 0, & \text{αν } J_n = \infty \end{cases}
\end{aligned}
$$

Επίσης θέτουμε $\zeta = \inf\{n \geq 0 : \Lambda_{X_n} = 0\}$. Τότε η X_n είναι μια (διακριτή) Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον πίνακα R και για κάθε $K \geq 1$ και $\{t_k : 1 \leq k \leq K\} \subseteq (0, +\infty)$ ισχύει ότι

$$
P(\{E_k > t_k, 1 \leq k \leq K\} \cap A) = e^{-\sum_{k=1}^{K} t_k} P(A)
$$

για κάθε $A \in \sigma(\{X_n : n \geq 0\})$ το οποίο περιέχεται στο $\{\zeta > K\}$.

1.2.2 Σχόλια στο θεώρημα 158

- Τα άλματα της αλυσίδας πραγματοποιούνται κατά τους χρόνους J_n (τυχαίες μεταβλητές). Αν για παράδειγμα η αλυσίδα ξεκινήσει από την κατάσταση i τότε στον χρόνο J_1 θα μεταβεί σε μια άλλη (διαφορετική) κατάσταση. Η αλυσίδα X_n (η ενσωματωμένη διακριτή αλυσίδα) είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα όπως αποδεικνύεται στο προηγούμενο θεώρημα. Η αλυσίδα αυτή κινείται παράλληλα με την αρχική αλυσίδα συνεχούς χρόνου και μάλιστα $X(J_n) = X_n$ δηλαδή συμπίπτει με την αρχική κατά τους χρόνους J_n. Επομένως, ορισμένα συμπεράσματα για την αρχική αλυσίδα μπορούν να προκύψουν μελετώντας (με τις γνωστές τεχνικές) την ενσωματωμένη διακριτή αλυσίδα X_n.

- Στην περίπτωση που $q_{ii} > 0$ για κάθε $i \in S$ τότε $\zeta = +\infty$ και επομένως $P(A) = 1$ στο παραπάνω θεώρημα. Επομένως, δεδομένου ότι $\Lambda_{X_{n-1}} = i$ (δηλαδή $X_{n-1} = X(J_{n-1}) = i$ και άρα πριν το J_n άλμα η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση i), προκύπτει από το παραπάνω θεώρημα ότι ο χρόνος αναμονής $J_n - J_{n-1}$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή παραμέτρου Λ_i, το οποίο έχουμε ήδη δει στο θεώρημα 156.

1.3 Εξισώσεις Chapman-Kolmogorov

Μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\begin{aligned} P'(t) &= P(t)Q = QP(t) \\ P(0) &= \mathbb{I} \end{aligned}$$

οι οποίες ονομάζονται εξισώσεις Chapman-Kolmogorov. Στην περίπτωση που το σύνολο καταστάσεων είναι άπειρο τότε ένας τρόπος υπολογισμού του πίνακα $P(t)$ είναι μέσω των εξισώσεων αυτών, χρησιμοποιώντας ίσως πιθανογεννήτριες συναρτήσεις.

1.4 Στάσιμη Κατανομή - Οριακές Πιθανότητες

Όπως και στις αλυσίδες διακριτού χρόνου, θα πρέπει να κατηγοριοποιήσουμε τις καταστάσεις σε δυο βασικές κλάσεις, επαναληπτικές και μεταβατικές. Επειδή σε μια στοχαστική διαδικασία αντιστοιχεί μια διακριτή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον R οι ορισμοί επαναληπτικότητας και μεταβατικότητας μπορούν να δοθούν σε σχέση με την ενσωματωμένη αλυσίδα.

(i) Αν $\lambda_i = 0$ τότε προφανώς η κατάσταση είναι απορροφητική και επομένως επαναληπτική.

(ii) Έστω $i \in S$ τέτοια ώστε $\lambda_i > 0$. Θα λέμε ότι είναι επαναληπτική αν είναι επαναληπτική στην ενσωματωμένη αλυσίδα X_n ως προς τον πίνακα R. Αντίστοιχα θα λέμε ότι είναι μεταβατική.

(iii) Έστω $i, j \in S$ τ.ω. $\lambda_i > 0$ και $\lambda_j > 0$. Θα λέμε ότι η i επικοινωνεί με την j και θα γράφουμε $i \to j$ αν αυτό συμβαίνει στην ενσωματωμένη αλυσίδα X_n. Αντίστοιχα θα λέμε ότι συνεπικοινωνούν και θα γράφουμε $i \leftrightarrow j$. Αν i επαναληπτική και $i \to j$ τότε και η j επαναληπτική. Αυτό προκύπτει από το αντίστοιχο αποτέλεσμα στην ενσωματωμένη αλυσίδα.

(iv) Θα ορίσουμε τον χρόνο πρώτης επίσκεψης στην κατάσταση i ως εξής

$$\sigma_i = \inf\{t \geq J_1 : X(t) = i\}$$

(v) Μια κατάσταση $i \in S$ είναι επαναληπτική ανν $P(\sigma_i < \infty | X(0) = i) = 1$. Σημειώστε επίσης ότι αν $P(\sigma_i = +\infty | X(0) = i) > 0$ (δηλαδή είναι μεταβατική) τότε $\mathbb{E}(\sigma_i | X(0) = i) = +\infty$. Αν i επαναληπτική και j μεταβατική τότε $i \nrightarrow j$ και επομένως $P(\sigma_j < \infty | X(0) = i) = 0$.

(vi) Αν η i είναι επαναληπτική και $\mathbb{E}(\sigma_i | X(0) = i) < \infty$ τότε θα λέμε ότι η i είναι θετικά επαναληπτική αλλιώς μηδενικά επαναληπτική.

ΘΕΩΡΗΜΑ 159 *Για οποιαδήποτε κατάσταση $i \in S$ τ.ω. $\Lambda_i > 0$ τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) *Η κατάσταση i είναι επαναληπτική.*

(ii) *Υπάρχει $t \in (0, +\infty)$ τ.ω. η κατάσταση i είναι επαναληπτική ως προς τον πίνακα μετάβασης $P(t)$.*

(iii) Η κατάσταση i είναι επαναληπτική ως προς τον πίνακα μετάβασης $P(t)$ για όλα τα $t \in (0, +\infty)$.

Στο επόμενο θεώρημα περιγράφουμε τις οριακές πιθανότητες και πως αυτές σχετίζονται με τις στάσιμες κατανομές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 160 *Για κάθε $j \in S$ το όριο*

$$\lim_{t \to \infty} (P(t))_{jj} = \pi_{jj}$$

υπάρχει και επίσης

$$\lim_{t \to \infty} (P(t))_{ij} = \pi_{ij} = P(\sigma_j < \infty | X(0) = i)\pi_{jj} \text{ όταν } i \neq j$$

Επιπλέον, αν $\pi_{jj} > 0$ τότε και $\pi_{ii} > 0$ για όλα τα $i \in C = \{i : i \leftrightarrow j\}$. Επίσης, αν $\pi_i^C = \mathbb{I}_C(i)\pi_{ii}$, τότε το π^C είναι για κάθε $s > 0$ η μοναδική στάσιμη κατανομή μ για τον πίνακα $P(s)$ η οποία είναι τέτοια ώστε $\mu_k = 0$ για $k \notin C$ και $\sum_{i \in S} \mu_i = 1$. Ακόμη, *ισχύουν τα παρακάτω*

$$\pi_{ii} = \begin{cases} 1, & \text{όταν } \Lambda_i = 0 \\ \frac{1}{\Lambda_i \mathbb{E}(\sigma_i | X(0)=i)}, & \text{όταν } \Lambda_i > 0 \end{cases}$$

$$\pi_{ij} = \begin{cases} \delta_{i,j} + (1-\delta_{i,j}) P(\sigma_j < \infty | X(0) = i), & \text{όταν } \Lambda_j = 0 \\ \pi_{jj} P(\sigma_j < \infty | X(0) = i), & \text{όταν } \Lambda_j > 0 \end{cases}$$

Τέλος, αν $\sup_{i \in S} \Lambda_i < \infty$ *τότε*

$$\pi P(t) = \pi \iff \pi Q = 0 \text{ για όλα τα } t > 0$$

1.4.1 Σχόλια στο θεώρημα 160

(*i*) Διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει το πρόβλημα της περιοδικότητας όπως έχουμε δει στην περίπτωση της διακριτής αλυσίδας. Επομένως, αν έχουμε μια διακριτή και περιοδική αλυσίδα, θα μπορούσαμε να την μετατρέψουμε σε συνεχή και να μελετήσουμε τις οριακές πιθανότητες με το παραπάνω θεώρημα. Τα συμπεράσματα όμως θα αφορούν την συνεχή αλυσίδα και επομένως μπορεί να διαφέρουν με αυτά της διακριτής αλυσίδας λόγω του ότι οι α-ντίστοιχες στάσιμες κατανομές είναι διαφορετικές, εν γένει.

(ii) Αν η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή ως προς τον πίνακα $P(s)$ για οποιοδήποτε $s > 0$ με τον ίδιο τρόπο όπως στις διακριτές Μαρκοβιανές αλυσίδες (δείτε όμως και το επόμενο σχόλιο για αυτό το θέμα). Σε αυτή την περίπτωση είτε π_i για όλα τα $i \in S$ είτε $\pi_i = 0$ για όλα τα $i \in S$. Αν δεν είναι αδιαχώριστη τότε θα έχει ένα, δυο ή και περισσότερα κλειστά υποσύνολα επαναληπτικών καταστάσεων και ενδεχομένως κάποιες μεταβατικές. Εργαζόμαστε σε κάθε κλειστό σύνολο χωριστά για να υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή που του αντιστοιχεί. Αν η αλυσίδα έχει μεταβατικές καταστάσεις τότε θα πρέπει να υπολογίσουμε την πιθανότητα η αλυσίδα να επισκεφθεί το κλειστό υποσύνολο C ξεκινώντας από την μεταβατική κατάσταση i. Αυτό μπορεί να γίνει κάνοντας τους ανάλογους υπολογισμούς στην ενσωματωμένη διακριτή αλυσίδα, δηλαδή να υπολογίσουμε την πιθανότητα h_i^C όταν i μεταβατική και C κλειστό σύνολο επαναληπτικών. Τότε θα ισχύει

$$P(\sigma_j < \infty | X(0) = i) = h_i^C \quad \text{για κάθε } j \in C$$

Αν j μεταβατική κατάσταση τότε προκύπτει ότι $\pi_{jj} = 0$ και άρα $\pi_{ij} = 0$ για κάθε $i \in S$.

(iii) Μπορούμε να υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή από την σχέση $\pi Q = 0$ απαιτώντας βέβαια το π να είναι κατανομή πιθανότητας. Με τον τρόπο αυτό, αν γνωρίζουμε τον πίνακα Q και όχι τον $P(t)$, αποφεύγουμε να υπολογίσουμε τον εκθετικό πίνακα e^{tQ} ο οποίος είναι ίσος με τον $P(t)$. Επειδή η αλυσίδα μπορεί να έχει δυο ή και παραπάνω κλειστά σύνολα επαναληπτικών καταστάσεων και ίσως κάποιες μεταβατικές, τότε θα πρέπει να αναδιατάξουμε τις καταστάσεις έτσι ώστε αυτές που ανήκουν στο ίδιο κλειστό σύνολο να είναι δίπλα-δίπλα. Τελευταίες αφήνουμε τις μεταβατικές καταστάσεις. Τότε ο πίνακας Q θα είναι κάτω τριγωνικός σε μορφή Block. Σύμφωνα με την άσκηση ;; την ίδια μορφή θα έχει και ο πίνακας $P(t)$. Επομένως, υπολογίζουμε την στάσιμη κατανομή που αντιστοιχεί σε κάθε κλειστό σύνολο εργαζόμενοι στον αντίστοιχο υποπίνακα του Q.

(iv) Αν η κατάσταση j είναι μεταβατική τότε

$$\mathbb{E}(\sigma_j | X(0) = j) = +\infty$$

Επειδή η ποσότητα αυτή εμφανίζεται στον παρονομαστή κλάσματος έπεται ότι σε αυτή την περίπτωση το κλάσμα θα είναι ίσο με το μηδέν, δηλαδή $\pi_{jj} = 0$. Αντίστροφα, αν $\pi_{jj} = 0$ για κάποια επαναληπτική κατάσταση j τότε υποχρεωτικά η κατάσταση j είναι μηδενικά επαναληπτική και επομένως $\mathbb{E}(\sigma_j | X(0) = j) = +\infty$.

(v) Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες $P(X(t) = j | X(0) = i)$ θα πρέπει να υπολογίσουμε τον εκθετικό πίνακα e^{tQ} και τότε η ζητούμενη πιθανότητα θα βρίσκεται στην θέση (i, j) του πίνακα αυτού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 161 *Έστω η διακριτή Μαρκοβιανή αλυσίδα X_n με πίνακα μετάβασης τον*

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και περιοδική με περίοδο 2. Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$R^{2k} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \quad k = 1, 2, \cdots,$$

Θα επιχειρήσουμε να μετατρέψουμε την διακριτή αυτή αλυσίδα σε αλυσίδα συνεχούς χρόνου. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να επιλέξουμε ένα διάνυσμα $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Για ευκολία επιλέγουμε $\Lambda = (1, 1, 1)$ οπότε ο πίνακας Q θα είναι ο

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & -1 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε κατά τα γνωστά τον εκθετικό πίνακα και έχουμε

$$P(t) = e^{tQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{4} & \frac{1}{4} - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{4} & \frac{1}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} \\ \frac{1}{4} - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{4} & \frac{1}{4} + \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{4} & \frac{1}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} \\ \frac{1}{4} - \frac{e^{-2t}}{4} & \frac{1}{4} - \frac{e^{-2t}}{4} & \frac{1}{2} + \frac{e^{-2t}}{2} \end{pmatrix}$$

Οι οριακές πιθανότητες (δηλαδή ο πίνακας $\lim_{t\to\infty} P(t)$ *θα είναι τέτοιος ώστε στις δυο πρώτες στήλες τα στοιχεία θα είναι ίσα με* $\frac{1}{4}$ *και η τελευταία στήλη ίση με* $\frac{1}{2}$. *Η στάσιμη κατανομή της αλυσίδας συνεχούς χρόνου είναι τέτοια ώστε* $\pi Q = 0$ *και* $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ *και βλέπουμε ότι* $\pi = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ *επομένως οι οριακές πιθανότητες που υπολογίσαμε συμπίπτουν με αυτές που υπολογίζουμε μέσω της στάσιμης κατανομής χωρίς να υπολογίσουμε τον εκθετικό πίνακα.*

Διαπιστώνουμε ότι οι οριακές πιθανότητες της αρχικής αλυσίδας είναι διαφορετικές από αυτές της αντίστοιχης συνεχούς χρόνου αλυσίδας και επομένως τα αντίστοιχα συμπεράσματα διαφέρουν. Στην διακριτή αλυσίδα, οι οριακές πιθανότητες, $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$, *δίνουν την πιθανότητα η αλυσίδα να μεταβεί από την* i *στην* j

μετά από ένα μεγάλο αριθμό αλμάτων χωρίς όμως να μας ενδιαφέρει ο χρόνος μεταξύ των αλμάτων. Στην αλυσίδα συνεχούς χρόνου, οι αντίστοιχες οριακές πιθανότητες, δίνουν την πιθανότητα να μεταβεί η αλυσίδα από την i στην j μετά από ένα μεγάλο χρονικό διάστημα. Παρατηρήστε επίσης ότι για να μετατρέψουμε την διακριτή αλυσίδα σε αλυσίδα συνεχούς χρόνου έπρεπε να εισάγουμε το διάνυσμα Λ το οποίο περιέχει τις παραμέτρους λ_i οι οποίες μετρούν θα λέγαμε την χρονική διάρκεια μεταξύ των αλμάτων. Εδώ επιλέξαμε τυχαία αυτό το διάνυσμα αλλά σε ένα πραγματικό φαινόμενο θα πρέπει να γίνουν οι αντίστοιχες μετρήσεις και πειράματα για να πάρουμε αυτές τις παραμέτρους. Αν μπορούμε να το κάνουμε αυτό τότε μπορούμε να εργαστούμε σε συνεχή χρόνο προκειμένου να αποφύγουμε τα τεχνικά προβλήματα που δημιουργεί η περιοδικότητα, αν υπάρχει. Αν όμως δεν μπορούμε να έχουμε αυτές τις παραμέτρους τότε παραμένουμε στην μελέτη της αλυσίδας σε διακριτό χρόνο. Σημειώστε ότι πολλά φαινόμενα μοντελοποιούνται ως αλυσίδες με μετρήσεις σε ετήσια βάση ή μηνιαία κ.τ.λ. κάτι το οποίο δεν δίνει την δυ-

νατότητα μετατροπής σε διαδικασία συνεχούς χρόνου (δείτε για παράδειγμα το [;]). □