

Πρώτο Φυλλάδιο Εργασίας Απειροστικός Λογισμός Ι Διδάσκων: Νίκος Χαλιδιάς

Πρώτο Θέμα

Μελετήστε τις αποδείξεις των θεωρημάτων 17-23 και καταγράψτε τα αξιώματα και τα θεωρήματα που εφαρμόζονται σε κάθε ένα από αυτά.

Δεύτερο Θέμα

Αποδείξτε την Αρχιμήδεια ιδιότητα των φυσικών αριθμών, δηλαδή ότι το \mathbb{N} δεν είναι άνω φραγμένο (ή αλλιώς «οι φυσικοί αριθμοί πάνε μέχρι το άπειρο»).

(Υπόδειξη: Υποθέστε ότι υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ το οποίο είναι ένα άνω φράγμα του συνόλου \mathbb{N} και καταλήξτε σε άτοπο. Μπορεί να είναι χρήσιμη η έννοια του ακέραιου μέρους ενός αριθμού).

Τρίτο Θέμα

Να βρεθούν τα \sup και \inf των παρακάτω συνόλων και να εξετάσετε αν ανήκουν σε αυτά τα σύνολα ή όχι.

(i) $E_1 = \{r \in \mathbb{Q} : r < 0\}$

(ii) $E_2 = \{r \in \mathbb{Q} : r \leq 0\}$

(iii) $E_3 = \{r \in \mathbb{Q} : r > 0\}$

(iv) $E_4 = \{r \in \mathbb{Q} : r \geq 0\}$

(v) $E_5 = \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\}$

Τέταρτο Θέμα

Αποδείξτε επαγωγικά ότι $n! < n^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Πέμπτο Θέμα

Θεωρείστε την ακολουθία πραγματικών αριθμών που ορίζεται ως $x_1 = 1$ και $x_{n+1} = \sqrt{1 + 2x_n}$ για $n \geq 1$. Αποδείξτε επαγωγικά ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 1$ ισχύει ότι $x_n < 4$.

Έκτο Θέμα

Αποδείξτε επαγωγικά την παρακάτω ισότητα.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Έβδομο Θέμα

Υπολογίστε τις ρίζες του πολυωνύμου $x^2 + x + 2$. Στην συνέχεια γράψτε το στην μορφή $(x - a)^2 + b^2$ για κάποια $a, b \in \mathbb{R}$. Επαληθεύστε το. Κατασκευάστε πολυώνυμα δευτέρου βαθμού με αρνητική διακρίνουσα και υπολογίστε τα παραπάνω.

Όγδοο Θέμα

Λύστε την άσκηση 43 των σημειώσεων.

Ένατο Θέμα

Γράψτε σε πολική μορφή τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς και στην συνέχεια υπολογίστε την νιοστή τους δύναμη.

(i) $2 + 3i$

(ii) $4 + 5i$

(iii) $-2 + i$

Τέλος υπολογίστε τα (ανά δυο) γινόμενα και πηλίκα τους τόσο χρησιμοποιώντας την παραπάνω μορφή όσο και με την πολική τους μορφή. Επαληθεύστε ότι συμπίπτουν μετατρέποντας το γινόμενο ή το πηλίκο στην πολική του μορφή.