

Πρώτο φυλλάδιο ασκήσεων : Ακολουθίες και Σειρές

1) α) Να δειχθεί ότι το n -οστό μερικό άθροισμα της

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

είναι $S_n = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$ και έπειτα να βρεθεί το όριο.

2) Έστω η ακολουθία $a_n = \frac{n!}{n^n}$.

ι) Να δειχθεί ότι $a_n \rightarrow 0$. (Υπόδ: δείξτε ότι $a_n \leq \frac{1}{n}$). Έχουμε κάποιο συμπέρασμα για την αντίστοιχη σειρά;

ιι) Δείξτε ότι $a_n \leq C \frac{1}{n^2}$ για κάποια σταθερά C .

ιιι) Τέλος, δείξτε ότι $\sum a_n < +\infty$ με διάφορα κριτήρια και δικαιολογήστε γιατί αυτό σημαίνει ότι $a_n \rightarrow 0$.

3) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$ με διάφορα κριτήρια. Αν συγκλίνει, να βρεθεί το όριο.

4) Να εξεταστούν με διάφορα κριτήρια οι παρακάτω σειρές

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2(n+1)(n+2)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

5) Να εξεταστούν με διάφορα κριτήρια οι παρακάτω σειρές

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-2)^{n-1}}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{100n^2 + 1}$$

6) Να εξεταστούν με διάφορα κριτήρια οι παρακάτω σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

7) Να εξεταστεί με διάφορα κριτήρια η παρακάτω σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^k}$$

για διάφορες τιμές του $k \in \mathbb{R}$.

8) Να εξεταστούν με διάφορα κριτήρια οι παρακάτω σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+2n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}.$$

9) Να εξεταστούν με διάφορα κριτήρια οι παρακάτω σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2^n}.$$

10) Να εξεταστούν με διάφορα κριτήρια οι παρακάτω σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}+1}{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

11) Να υπολογισθεί πόσους όρους πρέπει να αθροίσουμε στις παρακάτω σειρές για να έχουμε σφάλμα μικρότερο του 10^{-3} ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{10^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!}.$$

12) Να εξεταστούν ως προς την σύγκλιση με διάφορα κριτήρια οι παρακάτω σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n!},$$

για διάφορες τιμές του $p \in \mathbb{R}$.

13) Από το κριτήριο του ολοκληρώματος (δες σημειώσεις, σελ. 30) γνωρίζουμε ότι τα $\int_1^{\infty} f(x) dx$, $\sum a_n$ συγκλίνουν ή αποκλίνουν μαζί. Ισχύει επιπλέον και το εξής

$$\int_1^{n+1} f(x) dx < \sum_{k=1}^n f(k) < \int_1^n f(x) dx + f(1).$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ανισότητα δείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ συγκλίνει σε έναν αριθμό μεταξύ του 0.7 και 1.3.

14) Έστω $a_n > 0$ και $\sum a_n < \infty$. Δείξτε ότι και η $\sum a_n^p < \infty$ για $p > 1$.

15) Να δείξετε ότι αν $a_n > 0$ τότε οι σειρές $\sum a_n$, $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ είναι ισοδύναμες ως προς την σύγκλιση ή απόκλιση.

16) Να δειχθεί ότι το $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.

17) Να βρεθεί το άθροισμα $\sum nx^n$ για $|x| < 1$.

18) Να εξεταστεί ως προς την σύγκλιση με διάφορα κριτήρια η σειρά $\sum \frac{1}{n^{\ln n}}$.

19) Έστω $a_n, b_n \rightarrow L$ τότε η ακολουθία $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots$ συγκλίνει στο L . Δώστε παράδειγμα ακολουθιών με $\sum a_n < \infty$, $\sum b_n < \infty$ και $\sum a_n b_n = \infty$.