

**Πρώτο Φυλλάδιο Εργασίας**  
**Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά (ΠΜΣ)**  
**Τμήμα ΣΑΧΜ**

(1) (Ισοδύναμα Επιτόκια)

**Ερώτημα.** Έστω ότι η τράπεζα  $T_1$  εφαρμόζει ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού  $i_1 = 0.03$  ενώ η τράπεζα  $T_2$  εφαρμόζει ετήσιο επιτόκιο μηνιαίου ανατοκισμού  $i_2 = 0.029$ . Που συμφέρει να τοποθετήσω τα χρήματά μου;

Για να απαντηθεί το ερώτημα αυτό χρήσιμος θα είναι ο παρακάτω ορισμός.

**Ορισμός 1** Θεωρούμε τα επιτόκια  $i_1, i_2, \dots, i_n$  σε χρονικές περιόδους  $t_1, t_2, \dots, t_n$  εκφρασμένα σε ημέρες. Έστω  $k = \text{E.K.Π.}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ . Τότε τα επιτόκια  $i_1, i_2, \dots, i_n$  θα λέγονται ισοδύναμα όταν ίσα ποσά που τοκίζονται στις περιόδους  $t_1, t_2, \dots, t_n$  με επιτόκια  $i_1, i_2, \dots, i_n$  έχουν ίσες τελικές αξίες σε πολλαπλάσια της περιόδου  $k$ .

Εφαρμόστε τον παραπάνω ορισμό για να λύσετε την επόμενη άσκηση.

**Άσκηση 2** Έστω ότι η τράπεζα  $T_1$  χρησιμοποιεί ετήσιο επιτόκιο 3% τριμηνιαίου ανατοκισμού. Ποιο είναι το ισοδύναμο ετήσιο επιτόκιο της τράπεζας  $T_2$  μηνιαίου ανατοκισμού; Υπάρχουν χρονικές στιγμές στο μέλλον όπου οι τελικές αξίες ίσων ποσών που κατατέθηκαν την ίδια χρονική στιγμή συμπίπτουν; Αν ναι, είναι πεπερασμένες ή άπειρες; Στις υπόλοιπες χρονικές στιγμές τι ακριβώς συμβαίνει; Υπάρχει κάποιο επιτόκιο που μπορεί να εφαρμόσει η τράπεζα  $T_2$  έτσι ώστε ίσα ποσά να έχουν ίδια τελική αξία σε όλες τις χρονικές στιγμές στο μέλλον; Αν η τράπεζα  $T_2$  εφαρμόζει ετήσιο επιτόκιο  $i_2$  μηνιαίου ανατοκισμού πως θα επιλέξουμε ποια από τις δυο τράπεζες είναι περισσότερο συμφέρουσα για την τοποθέτηση των χρημάτων μας;

(2) (Σειρές Πληρωμών)

**Άσκηση 3** Ο Α, φοιτητής ηλικίας 20 ετών, αποφάσισε να δημιουργήσει μια εταιρία. Έπεισε τους συνομήλικους συμφοιτητές του (100 άτομα) να

του δίνουν 1.655,632233 Ευρώ το χρόνο στο τέλος του κάθε χρόνου για τα επόμενα 40 χρόνια. Από την άλλη μεριά ο Α θα είναι υποχρεωμένος να τους δίνει το ποσό των 10.000 Ευρώ στο τέλος του κάθε έτους από την ηλικία των 60 ετών και πέρα. Κάνοντας τους απαραίτητους υπολογισμούς και υποθέσεις διαπίστωσε ότι με τα χρήματα που θα του καταθέτουν κάθε χρόνο μπορεί να κρατά το ποσό των 21.165 Ευρώ κάθε χρόνο μέχρι την ηλικία των 60 ετών ή το ποσό των 18.159,27826 για πάντα και ταυτόχρονα θα είναι σε θέση να εκπληρώσει τις οικονομικές του υποσχέσεις προς τους συμφοιτητές του. Εξηγήστε πως ακριβώς μπορεί αυτό να γίνει υποθέτοντας ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού  $i = 0.05$  και υποθέτοντας ότι οι 90 από τους 100 συμφοιτητές του δεν θα ξεπεράσουν τα 100 έτη ζωής.

(3) (Δάνεια)

**Άσκηση 4** Δάνειο 100.000 Ευρώ πρέπει να εξοφληθεί σε 5 έτη με ίσες ετήσιες δόσεις και επιτόκιο 5% με την μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου. Να κατασκευαστεί πίνακας αποπληρωμής του δανείου.

**Άσκηση 5** Επιχειρηματίας δανειζεται το ποσό των 10.000.000 Ευρώ με ετήσιο επιτόκιο δανεισμού  $i = 0.06$  το οποίο λήγει σε 10 χρόνια. Το ετήσιο επιτόκιο κατάθεσης σε τράπεζα είναι  $r = 0.04$ . Ποια είναι η δόση στην περίπτωση που εφαρμόσει την μέθοδο του εξοφλητικού αποθέματος και ποια είναι η δόση στην περίπτωση που εφαρμόσει την μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου;

(Ομολογιακά Δάνεια) Τα ομολογιακά δάνεια είναι δάνεια πολλών δανειστών σε ένα δανειζόμενο. Μια τέτοια περίπτωση είναι όταν το κράτος σκοπεύει να δανειστεί (από τους πολίτες) ένα ποσό  $K$  το οποίο το χωρίζει σε  $N$  ίσα ποσά τα οποία ονομάζονται ομολογίες. Ο κάθε δανειστής μπορεί να πάρει έναν ή περισσότερους τέτοιους τίτλους όπου σε κάθε τίτλο αναγράφεται η ονομαστική αξία του τίτλου. Η τιμή του τίτλου στην οποία πωλούνται οι ομολογίες ονομάζεται τιμή εκδόσεως ενώ η τιμή που θα εξοφληθεί η κάθε ομολογία ονομάζεται τιμή εξοφλήσεως, η οποία μπορεί να είναι και διαφορετική από την ονομαστική αξία. Ο δανειζόμενος καταβάλλει τόχο ο οποίος υπολογίζεται με βάση την ονομαστική αξία του ομολόγου.

Οι τόκοι του ομολόγου εξοφλούνται με τα τοκομερίδια τα οποία είναι κουπόνια με τα οποία εισπράττονται οι τόκοι στο τέλος κάθε περιόδου (εξαμήνου, χρόνου κτλ). Το δανεισμένο κεφάλαιο εξοφλείται με τις ομολογίες, δηλαδή σε προκαθορισμένες ημερομηνίες κληρώνεται ορισμένος αριθμός ομολογιών και οι ομολογιούχοι εισπράττουν τα χρήματα που αντιπροσωπεύουν οι ομολογίες τους.

Επομένως, αν το δάνειο εξοφληθεί σε  $n$  χρόνια ο δανειζόμενος θα πρέπει να καταβάλλει (εκτός των τόκων μέσω των κουπονιών) μέρος του δανείου κληρώνοντας αντίστοιχες ομολογίες. Αυτό γίνεται με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου. Θα σχηματιστεί μια ράντα με τελική τιμή  $K$ , και άρα

$$R = Ki + KP_{\overline{n}|i}$$

είναι το ποσό που θα καταβάλλει ο δανειζόμενος σε κάθε περίοδο. Για κεφάλαιο αναλογεί το ποσό  $KP_{\overline{n}|i}$  το οποίο θα διαιρεθεί με το ποσό  $K/N$  για να μας δώσει το πλήθος των ομολογιών που θα κληρωθούν το οποίο θα είναι  $[NP_{\overline{n}|i}]$ . Σημειώστε ότι πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός το πλήθος των ομολογιών ενώ το ποσό  $NP_{\overline{n}|i}$  μπορεί να μην είναι ακέραιος αριθμός. Σε μια τέτοια περίπτωση θα εξοφλήσει λιγότερα από όσα πρέπει και η διαφορά θα προστεθεί στο ποσό της επόμενης φοράς. Το ποσό  $KP_{\overline{n}|i} - \frac{K}{N}[NP_{\overline{n}|i}]$  θα προστεθεί στο ποσό της επόμενης χρονικής περιόδου που θα πρέπει να εξοφλήσει ο δανειζόμενος, δηλαδή θα πρέπει να εξοφλήσει  $R' = R + KP_{\overline{n}|i} - \frac{K}{N}[NP_{\overline{n}|i}]$ .

Στην επόμενη περίοδο έχουν περισσέψει  $N - [NP_{\overline{n}|i}]$  τίτλοι και επομένως θα καταβληθούν οι αντίστοιχοι τόκοι οι οποίοι θα είναι τώρα  $\frac{K}{N}(N - [NP_{\overline{n}|i}])i$  ενώ το ποσό δανείου που θα αποπληρωθεί θα είναι  $R' - \frac{K}{N}(N - [NP_{\overline{n}|i}])i$ . Αυτό με τη σειρά του θα διαιρεθεί με το  $K/N$  για να βρεθεί το πλήθος των ομολογιών που θα κληρωθούν. Αν η διαίρεση δεν δώσει ακέραιο αριθμό το υπόλοιπο το προσθέτουμε στο ποσό του επόμενου έτους. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι το τέλος του  $n$ -οστού έτους.

**Άσκηση 6** Το κράτος σύναψε ομολογιακό δάνειο ύψους 5.000.000 Ευρώ το οποίο αποτελείται από 10.000 ομολογίες ονομαστικής αξίας 500 Ευρώ. Το δάνειο θα εξοφληθεί με επιτόκιο 3% σε 6 χρόνια. Κατασκευάστε τον πίνακα αποπληρωμής του δανείου.