Αποτίμηση Συμβολαίων Προαίρεσης

Νίκος Χαλιδιάς

Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Αιγαίου

22 Μαΐου 2023

Τι είναι τα options;

Τα δικαιώματα προαίρεσης (options) είναι συμβόλαια μεταξύ δυο μερών. Ο πωλητής πουλά ένα τέτοιο συμβόλαιο στον αγοραστή ο οποίος έχει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να εξασκήσει το δικαίωμα μέσα σε ένα χρονικό διάστημα $[0, T]$.

Ποια μπορεί να είναι η απολαβή;

Η απολαβή (payoff), δηλαδή το ποσό που δικαιούται να πάρει ο αγοραστής και είναι υποχρεωμένος ο πωλητής να δώσει, μπορεί να είναι της μορφής

(i) $P_T = \max\{S_T - K, 0\}$ (call option) όπου S_t η αξία ενός αγαθού κατά την χρονική στιγμή t και K ένας δοσμένος αριθμός (strike price)

(ii) $P_T = \max\{K - S_T, 0\}$ (put option)

(iii) $P_T = \max\{\max_{0 \le t \le T} S_t - K, 0\}$ (call on maximum)

(iv) $P_T = \max\{S_1(T) - S_2(T), 0\}$ (spread option)

και πολλά άλλα...

Ταξινόμηση Συμβολαίων Προαίρεσης

Μπορούμε να ταξινομήσουμε τα συμβόλαια στις παρακάτω κατηγορίες.

• Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν τα συμβόλαια των οποίων η απολαβή είναι άνω φραγμένη (όπως τα put options). Εδώ ο πωλητής δεν διατρέχει κίνδυνο χρεοκοπίας ενώ τόσο ο πωλητής όσο και ο αγοραστής θα έχουν φραγμένο κέρδος ή ζημιά.

• Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν τα συμβόλαια των οποίων η απολαβή δεν είναι άνω φραγμένη (όπως τα call options). Εδώ ο πωλητής διατρέχει κίνδυνο χρεοκοπίας ενώ ο αγοραστής όχι.

Επομένως δεν είναι ισοδύναμοι απέναντι στον κίνδυνο.

Τα συμβόλαια με μη φραγμένη απολαβή μπορούν να χωριστούν στις δυο επόμενες υποκατηγορίες,

- Σε αυτή την υποκατηγορία μπορεί ο πωλητής να αγοράσει κατάλληλα call options για να φράξει την απολαβή. Για παράδειγμα σε ένα spread option μπορεί να αγοράσει ένα call option με υποκείμενο αγαθό το S_1 και επομένως να εκμηδενίσει τον κίνδυνο χρεοκοπίας.
- Σε αυτή την υποκατηγορία ο πωλητής δεν μπορεί να εκμηδενίσει τον κίνδυνο χρεοκοπίας, όπως για παράδειγμα σε ένα call on maximum option. Όμως μπορεί να αγοράσει μια σειρά από call options με διαφορετικές ημερομηνίες λήξης έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει τον κίνδυνο χρεοκοπίας.

Σημαντική η ταξινόμηση

Παρατηρηση

Η παραπάνω ταξινόμηση των options είναι σημαντική τόσο στον αγοραστή όσο και στον πωλητή. Διαφορετικού τύπου υποθέσεις και κινήσεις θα πρέπει να γίνουν σε κάθε κατηγορία.

Ερωτημα

Για ποιους λόγους ο αγοραστής θέλει να αγοράσει ένα τέτοιο συμβόλαιο; Παρόμοια ερώτηση ισχύει και για τον πωλητή.

Κέρδος ή εξασφάλιση

Ο πωλητής θα αναλάβει το ρίσκο πουλώντας ένα τέτοιο συμβόλαιο με κάποιο αντίτιμο έχοντας ως βασικό στόχο το κέρδος. Ο αγοραστής θα αγοράσει ένα συμβόλαιο είτε για λόγους εξασφάλισης είτε για λόγους κερδοσκοπίας.

Πόσο κάνει ένα τέτοιο συμβόλαιο;

Αυτό ακριβώς είναι το πρόβλημα αποτίμησης ενός συμβολαίου.

Τα προβλήματα του πωλητή

Τα ερωτήματα που έχει να απαντήσει ο πωλητής πουλώντας ένα συμβόλαιο στην τιμή Y είναι τα παρακάτω,

Ερωτημα

(i) *Με το ποσό Y θα μπορέσω να εκμηδενίσω ή έστω να ελαχιστοποιήσω τον κίνδυνο χρεοκοπίας;*

(ii) *Επιπλέον, ποια είναι η πιθανότητα να έχω κέρδος κατά την λήξη του συμβολαίου;*

Το πρόβλημα του αγοραστή

Από την άλλη μεριά, το βασικό ερώτημα για τον αγοραστή είναι το εξής:

Ερωτημα

Ποια είναι η πιθανότητα κέρδους αγοράζοντας στην τιμή Y, δεδομένου ότι αγοράζω το συμβόλαιο αυτό για λόγους κερδοσκοπίας;

Σημειώστε ότι ο αγοραστής δεν ενδιαφέρεται καθόλου για το πως ο πωλητής θα επενδύσει το ποσό Y που θα πάρει από αυτόν. Το μόνο που τον ενδιαφέρει είναι το παραπάνω ερώτημα.

Τα call options είναι χρήσιμα και για εξασφάλιση

Σημειώστε ότι ένας πωλητής ενός spread option θα αγοράσει ένα call option για καθαρά λόγους εξασφάλισης. Μάλιστα το ποσό αυτό θα το ενσωματώσει στην τιμή πώλησης του spread option επομένως δεν τον ενδιαφέρει καθόλου η πιθανότητα κέρδους από το call option. Βεβαίως τον ενδιαφέρει να το αγοράσει όσο φθηνότερα γίνεται προκειμένου και η δική του τιμή για το spread option να είναι ανταγωνιστική!

ΕΡΩΤΗΜΑ

Οι υπάρχουσες θεωρίες αποτίμησης απαντούν στα παραπάνω ερωτήματα;

Μοντέλο αποτίμησης των Black - Scholes

Το μοντέλο αυτό προτείνει την κατασκευή ενός αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου. Αν για παράδειγμα το συμβόλαιο είναι γραμμένο σε ένα υποκείμενο αγαθό η κατασκευή αυτή είναι ένα χαρτοφυλάκιο όπου θα περιέχει a το πλήθος μετοχές στον χρόνο μηδέν και το ποσό b σε τραπεζικό λογαριασμό με επιτόκιο r. Η σημερινή αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι $V_0 = aS_0 + b$. Στόχος της κατασκευής είναι στο χρόνο T η αξία V_T να είναι ίση με την απολαβή, δηλαδή $V_T = P_T$ επομένως ο πωλητής εξαργυρώνοντας το χαρτοφυλάκιο να αποπληρώσει τον αγοραστή.

ΕΡΩΤΗΜΑ

Υπάρχει τέτοιο χαρτοφυλάκιο;

Υπάρχει! (αλλά...)

Υποθέτουμε ότι βρισκόμαστε σε μια αγορά, στην οποία διαπραγματευόμαστε μια μόνο μετοχή.
Θεωρούμε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ με φίλτρο $\mathcal{F}_t$ το οποίο παράγεται από την κίνηση Brown.
Ας υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής κατασκευάζει ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από κατάθεση σε λογαριασμό τραπέζης με εξασφαλισμένη απόδοση με ετήσιο επιτόκιο r συνεχούς ανατοκισμού.
Αν υποθέσουμε ότι B_t είναι το ποσό τη χρονική στιγμή t με $B_0 = 1$ τότε θα έχουμε $B_t = e^{rt}$ όπου t σε πολλαπλάσια του έτους (όχι κατά ανάγκη ακέραια).

Υποθέτουμε επίσης ότι η κίνηση της υποκείμενης μετοχής ακολουθεί την παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση,

$$S_t = S_0 + \int_0^t mS_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s$$

όπου $\sigma \neq 0$ είναι η λεγόμενη μεταβλητότητα της μετοχής. Η λύση της παραπάνω στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης είναι

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (m - \sigma^2/2)t}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια στρατηγική επένδυσης είναι μια στοχαστική διαδικασία $\phi = (a_t, b_t)$, *προσαρμοσμένη στο* $\mathcal{F}_t$ *και τέτοιες ώστε*

$$\int_0^T |a_t| dt + \int_0^T b_t^2 dt < \infty.$$

Η αξία του χαρτοφυλακίου $\phi = (a, b)$ *δίνεται από την στοχαστική διαδικασία,*

$$V_t(\phi) = a_t S_t + b_t B_t$$

Δηλαδή, a_t είναι το πλήθος των μετοχών που υπάρχουν στο χαρτοφυλάκιο και b_t η παρούσα αξία (δηλαδή στον χρόνο 0) του ποσού που έχει εξασφαλισμένη απόδοση.

Ορισμος

Μια στρατηγική επένδυσης $\phi = (a_t, b_t)$ *ονομάζεται αυτοχρηματοδοτούμενη αν*

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t a_s dS_s + \int_0^t b_s dB_s,$$

όπου $dS_t = mS_t dt + \sigma S_t dW_t$ *και* $dB_t = re^{rt} dt$.

Αυτό στην πράξη σημαίνει ότι αλλαγές στην τιμή του χαρτοφυλακίου συμβαίνουν μόνο μετά από αλλαγές της τιμής της μετοχής και του ομολόγου, δηλαδή δεν προστίθενται χρήματα ούτε εξαργυρώνονται από το χαρτοφυλάκιο.

Συμβολίζουμε με $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ και $\tilde{V}_t = e^{-rt} V_t$ τις κανονικοποιημένες στοχαστικές διαδικασίες. Δηλαδή, οι κανονικοποιημένες στοχαστικές διαδικασίες είναι μετρημένες σε πολλαπλάσια του B_t, έχουν ως μονάδα μέτρησης το B_t. Κάθε μετοχή ή άλλο περιουσιακό στοιχείο που όμως έχει πάντοτε θετικές τιμές σε όλους τους χρόνους μπορεί να παίξει το ρόλο της μονάδας μέτρησης (numeraire). Η B_t^{-1} ικανοποιεί

$$B_t^{-1} = 1 - r \int_0^t B_s^{-1} ds$$

Λημμα

Για την κανονικοποιημένη $\tilde{S}_t$ *έχουμε την εξής σχέση*

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 + (m - r)\int_0^t \tilde{S}_s ds + \sigma \int_0^t \tilde{S}_s dW_s.$$

Απόδειξη

Θα χρησιμοποιήσουμε τη στοχαστική ολοκλήρωση κατά μέρη για το γινόμενο $S_t e^{-rt}$. *Έχουμε λοιπόν*

$$\tilde{S}_t = S_0 + \int_0^t (-r) S_s B_s^{-1} ds + \int_0^t S_s \cdot 0 dW_s$$
$$+ \int_0^t m B_s^{-1} S_s ds + \int_0^t \sigma B_s^{-1} S_s dW_s + \int_0^t \sigma S_s \cdot 0 ds.$$

Έχουμε την παρακάτω πρόταση που περιγράφει (και ορίζει διαφορετικά) την έννοια της αυτοχρηματοδότησης.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Μια στρατηγική $\phi = (a, b)$ *είναι αυτοχρηματοδοτούμενη ανν*

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + (m - r)\int_0^t a_s \tilde{S}_s ds + \sigma \int_0^t a_s \tilde{S}_s dW_s.$$

Απόδειξη

Έστω ότι είναι αυτοχρηματοδοτούμενη. Τότε

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t (ma_s S_s + rb_s e^{rs})ds + \int_0^t \sigma a_s S_s dW_s,$$

δες Ορισμό 8. Χρησιμοποιούμε τη στοχαστική ολοκλήρωση κατά μέρη στο γινόμενο $V_t e^{-rt}$ και έχουμε

$$\begin{aligned}\tilde{V}_t = V_0 \quad &+ \quad \int_0^t V_s(-r)B_s^{-1}ds + \int_0^t V_s \cdot 0 dW_s \\ &+ \quad \int_0^t B_s^{-1}(ma_s S_s + rb_s e^{rs})ds \\ &+ \quad \int_0^t B_s^{-1}\sigma a_s S_s dW_s + \int_0^t \sigma a_s S_s \cdot 0 ds.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το V_s από τον ορισμό φτάνουμε στο αποτέλεσμα. Για το αντίστροφο, θα υποθέσουμε ότι το $\tilde{V}_t$ έχει την παραπάνω μορφή και θα υπολογίσουμε τη μορφή της $V_t = e^{rt}\tilde{V}_t$ χρησιμοποιώντας πάλι την ολοκλήρωση κατά μέρη στο γινόμενο $e^{rt}\tilde{V}_t$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια στρατηγική (a_t, b_t) *λέγεται Μαρκοβιανή αν*

$$a_t = a(t, S_t), \quad b_t = b(t, S_t)$$

όπου a, b *είναι συναρτήσεις δυο μεταβλητών συνεχώς παραγωγίσιμες στην πρώτη και δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στη δεύτερη μεταβλητή.*

Αρα λοιπόν, η τιμή του χαρτοφυλακίου σε αυτήν τη περίπτωση γράφεται

$$V_t = a(t, S_t)S_t + b(t, S_t)e^{rt}.$$

Θα υποθέσουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $u(t,x)$ μια φορά συνεχώς παραγωγίσιμη στο t και δυο στο x τ.ω. $u(t,S_t)=V_t$. Θα δούμε στο επόμενο θεώρημα ότι αυτή η συνάρτηση θα είναι λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης Black-Scholes.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω (a,b) μια αυτοχρηματοδοτούμενη Μαρκοβιανή στρατηγική. Τότε, αν υπάρχει $u(t,x)\in C^{1,2}(D)$ (όπου $D=(0,T)\times(0,+\infty)$) τ.ω. $u(t,S_t)=V_t$, η $u(t,x)$ είναι λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{\sigma^2x^2}{2}u_{xx}(t,x)+rxu_x(t,x)+u_t(t,x)=ru(t,x)$$

με $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}_+$. Επιπλέον, $a(t,x)=u_x(t,x)$. Η παραπάνω μερική διαφορική εξίσωση ονομάζεται **Black-Scholes.**

Απόδειξη.

Εφόσον η (a, b) είναι αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική έχουμε ότι

$$V_t = V_0 + \int_0^t (ma(s, S_s)S_s + rb(s, S_s)B_s)ds + \int_0^t \sigma a(s, S_s)S_s dW_s.$$

Εφαρμόζουμε τη φόρμουλα του Ito στην $u(t, S_t)$ και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} u(t, S_t) = & \quad u(0, S_0) \\ & + \int_0^t (u_t(s, S_s) + mS_s u_x(s, S_s) + \frac{\sigma^2 S_s^2}{2} u_{xx}(s, S_s))ds \\ & + \int_0^t \sigma S_s u_x(s, S_s) dW_s. \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν γράψει την V_t ως διαδικασία Ito με δυο διαφορετικούς τρόπους, επομένως χρησιμοποιώντας τη μοναδικότητα της ανάλυσης κατά Doob-Meyer στη διαφορά τους (η οποία είναι μηδέν), προκύπτει ότι και τα δυο ολοκληρώματα είναι μηδέν. Επομένως παίρνουμε την

Απόδειξη.

ισότητα

$$a(t,S_t) = u_x(t,S_t) \text{ και άρα } b(t,S_t)B_t = u(t,S_t) - S_t u_x(t,S_t)$$

Για να μηδενιστεί και το ολοκλήρωμα ως προς ds θα πρέπει αναγκαστικά η $u(t,x)$ να ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$\frac{\sigma^2 x^2}{2} u_{xx}(t,x) + r x u_x(t,x) + u_t(t,x) = r u(t,x)$$

έχοντας αντικαταστήσει κατάλληλα το $b(t,S_t)B_t$, διότι θέλουμε να μηδενίζεται το ολοκλήρωμα για οποιαδήποτε πιθανή τροχιά της S_t. Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμη και η υπόθεση ότι $u \in C^{1,2}(D)$. □

Επομένως, αν θέλουμε να υπολογίσουμε το δικαίωμα πώλησης θα πρέπει να επιλύσουμε την παραπάνω μερική διαφορική εξίσωση με επιπλέον συνθήκη $u(s,T) = (K-s)^+$.

Ακαριαία αναδιάρθρωση!

Παρατηρηση

Στην πράξη όμως αν προσπαθήσει να το κατασκευάσει θα συναντήσει τουλάχιστον ένα πρόβλημα. Αν την χρονική στιγμή t η αξία της μετοχής είναι $S(t)$ και την $t+h$ θα είναι $S(t+h)$ τότε την στιγμή της αλλαγής της τιμής θα πρέπει (ακαριαία!) να αλλάξουν και οι τιμές των $a(t, S(t))$ και $b(t, S(t))$.

Ακόμη και αν βρεθεί τρόπος να ξεπεραστούν αυτού του είδους τα προβλήματα θα έχουμε ακόμη δυο μειονεκτήματα.
• Στο μοντέλο έχουμε υπολογίσει την παράμετρο σ (μεταβλητότητα της μετοχής) μέσω ιστορικών δεδομένων. Η παράμετρος αυτή όμως δεν είναι βέβαιο ότι θα παραμείνει σταθερή και στο μέλλον με συνέπεια η αξία του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου να διαφέρει τελικά από την απολαβή.
• Υπάρχει περίπτωση (στα put option για παράδειγμα) να πρέπει να δανεισθεί κανείς μετοχές προκειμένου να κατασκευασθεί το χαρτοφυλάκιο αυτό. Αυτό όμως σημαίνει ότι, ακριβώς λόγω αυτού του δανεισμού, ο πωλητής θα βρεθεί σε κίνδυνο χρεοκοπίας ενώ αρχικά ίσως δεν είχε τέτοιο κίνδυνο!

Διωνυμικό Μοντέλο Αποτίμησης

Το διωνυμικό μοντέλο αποτίμησης είναι παρόμοιο (στην κεντρική του ιδέα) με το μοντέλο των Black - Scholes. Στηρίζεται και αυτό στην κατασκευή αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου αλλά όμως σε διακριτό χρόνο οπότε δεν υπάρχουν έτσι τα πρακτικά προβλήματα που έχει το μοντέλο των Black - Scholes.

$$
\begin{tikzcd}
t=0 & & t=T \\
& & H(uS) \\
V(0,S) \arrow[urr, "uS"] \arrow[drr, "dS"'] & & \\
& & H(dS))
\end{tikzcd}
$$

Στο διωνυμικό μοντέλο υποθέτουμε ότι η μετοχή είτε θα ανέβει με ρυθμό u και πιθανότητα p είτε θα κατέβει με ρυθμό d και πιθανότητα $1-p$. Η αξία του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή 0 είναι $V_0 = aS + b$ όπου a είναι το πλήθος των μετοχών και b το ποσό σε χωρίς ρίσκο επένδυση. Αν την χρονική στιγμή οι απολαβές πρέπει να είναι $H(dS)$ και $H(uS)$ τότε

$$a = \frac{H(uS) - H(dS)}{(u-d)S} \quad \text{και} \quad b = \frac{H(dS)u - H(uS)d}{u-d}$$

θεωρώντας για ευκολία μηδενικό επιτόκιο στη χωρίς ρίσκο επένδυση.

Μπορεί να γενικευθεί και για n περιόδους.

$t = k\delta \qquad\qquad t = k\delta + \delta$

$$
\begin{tikzcd}
 & V(t+\delta, uS) \\
V(t,S) \arrow[ur, "uS"] \arrow[dr, "dS"'] & \\
 & V(t+\delta, dS)
\end{tikzcd}
$$

Αν οι αξίες του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή $t = k\delta + \delta$ πρέπει να ίσες με $V(t+\delta, uS)$ και $V(t+\delta, dS)$ τότε η ελάχιστη τιμή του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή $t = k\delta$ είναι ίση με $V(t,S) = e^{-r\delta}\Big(qV(t+\delta, uS) + (1-q)V(t+\delta, dS)\Big)$ όπου $q = \frac{e^{r\delta}-d}{u-d}$ όταν $d \le e^{r\delta} \le u$. Σημειώστε ότι $V(t,S) = aS + b$ όπου a είναι το πλήθος των μετοχών την χρονική στιγμή t και b το ποσό την χρονική στιγμή t σε επένδυση χωρίς ρίσκο με επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού r. Στο διωνυμικό μοντέλο υποθέτουμε ότι η τιμή της μετοχής θα ανέβει με πιθανότητα p και θα κατέβει με πιθανότητα $1-p$.

Ξεκινώντας αναδρομικά και προς τα πίσω μπορούμε να υπολογίσουμε την αρχική αξία του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου καθώς βέβαια και την στρατηγική επένδυσης (a, b). Η κατασκευή αυτή είναι πρακτικά εφικτή αλλά έχει ένα σημαντικό μειονέκτημα.

Είναι πρακτικό το διωνυμικό μοντέλο;

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στο διωνυμικό μοντέλο υποθέτει κάποιος ότι η επόμενη τιμή της μετοχής θα είναι είτε uS είτε dS αν σήμερα είναι ίση με S. Η μαντεψιά αυτή όμως δεν πρόκειται ποτέ να επαληθευτεί επομένως η τελική αξία του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου δεν θα είναι ίση με την απολαβή σχεδόν σίγουρα!

Επομένως γεννάται το εξής ερώτημα:

ΕΡΩΤΗΜΑ

Αν ανέβει η μετοχή αλλά με ρυθμό $u^* \neq u$ τι ακριβώς σημαίνει για την αξία του χαρτοφυλακίου και της απολαβής; Παρόμοια, αν κατέβει αλλά με ρυθμό $d^* \neq d$.

Παρατηρηση

Φαίνεται ότι οι δυο βασικές θεωρίες αποτίμησης δεν απαντούν στα ερωτήματα του πωλητή και του αγοραστή. Ακόμη χειρότερα, δεν φαίνεται να είναι χρήσιμες ούτε και για τον σκοπό για τον οποίο κατασκευάσθηκαν!

Ιδιότητα Κέρδους

Λημμα

Έστω ότι ο πωλητής έχει χρησιμοποιήσει το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου για να τιμολογήσει ένα call ή ένα put συμβόλαιο με τιμή εξάσκησης K. Τότε θα διαλέξει τους ρυθμούς d, u έτσι ώστε να ισχύει $uS_0 > K$ και $dS_0 < K$.

Απόδειξη.

Για το call συμβόλαιο ο πωλητής θα προτιμήσει το d να είναι τέτοιο ώστε $dS_0 < K$ (και σίγουρα $uS_0 > K$) όπου K είναι η τιμή εξάσκησης. Πράγματι, αν $dS_0 > K$ τότε είναι εύκολο να δούμε ότι $a = 1$ και $be^{rT} = -K$. Επομένως, το κέρδος Π είναι ως εξής

$$\begin{aligned}\Pi &= aS_T + be^{rT} - (S_T - K)^+ \\ &= S_T - K - (S_T - K)^+\end{aligned}$$

Αν $S_T > K$ τότε $\Pi = 0$ ενώ αν $S_T \leq K$ τότε $\Pi \leq 0$, δηλαδή ο πωλητής δεν έχει καμία πιθανότητα κέρδους.

Παρόμοια, για το put συμβόλαιο θα επιλέξει u τέτοιο ώστε $uS_0 > K$ (και φυσικά $dS_0 < K$). Πράγματι, αν $uS_0 < K$ τότε $a = -1$ και $be^{rT} = K$ επομένως το κέρδος είναι ως εξής

$$\begin{aligned}\Pi &= aS_T + be^{rT} - (K - S_T)^+ \\ &= K - S_T - (K - S_T)^+\end{aligned}$$

Αν $S_T < K$ τότε $\Pi = 0$ ενώ αν $S_T \geq K$ και $\Pi \leq 0$, δηλαδή ο πωλητής δεν έχει πάλι καμία πιθανότητα κέρδους. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ *(Ιδιότητα Κέρδους για τα συμβόλαια Call και Put)*

Έστω ότι ο πωλητής έχει χρησιμοποιήσει το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου για να τιμολογήσει ένα call ή ένα put συμβόλαιο με τιμή εξάσκησης K με ρυθμούς d, u. Τότε θα έχει κέρδος αν $\frac{S_T}{S_0} \in (d, u)$ ενώ θα έχει ζημιά αν $\frac{S_T}{S_0} \notin (d, u)$. Το πιθανό κέρδος είναι φραγμένο από το ποσό $\frac{(uS_0 - K)(K - dS_0)}{(u-d)S_0}$ ενώ η πιθανή ζημιά μη φραγμένη.

Απόδειξη.

Ξεκινάμε με το συμβόλαιο call όπου $a \in (0,1)$ σε αυτή την περίπτωση. Υποθέτουμε ότι $uS_0 > K$ και $dS_0 < K$. Τότε το κέρδος είναι ως εξής

$$\Pi = aS_T + be^{rT} - (S_T - K)^+$$

Αν $S_T > K$ τότε έχουμε ότι $\frac{S_T}{S_0} > d$ και ότι

$$\begin{aligned} \Pi &= a\left(\frac{S_T}{S_0} - u\right)S_0 + auS_0 + be^{rT} - (uS_0 - K) - \left(\frac{S_T}{S_0} - u\right)S_0 \\ &= \left(\frac{S_T}{S_0} - u\right)S_0(a-1) \end{aligned}$$

αφού $auS_0 + be^{rT} - (uS_0 - K) = 0$. Επομένως στην περίπτωση $\frac{S_T}{S_0} \in (d,u)$ ισχύει ότι $\Pi > 0$ ενώ αν $\frac{S_T}{S_0} > u$ ισχύει ότι $\Pi < 0$. Παρατηρήστε ότι αν $\frac{S_T}{S_0} \to \infty$ τότε και $\Pi \to -\infty$.

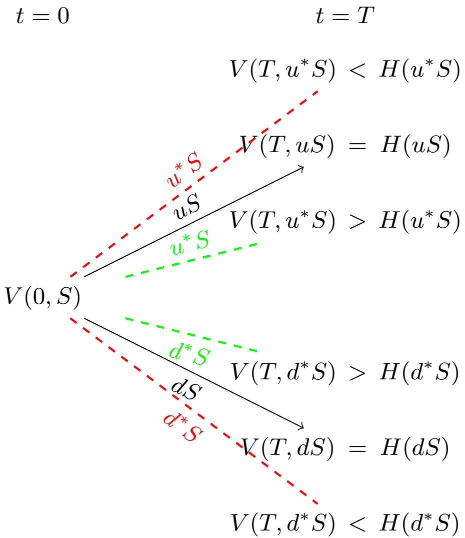
Απόδειξη.

Αν $S_T < K$ τότε έχουμε ότι $\frac{S_T}{S_0} < u$ και ότι

$$\begin{aligned} \Pi &= a\left(\frac{S_T}{S_0} - d\right) S_0 + adS_0 + be^{rT} \\ &= a\left(\frac{S_T}{S_0} - d\right) S_0 \end{aligned}$$

αφού $adS_0 + be^{rT} = 0$. Πάλι, αν $\frac{S_T}{S_0} \in (d, u)$ ισχύει ότι $\Pi > 0$ ενώ αν $\frac{S_T}{S_0} < d$ ισχύει ότι $\Pi < 0$.
Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για το put συμβόλαιο αφού $a \in (-1, 0)$ σε αυτή την περίπτωση. $\square$

Αν ανέβει με ρυθμό u^* τέτοιο ώστε $u^* \in (d,u)$ ή αν κατέβει με ρυθμό $d^* \in (d,u)$ τότε η τελική αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι μεγαλύτερη από την απολαβή για ένα call ή put συμβόλαιο ενώ διαφορετικά θα είναι μικρότερη.



Χωρίς την ιδιότητα κέρδους...

Χωρίς την ιδιότητα κέρδους η οποιαδήποτε επιλογή των u, d δεν έχει κανένα νόημα για τον πωλητή! Ένα ερώτημα που προκύπτει είναι το παρακάτω.

Ερωτημα

Σε ποια άλλα συμβόλαια το διωνυμικό μοντέλο παράγει χαρτοφυλάκια με την ιδιότητα κέρδους;

Πιθανότητα κέρδους

Στα συμβόλαια αγοράς και πώλησης ο πωλητής γνωρίζει σε ποιες περιπτώσεις θα έχει κέρδος. Ποια όμως είναι η πιθανότητα κέρδους; Για να απαντήσει σε αυτό το ερώτημα θα πρέπει να υποθέσει κάτι άλλο πιο ρεαλιστικό για την κίνηση της μετοχής. Μια ρεαλιστική υπόθεση είναι ότι η αξία της μετοχής ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown για κάποιες παραμέτρους m, σ.

Υπόθεση

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν παράμετροι m, σ έτσι ώστε η αξία της μετοχής να είναι η λύση της παρακάτω στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$S_t = S_0 + m \int_0^t S_r dr + \sigma \int_0^t S_r dW_r, \quad t \in [0, T]$$

όπου S_0 η σημερινή αξία της μετοχής.

Τότε μπορεί εύκολα να υπολογίσει την πιθανότητα

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_T}{S_0} \in (d, u)\right)$$

δεδομένων το d, u ή αλλιώς δεδομένης της πιθανότητας κέρδους p να βρεθούν τα κατάλληλα d, u. Το παραπάνω μοντέλο το καλούμε ρεαλιστικό διωνυμικό μοντέλο λόγω του ότι η υπόθεση που αφορά την κίνηση της μετοχής είναι ρεαλιστική!

Επιλογή των d, u

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν τα u, d επιλεγούν όπως παρακάτω

$$u = e^{\sigma z_p \sqrt{T} + (m - \sigma^2/2)T}, \quad d = e^{-\sigma z_p \sqrt{T} + (m - \sigma^2/2)T}$$

τότε η πιθανότητα κέρδους εφαρμόζοντας το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου είναι ίση με p. Εδώ z_p είναι τέτοια ώστε $\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-z_p\sqrt{T}}^{z_p\sqrt{T}} e^{\frac{-t^2}{2T}} dt = p$ με $p \in (0, 1)$ επιλεγμένο από τον πωλητή.

Απόδειξη.

Πράγματι, έχουμε αφού $\frac{S_T}{S_0} = e^{\sigma W_T + (m-\sigma^2/2)T}$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(d \le \frac{S_T}{S_0} \le u\right) &= \mathbb{P}(-z_p\sqrt{T} \le W_T \le z_p\sqrt{T}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-z_p\sqrt{T}}^{z_p\sqrt{T}} e^{\frac{-t^2}{2T}}\, dt \\
&= p
\end{aligned}
$$

$\square$

Λημμα

Έστω $z_{\frac{p+1}{2}}$ *και* z_p *τέτοια ώστε*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_p} e^{\frac{-t^2}{2}} dt &= p \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_{\frac{p+1}{2}}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt &= \frac{p+1}{2} \end{aligned}$$

Ισχύει ότι

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z_{\frac{p+1}{2}}}^{z_{\frac{p+1}{2}}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_p} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

για οποιοδήποτε $p \in (0,1)$.

Απόδειξη.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-z_{\frac{p+1}{2}}}^{z_{\frac{p+1}{2}}} e^{\frac{-t^2}{2}}dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_{\frac{p+1}{2}}} e^{\frac{-t^2}{2}}dt \\
&\quad -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-z_{\frac{p+1}{2}}} e^{\frac{-t^2}{2}}dt \\
&= \frac{p+1}{2} - 1 + \frac{p+1}{2} \\
&= p
\end{aligned}
$$

□

Παρατηρηση

Αν ο πωλητής εφαρμόσει το ρεαλιστικό διωνυμικό μοντέλο με πιθανότητα κέρδους p *τότε θα πρέπει να ισχύει*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^{z} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = p$$

Το z *το οποίο ικανοποιεί την παραπάνω ισότητα είναι το* $z = z_{\frac{p+1}{2}}$.

Ερωτημα

Κάτω από την υπόθεση της γεωμετρικής κίνησης Brown μπορείτε να υπολογίσετε την πιθανότητα η αξία της μετοχής να ανέβει στο χρόνο T σε σύγκριση με το χρόνο 0;

Μια ή περισσότερες περίοδοι;

ΕΡΩΤΗΜΑ

Για πόσες περιόδους πρέπει να εφαρμόσουμε το ρεαλιστικό διωνυμικό μοντέλο;

Παρατηρηση

Το ρεαλιστικό διωνυμικό μοντέλο είναι πραγματοποιήσιμο στην πράξη όμως ίσως δεν είναι ωφέλιμο για τον πωλητή να το εφαρμόσει για περισσότερες από μια περιόδους (δείτε το θεώρημα 2 της εργασίας).

Παράδειγμα σε put option

Έστω ότι κάποιος θέλει να πουλήσει ένα συμβόλαιο πώλησης όπου η αξία του υποκείμενου αγαθού υποθέτει ότι έχει την παρακάτω συμπεριφορά

$$S_T = 40 + 0.01 \int_0^T S_r dr + 0.4 \int_0^T S_r dW_r$$

όπου $T = 50$ ημέρες και η τιμή εξάσκησης είναι $K = 41$.

Ερωτημα

Ποιο είναι το ποσό Y *τέτοιο ώστε η απολαβή να μην το ξεπερνά με δοσμένη πιθανότητα* $p \in (0,1)$;

Θεωρημα

Για δοσμένη πιθανότητα $p \in (0, 1)$ *το ποσό*

$$Y = K - S_0 e^{-\sigma z_p \sqrt{T} + (m - \sigma^2/2)T}$$

όπου z_p *είναι τέτοιο ώστε* $\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-z_p\sqrt{T}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2T}} dt = p$ *είναι μεγαλύτερο της απολαβής με πιθανότητα* p.

Απόδειξη.

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(K - S_T \leq Y\right) &= \mathbb{P}\left(W_T \geq -z_p\sqrt{T}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-z_p\sqrt{T}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2T}}\, dt \\
&= p
\end{aligned}$$

□

Ας υποθέσουμε ότι ο πωλητής διαλέγει ως πιθανότητα κέρδους την $p = 0.57$. Τότε το ποσό

$$Y = K - S_0 e^{-\sigma z_p \sqrt{T} + (m - \sigma^2/2)T} = 2.4$$

είναι τέτοιο ώστε

$$\mathbb{P}(K - S_T \leq Y) = 0.57$$

Δηλαδή αν πουλήσει το put συμβόλαιο σε αυτή την τιμή χωρίς να κατασκευάσει αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο τότε έχει πιθανότητα κέρδους 0.57.

Εφαρμόζοντας το ρεαλιστικό διωνυμικό μοντέλο με πιθανότητα κέρδους $p = 0.57$ προκύπτουν τα $d = 0.88$ και $u = 1.11$.
Υπολογίζοντας την αρχική τιμή του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου προκύπτει ότι είναι ίση με $V_0 = 2.8$ περίπου.
Σημειώστε ότι το διωνυμικό μοντέλο απαιτεί τον δανεισμό μετοχών για την κατασκευή του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου. Η απολαβή του συμβολαίου πώλησης είναι άνω φραγμένη αλλά δανειζόμενος μετοχές ο πωλητής έρχεται αντιμέτωπος με τον κίνδυνο χρεοκοπίας!
Από την μελέτη αυτή ο πωλητής σίγουρα θα προτιμήσει να πουλήσει το συμβόλαιο αυτό χωρίς την κατασκευή αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου, τουλάχιστον όπως παραπάνω. Αν κατασκευάσει αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο είναι προτιμότερο να γίνει χωρίς δανεισμό μετοχών.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω ένα put option με τιμή εξάσκησης K και έστω ότι το υποκείμενο αγαθό είναι διαπραγματεύσιμο στην αγορά και ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown. Ο πωλητής αυτού του συμβολαίου μπορεί να το πουλήσει στη τιμή

$$Y = S_0(\gamma+1) - S_0(\gamma+1)e^{-\sigma z\sqrt{T}+(m-\sigma^2/2)T}$$

για κάποιο $\gamma \in (-1,\infty)$ και κατάλληλα επιλεγμένο από τον πωλητή $z > 0$. Μπορεί να επενδύσει κατάλληλα το ποσό αυτό έτσι ώστε να έχει απεριόριστο πιθανό κέρδος αλλά περιορισμένη πιθανή ζημιά.

Η $(\gamma+1)$-στρατηγική αντιστάθμισης ΙΙ

Απόδειξη.

Πράγματι, μπορεί να αγοράσει $\gamma+1$ μετοχές του υποκείμενου αγαθού δανειζόμενος το ποσό $S_0(\gamma+1)e^{-\sigma z\sqrt{T}+(m-\sigma^2/2)T}$. Το κέρδος κατά το χρόνο T θα είναι

$$\Pi = S_T(\gamma+1) - e^{rT}S_0(\gamma+1)e^{-\sigma z\sqrt{T}+(m-\sigma^2/2)T} - (K-S_T)^+$$

όπου r είναι το επιτόκιο δανεισμού. Είναι ξεκάθαρο ότι αν $S_T > K$ τότε το πιθανό κέρδος είναι απεριόριστο ενώ αν $S_T < K$ η πιθανή ζημιά είναι περιορισμένη από το ποσό $e^{rT}S_0e^{-\sigma z\sqrt{T}+(m-\sigma^2/2)T} + K$. Μπορούμε να υπολογίσουμε το κατάλληλο z έτσι ώστε η πιθανότητα κέρδους να είναι ίση με p. $\square$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω τεχνική για $\gamma = 0$ ο πωλητής μπορεί να πουλήσει το put option στη τιμή 2.4 έχοντας 0.52 πιθανότητα κέρδους υποθέτοντας για ευκολία μηδενικό επιτόκιο δανεισμού. Το βασικό πλεονέκτημα όμως είναι ότι το πιθανό κέρδος είναι απεριόριστο.

Η τιμή που δίνει το μοντέλο των Black - Scholes είναι περίπου 2.91 κατασκευάζοντας αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο. Εδώ έχουμε ένα επιπλέον πρόβλημα σε σχέση με το διωνυμικό μοντέλο και είναι ότι δεν μπορεί να κατασκευάσει στην πράξη αυτό το χαρτοφυλάκιο.

Ανταγωνισμός

Σημειώστε ότι η τιμή $Y = 1.4$ είναι τέτοια ώστε $\mathbb{P}(P_T \leq Y) = 0.5$ επομένως μπορούμε να υποθέσουμε, αν ο ανταγωνισμός είναι μεγάλος, ότι αυτή θα είναι τελικά και η τιμή πώλησης αυτού του συμβολαίου, αρκεί βέβαια ο πωλητής και ο αγοραστής να έχουν την ίδια άποψη για το μέλλον και χρησιμοποιούν το ίδιο μοντέλο!

Τι γίνεται με το αντίστοιχο call option;

Μπορεί να γίνει η αντίστοιχη μελέτη για το συμβόλαιο αγοράς. Στην περίπτωση αυτή το ρεαλιστικό διωνυμικό μοντέλο δεν απαιτεί τον δανεισμό μετοχών επομένως είναι πιθανό να επιλεγεί από τον πωλητή ως τρόπος αποτίμησης και αντιστάθμισης.
Θα υπολογίσει τα κατάλληλα d, u έτσι ώστε να έχει την ζητούμενη πιθανότητα κέρδους. Πιθανόν να είναι προτιμότερο να εφαρμόσει το ρεαλιστικό διωνυμικό μοντέλο για μια μόνο περίοδο (δείτε θεώρημα 2 της εργασίας). Ο ανταγωνισμός θα διαμορφώσει την τελική τιμή του συμβολαίου. Επιπλέον, αν έχει στην κατοχή του την υποκείμενη μετοχή τότε δεν διατρέχει κίνδυνο χρεοκοπίας. Σημειώστε ότι στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής κατέβει το ίδιο θα συμβεί και με την αξία του χαρτοφυλακίου με ενδεχόμενο ο πωλητής να μην έχει κέρδος ή ακόμη να έχει και ζημιά. Αν όμως δεν κατασκεύαζε αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο τότε θα είχε καθαρό κέρδος!

Εφαρμογή του Διωνυμικού Μοντέλου για το call

Ας υποθέσουμε ότι το υποκείμενο αγαθό είναι διαπραγματεύσιμο στην αγορά και επομένως έχει νόημα η κατασκευή αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου. Εφαρμόζοντας το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου με $d = 0.88$ και $u = 1.11$ (όπου η πιθανότητα κέρδους είναι $p = 0.57$) προκύπτει ότι η αρχική αξία του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου είναι $V_0 = 1.77$. Τρία είναι τα βασικά μειονεκτήματα της κατασκευής αυτής. Το πρώτο είναι ότι στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής ανέβει σε υψηλά επίπεδα τότε ο πωλητής θα έχει ζημιά η οποία μάλιστα είναι θεωρητικά απεριόριστη. Προκειμένου να μην έχει κίνδυνο χρεοκοπίας από μια απότομη άνοδο της αξίας της μετοχής θα πρέπει να κατέχει ήδη την μετοχή. Το δεύτερο μειονέκτημα είναι ότι στην περίπτωση που τιμή της μετοχής κατέβει τότε το ίδιο θα συμβεί και με την αξία του χαρτοφυλακίου με συνέπεια το κέρδος του πωλητή να συρρικνωθεί ή ακόμη και να έχει ζημιά. Το τρίτο μειονέκτημα είναι ότι το υποκείμενο αγαθό πρέπει να είναι διαπραγματεύσιμο στην αγορά.

Η $(\gamma+1)$-στρατηγική αντιστάθμισης για το call I

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω ένα call option με τιμή εξάσκησης K του οποίου το υποκείμενο αγαθό είναι διαπραγματεύσιμο στην αγορά. Υποθέτουμε ότι η αξία του υποκείμενου αγαθού ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown. Επιλέγοντας κάποια $\gamma > 0$, $p \in (0,1)$ και έπειτα ένα κατάλληλο $z > 0$, ο πωλητής μπορεί να πουλήσει το call option στη τιμή

$$Y = S_0(\gamma+1) - S_0(\gamma+1)e^{-\sigma z\sqrt{T}+(m-\sigma^2/2)T}$$

Ο πωλητής μπορεί να έχει απεριόριστο πιθανό κέρδος ενώ η πιθανή ζημιά είναι φραγμένη. Επιπλέον η πιθανότητα κέρδους μπορεί να είναι ίση με p διαλέγοντας κατάλληλο $z > 0$.

Απόδειξη.

Πράγματι, ο πωλητής μπορεί να δανεισθεί το ποσό $S_0(\gamma+1)e^{-\sigma z\sqrt{T}+(m-\sigma^2/2)T}$ και να αγοράσει $\gamma+1$ μετοχές του υποκείμενου αγαθού.

• Αν$S_T > K$ τότε το κέρδος Π του πωλητή είναι ίσο με

$$\begin{aligned}\Pi &= S_T(\gamma+1) - e^{rT}S_0(\gamma+1)e^{-\sigma z\sqrt{T}+(m-\sigma^2/2)T} - (S_T-K)\\ &= \gamma S_T + K - e^{rT}S_0(\gamma+1)e^{-\sigma z\sqrt{T}+(m-\sigma^2/2)T}\end{aligned}$$

Επομένως το πιθανό κέρδος είναι απεριόριστο.

• Αν $S_T \leq K$ τότε το κέρδος Π του πωλητή είναι ίσο με

$$\Pi = S_T(\gamma+1) - e^{rT}S_0(\gamma+1)e^{-\sigma z\sqrt{T}+(m-\sigma^2/2)T}$$

Επομένως η πιθανή ζημιά είναι φραγμένη.

Η $(\gamma+1)$-στρατηγική αντιστάθμισης για το call III

Απόδειξη.

Η πιθανότητα κέρδους μπορεί να υπολογισθεί εύκολα.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Pi > 0) &= \mathbb{P}(\Pi > 0, S_T > K) + \mathbb{P}(\Pi > 0, S_T \leq K)\\ &= \mathbb{P}\left(S_T > \max\left\{K, \frac{e^{rT}S_0(\gamma+1)e^{-\sigma z\sqrt{T}+(m-\sigma^2/2)T} - K}{a}\right\}\right)\\ &\quad +\mathbb{P}\left(e^{rT}S_0 e^{-\sigma z\sqrt{T}+(m-\sigma^2/2)T} \leq S_T \leq K\right)\end{aligned}$$

Η παραπάνω πιθανότητα είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση του z και επομένως για δοσμένο $p \in (0,1)$ υπάρχει μοναδικό z έτσι ώστε η πιθανότητα αυτή να είναι ίση με p. □

Η $(\gamma + 1)$-στρατηγική αντιστάθμισης για το call IV

Μπορεί κανείς να τιμολογήσει όπως παραπάνω και για $\gamma = 0$ αρκεί να επιλέξει κατάλληλο z έτσι ώστε $e^{rT} S_0 e^{-\sigma z\sqrt{T} + (m-\sigma^2/2)T} < K$. Τιμολογώντας ένα call option με τον παραπάνω τρόπο με $\gamma = 1$ υποθέτοντας για ευκολία μηδενικό επιτόκιο δανεισμού, ο πωλητής μπορεί να το πουλήσει στην τιμή 1.4 δανειζόμενος το ποσό 78.6 και θα αγοράσει δυο μετοχές του υποκείμενου αγαθού. Η πιθανή ζημιά είναι φραγμένη ενώ το πιθανό κέρδος είναι απεριόριστο και η πιθανότητα κέρδους είναι ίση με 0.52. Αν το υποκείμενο αγαθό δεν είναι διαπραγματεύσιμο στην αγορά τότε ίσως να υπάρχει κάποιο άλλο το οποίο είναι διαπραγματεύσιμο και να έχει την ίδια συμπεριφορά με το αρχικό οπότε ο πωλητής μπορεί να επενδύσει σε αυτό.

Τρίτος τρόπος αποτίμησης του call

Σε αυτό τον τρόπο δεν υποθέτουμε ότι το υποκείμενο αγαθό είναι διαπραγματεύσιμο στην αγορά. Ο πωλητής μπορεί να το πουλήσει στην τιμή

$$S_0 e^{sz\sqrt{T}+(m-\sigma^2/2)T} - K = 0.92$$

όπου $z = 0.43$. Στην περίπτωση αυτή ο πωλητής δεν κατασκευάζει αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο οπότε ο τρόπος αυτός πλεονεκτεί στην περίπτωση που το υποκείμενο αγαθό δεν είναι διαπραγματεύσιμο στην αγορά. Η πιθανότητα κέρδους είναι 0.67 ενώ θα έχει ζημιά (θεωρητικά απεριόριστη όμως) μόνο στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής ανέβει ψηλά.

Η $\frac{Y}{S_0}$-στρατηγική αντιστάθμισης I

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω ένα call option όπου το υποκείμενο αγαθό είναι διαπραγματεύσιμο στην αγορά και ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους m, σ και τιμή εξάσκησης K. Ο πωλητής μπορεί να πουλήσει το συμβόλαιο αυτό στην τιμή Y και να αγοράσει $\frac{Y}{S_0}$ μετοχές του υποκείμενου αγαθού έτσι ώστε η μέση τιμή και η πιθανότητα κέρδους να είναι ως εξής,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\Pi) &= Ye^{mT} - \mathbb{E}(S_T - K)^+ \\
\mathbb{P}(\Pi > 0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln\left(\frac{K}{S_0 - Y} e^{(\sigma^2/2 - m)T}\right)}{\sigma}} e^{-t^2/(2T)} dt
\end{aligned}$$

Η $\frac{Y}{S_0}$-στρατηγική αντιστάθμισης II

Απόδειξη.

Πράγματι, αγοράζοντας $\frac{Y}{S_0}$ μετοχές το κέρδος του στο χρόνο T θα είναι

$$\Pi = \frac{Y}{S_0} S_T - (S_T - K)^+$$

Η πιθανότητα κέρδους υπολογίζεται εύκολα αφού

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Pi > 0) &= \mathbb{P}(\Pi > 0, S_T > K) + \mathbb{P}(\Pi > 0, S_T \leq K) \\ &= \mathbb{P}\left(S_T\left(\frac{Y}{S_0} - 1\right) + K, S_T > K\right) + \mathbb{P}(S_T \leq K) \end{aligned}$$

Εύκολα τώρα προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα. $\square$

Σύγκριση μεθόδων αποτίμησης ενός call

Αν υποθέσουμε ότι η αξία του υποκείμενου αγαθού μπορεί να αυξηθεί απεριόριστα τότε έχουμε τα εξής συμπεράσματα.

• Ο πρώτος τρόπος αποτίμησης μέσω του διωνυμικού μοντέλου έχει δυο μειονεκτήματα. Το πρώτο είναι ότι υπάρχει ο κίνδυνος χρεοκοπίας και το δεύτερο είναι ότι το υποκείμενο αγαθό πρέπει να είναι διαπραγματεύσιμο στην αγορά.

• Με τον δεύτερο τρόπο αποτίμησης ο πωλητής δεν διατρέχει κίνδυνο χρεοκοπίας αλλά θα πρέπει το υποκείμενο αγαθό να είναι διαπραγματεύσιμο.

• Ο τρίτος τρόπος αποτίμησης δεν απαιτεί το υποκείμενο αγαθό να είναι διαπραγματεύσιμο στην αγορά αλλά ο πωλητής διατρέχει κίνδυνο χρεοκοπίας.

• Ο τέταρτος τρόπος αποτίμησης έχει τα ίδια μειονεκτήματα με τον πρώτο τρόπο.

Υπάρχει άλλος τρόπος αποτίμησης ενός call; Όσους περισσότερους τρόπους αποτίμησης βρείτε για ένα συμβόλαιο τόσο πιο ανταγωνιστικοί θα είστε όπως επίσης θα μεγαλώνει και η πιθανότητα κέρδους αν είστε ο πωλητής ενός τέτοιου συμβολαίου!

$Y = 2.0$	Πιθανότητα Κέρδους	Μέση Τιμή Κέρδους	Κέρδος και Ζημιά	Υποκείμενο Αγαθό
Ασφαλής Τιμή	0.717	0.05	Φραγμένο κέρδος αλλά απεριόριστη πιθανή ζημιά	Δεν απαιτείται το υποκείμενο αγαθό να είναι διαπραγματεύσιμο στην αγορά.
Ρεαλιστικό Διωνυμικό Μοντέλο	0.61	0.09	Φραγμένο κέρδος αλλά απεριόριστη πιθανή ζημιά	Απαιτείται το υποκείμενο αγαθό να είναι διαπραγματεύσιμο στην αγορά.
$(0.01 + 1)$ Στρατηγική Αντιστάθμισης	0.6	0.09	Φραγμένη ζημιά και απεριόριστο πιθανό κέρδος	Απαιτείται το υποκείμενο αγαθό να είναι διαπραγματεύσιμο στην αγορά.
$\frac{Y}{S_0}$-στρατηγική αντιστάθμισης	0.71	0.05	Φραγμένο κέρδος αλλά απεριόριστη πιθανή ζημιά	Απαιτείται το υποκείμενο αγαθό να είναι διαπραγματεύσιμο στην αγορά.

Πίνακας: Συγκρίνουμε τις τέσσερις αντισταθμιστικές στρατηγικές πουλώντας ένα call option στην ίδια τιμή $Y = 2.0$. Υπολογίζουμε τις πιθανότητες κέρδους καθώς και την μέση τιμή κέρδους για κάθε στρατηγική. Σημειώστε την διαφορά όσον αφορά το κέρδος και την ζημιά στην τρίτη στρατηγική αντιστάθμισης! Το μοντέλο των Black-Scholes είναι εκτός συναγωνισμού διότι η στρατηγική αντιστάθμισης είναι πρακτικά αδύνατη!

Αναλογία αγοράς - πώλησης

Μελετήστε και την λεγόμενη put - call parity η οποία είναι μια σχέση που συνδέει τις αξίες των call και put μέσω no arbitrage επιχειρημάτων. Δυστυχώς η σχέση αυτή δεν μας δίνει μια μοναδική τιμή για κάθε συμβόλαιο αλλά μια σχέση μεταξύ τους.

Πόσο φθηνότερα μπορεί να πουλήσει ένα συμβόλαιο ο πωλητής;

Αν ο ανταγωνισμός είναι μεγάλος ο πωλητής του παραπάνω συμβολαίου μπορεί να ρίξει την τιμή έτσι ώστε η πιθανότητα κέρδους να είναι λίγο μεγαλύτερη από 0.5. Τι μπορεί να κάνει αν θέλει να πουλήσει ακόμη φθηνότερα;

Ένας γενικός τρόπος αποτίμησης

Έστω ένα συμβόλαιο με d υποκείμενα αγαθά και απολαβή P_T κατά το χρόνο T. Ο πωλητής μπορεί να τιμολογήσει με τον παρακάτω τρόπο: δεδομένης της πιθανότητας $p \in (0,1)$ και $\sigma > 0$, θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο με αξία V_t στο χρόνο t αγοράζοντας a_i πλήθος από το αγαθό S_i, με $i = 1, \cdots, k$ στο χρόνο 0 και τοποθετώντας το ποσό b σε τραπεζικό λογαριασμό με τον εξής τρόπο,

$$\min_{a_i, b \in \mathbb{R}_+,\ i=1,\cdots,k} V_0 = \min_{a_i, b \in \mathbb{R}_+,\ i=1,\cdots,k} \left(\sum_{i=1}^{k} a_i S_i(0) + b \right)$$

$$\begin{aligned} \text{τέτοιο ώστε} \quad & \mathbb{E}(P_T) \leq \mathbb{E}(V_T) \\ \text{ή/και} \quad & \mathbb{P}(P_T \leq V_T) \geq p \\ \text{ή/και} \quad & \mathrm{Var}(V_T) \leq \sigma \end{aligned}$$

ή με οποιοδήποτε συνδυασμό των παραπάνω.

Όλα τα αγαθά είναι διαπραγματεύσιμα στην αγορά;

Το προηγούμενο σκεπτικό αποτίμησης έχει ρεαλιστική σημασία για τον πωλητή. Μάλιστα, στην περίπτωση που τα υποκείμενα αγαθά (ή κάποια από αυτά) δεν είναι διαπραγματεύσιμα στην αγορά (δείτε για παράδειγμα συμβόλαια πάνω σε δείκτες και συμβόλαια πάνω στην ενέργεια) μπορεί να κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο με $k \neq d$ εν γένει το πλήθος αγαθά τα οποία να είναι διαπραγματεύσιμα στην αγορά.

Το πρόβλημα του αγοραστή

Θα δώσουμε τώρα μια απάντηση στο ερώτημα που έχει ο αγοραστής. Ο αγοραστής μπορεί να κάνει μια υπόθεση για τις αξίες των απολαβών P_T (δείτε [3], Υπόθεση 2.2 και επόμενες), για παράδειγμα την παρακάτω

$$P_T = \max\{X_T, K\}$$

όπου X_T κατάλληλη τυχαία μεταβλητή η οποία ταιριάζει στα ιστορικά δεδομένα. Με την υπόθεση αυτή μπορεί να υπολογίσει την πιθανότητα $\mathbb{P}(P_T \geq Y)$.

Πιο συγκεκριμένα, θα υποθέσουμε ότι

Υπόθεση

Για δεδομένο $L \geq 0$ υποθέτουμε ότι υπάρχουν κάποια $m, \sigma \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε

$$P_T = \max(X_T, L)$$

όπου $X_t = P_0 + mt + \sigma W_t$ και $P_0 \geq L$.

Σημειώστε όμως ότι πρέπει να κάνουμε διαφορετική υπόθεση σε κάθε κατηγορία συμβολαίου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Δεδομένου κάποιου $p \in (0,1)$ *και κάτω από την προηγούμενη υπόθεση, η τιμή* $Y = P_0 + mT + z_p \sigma \sqrt{T}$ *είναι τέτοια ώστε* $\mathbb{P}(P_T \leq Y) = p$*, όπου* z_p *είναι τέτοιο ώστε* $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_p} e^{-\frac{r^2}{2}} dr = p$.

Απόδειξη.

Σημειώστε ότι $Y \geq L$ διότι $m, \sigma \in \mathbb{R}_+$ και $P_0 \geq L$, οπότε

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(P_T \leq Y) &= \mathbb{P}(\max(P_0 + mT + \sigma W_T, L) \leq Y) \\
&= \mathbb{P}(P_0 + mT + \sigma W_T \leq P_0 + mT + z_p \sigma \sqrt{T}) \\
&= \mathbb{P}\left(W_T \leq z_p \sqrt{T}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{z_p\sqrt{T}} e^{-\frac{r^2}{2T}}\, dr \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_p} e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr \\
&= p
\end{aligned}$$

□

Ποιο είναι το καταλληλότερο μοντέλο περιγραφής ιστορικών δεδομένων;

Ερωτημα

Σε ένα συγκεκριμένο συμβόλαιο, ποια είναι η τυχαία μεταβλητή ή στοχαστική διαδικασία που περιγράφει καλύτερα τα παρελθοντικά δεδομένα;

Το μέλλον...

Υποθέστε ότι έχει συμβεί πρόσφατα ένα γεγονός το οποίο πρόκειται να έχει σημαντικό αντίκτυπο στις τιμές της απολαβής ενός συγκεκριμένου συμβολαίου. Σίγουρα όμως δεν έχει αφήσει το αντίστοιχο αποτύπωμα του στα παρελθοντικά δεδομένα. Ο επενδυτής θα πρέπει να μαντέψει ποιος θα είναι ακριβώς ο αντίκτυπος αυτού του γεγονότος στις παραμέτρους του μοντέλου που είχε επιλέξει κάτι το οποίο είναι αρκετά δύσκολο και απαιτεί ιδιαίτερη εμπειρία στις επενδύσεις (δεν είναι μαθηματικό πρόβλημα!). Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι το δυσκολότερο μέρος της αποτίμησης είναι να μαντέψει ο επενδυτής πως πρόσφατα γεγονότα (ή ακόμη και μελλοντικά) πρόκειται να επιδράσουν στις παραμέτρους του μοντέλου που έχει επιλέξει.

Είναι χρήσιμη όμως η μελέτη ιστορικών δεδομένων;

Παρόλα αυτά η μοντελοποίηση των παρελθοντικών δεδομένων είναι επιτακτική διότι στη συνέχεια ο επενδυτής θα μεταβάλλει τις παραμέτρους κατάλληλα ανάλογα με την εκτίμηση που έχει για το μέλλον.

Πλήθος ετών για παρελθοντικά δεδομένα

Ερωτημα

Οι παράμετροι ενός (οποιουδήποτε) μαθηματικού μοντέλου εξαρτώνται και από το πλήθος των ετών από όπου αντλήθηκαν τα παρελθοντικά δεδομένα. Ποιο είναι το καταλληλότερο πλήθος;

Σε αυτό το ερώτημα θα απαντήσει ο επενδυτής σύμφωνα με την διαίσθηση και την εμπειρία του. Δεν περιμένουμε όλοι οι επενδυτές να χρησιμοποιήσουν τα ίδια παρελθοντικά δεδομένα ή τα ίδια μοντέλα όπως επίσης δεν θα έχουν και την ίδια άποψη για το μέλλον. Επομένως δεν έχει κανένα νόημα η έννοια της δίκαιης τιμής. Αλλωστε ο λόγος που υπάρχει περιθώριο κέρδους αλλά και ζημιάς είναι ακριβώς ότι το μέλλον μας είναι άγνωστο.

Δίκαιη και άδικη τιμή πώλησης

Όπως είδαμε η έννοια της δίκαιης τιμής δεν μπορεί να ορισθεί. Η έννοια όμως της άδικης τιμής ορίζεται.
Αν ένας πωλητής ενός put option με τιμή εξάσκησης K ζητά περισσότερα από K τότε η τιμή αυτή είναι άδικη για τον αγοραστή.
Παρόμοια, για ένα συμβόλαιο με απολαβή $P_T = \max\{S_1, S_2, K\}$ μια τιμή πώλησης κάτω από K είναι άδικη για τον πωλητή.
Έστω τώρα το συμβόλαιο με $P_T = \max\{S_1 - S_2, 0\}$. Ο πωλητής μπορεί να το πουλήσει στην τιμή $C(S_1, K) + K$ όπου $C(S_1, K)$ είναι ένα call option με τιμή εξάσκησης K. Ο πωλητής σε αυτή την περίπτωση θα είναι πάντοτε κερδισμένος (χωρίς ρίσκο!) αλλά δεν μπορούμε να πούμε ότι είναι άδικη η τιμή αυτή για τον αγοραστή μιας που και αυτός μπορεί να έχει κέρδος και μάλιστα απεριόριστο.
Παρόλα αυτά, αν υπάρχει μεγάλος ανταγωνισμός, θα υπάρξει ένας άλλος πωλητής ο οποίος θα πουλήσει το συμβόλαιο αυτό φθηνότερα αναλαμβάνοντας ένα μικρό ρίσκο.

Τους ίδιους υπολογισμούς μπορεί να κάνει και ο πωλητής

Την ίδια μορφή υπόθεσης βέβαια μπορεί να κάνει και ο πωλητής και επομένως μπορεί να υπολογίσει την τιμή Y με την οποία μπορεί να πουλήσει το συμβόλαιο για να έχει μια ζητούμενη πιθανότητα κέρδους χωρίς κατασκευή αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου.

Για παράδειγμα σε ένα put option μπορεί ο αγοραστής να υποθέσει ότι $P_T = \max\{K - S_T, 0\}$ όπου S_t ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown και επομένως να υπολογίσει την πιθανότητα κέρδους αγοράζοντας σε μια δοσμένη τιμή Y. Την ίδια υπόθεση μπορεί να κάνει και ο πωλητής προκειμένου να πουλήσει το συμβόλαιο σε κατάλληλη για αυτόν τιμή. Σημειώστε ότι αν ο πωλητής χρησιμοποιήσει το διωνυμικό μοντέλο για την αποτίμηση αυτού του συμβολαίου θα πρέπει να δανεισθεί μετοχές και επομένως η πιθανή ζημιά γίνεται απεριόριστη παρότι η απολαβή είναι άνω φραγμένη!

Ένα συμβόλαιο σε δυο υποκείμενες μετοχές

Έστω ένα συμβόλαιο με απολαβή $P_T = \max\{S_1 - S_2, 0\}$ και ας υποθέσουμε ότι οι αξίες των δυο αυτών αγαθών είναι τέτοιες ώστε

$$\begin{aligned}
S_1(T) &= 0.98 + 0.001 \int_0^T S_1(r)dr + 0.5 \int_0^T S_1(r)dW_r \\
S_2(T) &= 0.99 - 0.02 \int_0^T S_2(r)dr + 0.6 \int_0^T S_2(r)dW_r
\end{aligned}$$

όπου $T = 50$ ημέρες. Ο πωλητής κατασκευάζει ένα χαρτοφυλάκιο με $a_1 = 1.0$, $a_2 = -0.06$ και $b = -0.714$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι το χαρτοφυλάκιο αυτό έχει την ιδιότητα κέρδους ενώ η αρχική του αξία είναι $V_0 = 0.19$.

Μπορεί να υπολογίσει επίσης τα κατάλληλα Y_{S_1} και Y_{S_2} έτσι ώστε

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_1(T) \leq Y_{S_1}) &= p \\ \mathbb{P}(S_2(T) \geq Y_{S_2}) &= p \end{aligned}$$

Οπότε μια τιμή πώλησης με φυσική σημασία για τον πωλητή θα είναι η $Y = \max\{Y_{S_1} - Y_{S_2}, 0\}$.

Ο αγοραστής μπορεί να υπολογίσει την πιθανότητα κέρδους κάνοντας μια υπόθεση για τις παρελθοντικές απολαβές. Μπορεί να υποθέσει ότι υπάρχουν παράμετροι $m, \sigma \in \mathbb{R}_+$ έτσι ώστε

$$P_T = \max\{P_0 + mT + \sigma W_T, 0\}$$

Την ίδια υπόθεση μπορεί να κάνει και ο πωλητής και να έχει μια διαφορετική εκτίμηση για μια συμφέρουσα τιμή για αυτόν.

ΕΡΩΤΗΜΑ

Το μοντέλο των Black - Scholes τι τιμή δίνει άραγε;

Απαντηση

Η τιμή αυτή καθαυτή δεν έχει κανένα νόημα αν ο τρόπος που καλύπτει τον πωλητή δεν είναι πρακτικά εφικτός!

Εξασφάλιση στα call options

Ερωτημα

Πως όμως θα εξασφαλιστούμε πουλώντας μερικά call options γραμμένα σε μια υποκείμενη μετοχή;

Η απάντηση δεν είναι κατά ανάγκη πολύπλοκη.

Αν πουλήσει κάποιος ένα call option γραμμένο σε μια μετοχή αλλά ταυτόχρονα έχει στην κατοχή του μια μετοχή ανά call option που θα πουλήσει τότε δεν διατρέχει κίνδυνο χρεοκοπίας.

Μια χρηματιστηριακή εταιρεία εκτός από το να πουλά και να αγοράζει συμβόλαια είναι πολύ πιθανό να έχει στην κατοχή της μετοχές από διάφορες εταιρείες. Έστω ότι κατά την χρονική στιγμή t έχει στην κατοχή της d το πλήθος μετοχές της εταιρείας X. Τότε μπορεί να πουλήσει και d το πλήθος call options γραμμένα σε αυτή την μετοχή αρκεί να έχει στην κατοχή της το πλήθος αυτό των μετοχών μέχρι την λήξη των call options. Με τον τρόπο αυτό δεν διατρέχει κίνδυνο χρεοκοπίας πουλώντας call options.

Το ίδιο όμως δεν μπορεί να γίνει για options των οποίων τα υποκείμενα αγαθά δεν είναι διαπραγματεύσιμα στην αγορά (αλλά ούτε και για τα call on maximum options) επομένως σε αυτές τις περιπτώσεις θα πρέπει να κινηθούμε όπως περιγράψαμε νωρίτερα.
Αν έχει την δυνατότητα να εκμηδενίσει τον κίνδυνο αγοράζοντας κατάλληλα call options ίσως είναι προτιμότερο για τον πωλητή να εξασφαλιστεί με αυτό τον τρόπο παρά να πουλήσει μετοχές που κατέχει.

ΕΡΩΤΗΜΑ

Τι είναι προτιμότερο για τον πωλητή, να αγοράσει call options για εξασφάλιση ή τις υποκείμενες μετοχές;

Βιβλιογραφία

- F. Black - M. Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities*. Journal of Political Economy, 81, 637 - 659, 1973.
- J. Cox - S. Ross - M. Rubinstein, *Option pricing: A simplified approach*, Journal of Financial Economics, 7, 229 - 264, 1979.
- N. Halidias, *On the practical point of view of option pricing*, Monte Carlo Methods and Applications, 2022.
- N. Halidias, *Option Pricing: Examples and Open Problems*, ResearchGate.